Equazioni logaritmiche

Un'equazione si dice **logaritmica** se l'incognita compare nell'argomento del logaritmo.
Per esempio, sono logaritmiche le equazioni:

$$\log_2 x = 4 \qquad \log_3 (x^2 - 4) = 1 \qquad \log_{\frac{1}{2}} \frac{x-1}{x+1} = 5$$

Si chiama **equazione logaritmica elementare** un'equazione della forma:

$$\log_a x = b$$

Essa ha, per definizione di logaritmo in base a, la soluzione:

$$x = a^b$$

Esempi

8 *Risolviamo l'equazione:* $\log_3(x-4) = 2$
Si ha: $x - 4 = 3^2$
da cui si ottiene: $x = 13$

9 *Risolviamo l'equazione:* $\log_3(x-4) - \log_3(2x-1) = -1$

Per l'esistenza dei due logaritmi deve essere:

$$\begin{cases} x-4>0 \\ 2x-1>0 \end{cases}$$

Perciò le soluzioni dovranno verificare la condizione $x > 4$.

Per $x > 4$, applicando la proprietà espressa dalla [6.6] si ha:

$$\begin{cases} \log_3 \dfrac{x-4}{2x-1} = -1 \\ x > 4 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} \dfrac{x-4}{2x-1} = 3^{-1} = \dfrac{1}{3} \\ x > 4 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} 3x - 12 = 2x - 1 \\ x > 4 \end{cases}$$

da cui si ricava la soluzione: $x = 11$

10 *Risolviamo l'equazione:* $\log_2(x-1) - \log_{\frac{1}{2}}(3-x) = -1$

Per la positività degli argomenti deve essere:

$$\begin{cases} x-1>0 \\ 3-x>0 \end{cases}$$

da cui segue: $1 < x < 3$

Riduciamo i due logaritmi in logaritmi aventi la stessa base: per la [6.11] si ha:

$$\log_{\frac{1}{2}}(3-x) = \frac{\log_2(3-x)}{\log_2 \frac{1}{2}} = -\log_2(3-x)$$

L'equazione si può allora scrivere:

$$\log_2(x-1) + \log_2(3-x) = -1$$

e applicando la [6.5], con la condizione $1 < x < 3$, si ha:

$$\begin{cases} \log_2[(x-1)(3-x)] = -1 \\ 1 < x < 3 \end{cases}$$

e quindi:

$$\begin{cases} (x-1)(3-x) = \dfrac{1}{2} \\ 1 < x < 3 \end{cases}$$

da cui:

$$2x^2 - 8x + 7 = 0 \qquad (1 < x < 3)$$

equazione che fornisce le soluzioni:

$$x_1 = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{e} \qquad x_2 = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

11 *Risolviamo l'equazione:* $\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 - 5\log_{\frac{1}{2}} x + 4 = 0$

È un'equazione di 2° grado in $\log_{\frac{1}{2}} x$, che ha per soluzioni:

- $\log_{\frac{1}{2}} x = 1$ da cui si ricava $x = \frac{1}{2}$
- $\log_{\frac{1}{2}} x = 4$ da cui si ricava $x = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

12 *Risolviamo l'equazione:* $\log_2(x-2) + \log_2(x+4) = 1$

Per l'esistenza dei due logaritmi deve essere:

$$\begin{cases} x-2>0 \\ x+4>0 \end{cases}$$

da cui si ottiene: $x > 2$

Con tale condizione, in base alla [6.5] si ha:

$$\begin{cases} \log_2[(x-2)(x+4)] = 1 \\ x > 2 \end{cases}$$

da cui: $(x-2)(x+4) = 2 \qquad (x > 2)$

e quindi: $x^2 + 2x - 10 = 0 \qquad (x > 2)$

L'equazione ottenuta ammette le radici:

$$x_1 = -1 - \sqrt{11} \qquad \text{e} \qquad x_2 = -1 + \sqrt{11}$$

Essendo $x_1 < 2$ e $x_2 > 2$, ne segue che solo $x_2 = -1 + \sqrt{11}$ è soluzione dell'equazione logaritmica di partenza.