La funzione logaritmo

La funzione logaritmo può essere pensata come la funzione inversa della funzione esponenziale.
Nel tracciare la funzione

$y = \log_a x$ vanno, come per l'esponenziale, distinti due casi:

1) $0 < a < 1$
2) $a > 1$

$\boxed{0 < a < 1}$

Per fissare le idee, sia $a = \frac{1}{2}$; disegniamo perciò il grafico della curva:

$$y = \log_{\frac{1}{2}} x$$

Costruiamo una tabella, dando all'argomento x alcuni valori semplici e trovando i corrispettivi valori di $\log_{\frac{1}{2}} x$. Riportiamo sul piano cartesiano i punti di coordinate $\left(\frac{1}{8};3\right), \left(\frac{1}{4};2\right)$, ... Il grafico della curva $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ ha l'andamento rappresentato nella figura 6.10.

x	$y = \log_{\frac{1}{2}} x$
$\frac{1}{8}$	3
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{2}$	1
1	0
2	−1
4	−2
8	−3

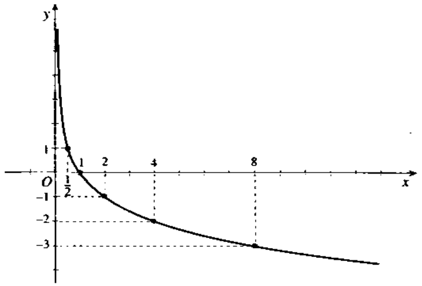

Fig. 6.10

Osserviamo tale grafico: esso è posto nel semipiano $x > 0$, in quanto $x = \left(\frac{1}{2}\right)^y > 0$.

Inoltre, al crescere dell'argomento x, i corrispondenti valori di $\log_{\frac{1}{2}} x$ decrescono.

Questo fatto si esprime dicendo che la funzione $\log_{\frac{1}{2}} x$ è **decrescente**.

Il grafico della funzione:

$$y = \log_a x \qquad (0 < a < 1)$$

ha un andamento analogo a quello della funzione $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ della figura 6.10.

Lo studente se ne potrà convincere tracciando per esercizio, su uno stesso piano cartesiano, i grafici delle funzioni:

$$y = \log_{\frac{1}{3}} x \qquad \text{e} \qquad y = \log_{\frac{1}{4}} x$$

$\boxed{a > 1}$

Per fissare le idee, sia $a = 2$; disegniamo perciò il grafico della funzione:

$$y = \log_2 x$$

costruendo una tabella analoga a quella del caso precedente e riportando le coppie $\left(\frac{1}{8};-3\right)$, $\left(\frac{1}{4};-2\right)$, ... dei valori trovati come coordinate di punti sul piano cartesiano. Otteniamo la curva rappresentata nella figura 6.11.

x	$y = \log_2 x$
$\frac{1}{8}$	−3
$\frac{1}{4}$	−2
$\frac{1}{2}$	−1
1	0
2	1
4	2
8	3

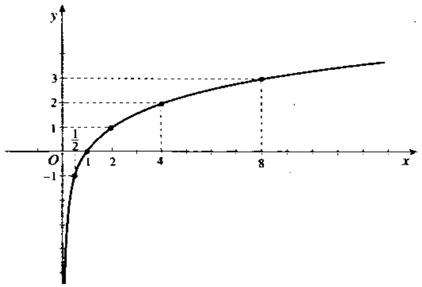

Fig. 6.11

Osserviamo che il grafico di $y = \log_2 x$ è posto anch'esso nel semipiano $x > 0$ ed è **crescente**.
Come nel caso precedente, il grafico della funzione:

$$y = \log_a x \qquad (a > 1)$$

ha un andamento analogo a quello della funzione $y = \log_2 x$ della figura 6.11.

Osservazione 5

Osservando la figura 6.12, in cui sono riportati i grafici di $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ e $y = \log_2 x$, si deduce che le curve sono l'una simmetrica dell'altra rispetto all'asse x.

Infatti, applicando la formula relativa al cambiamento di base, si ha:

$$y = \log_{\frac{1}{2}} x = \log_2 x \cdot \log_{\frac{1}{2}} 2 = -\log_2 x$$

Pertanto una curva si ottiene dall'altra cambiando y in $-y$, applicando cioè una simmetria rispetto all'asse x.

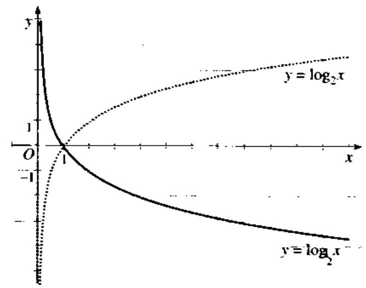

Fig. 6.12

La funzione y=ln(x) [logaritmo in base e]

Poiché la base è $e = 2{,}7182818...$, l'andamento è analogo a quello riportato in figura 6.11. Costruendo la relativa tabella e riportando le coppie $(e^{-3}; -3)$, $(e^{-2}; -2)$, $(e^{-1}; -1)$... sul piano cartesiano, si ottiene la curva rappresentata in figura 6.13.

x	$y = \log x$
e^{-3}	−3
e^{-2}	−2
e^{-1}	−1
1	0
e	1
e^2	2
e^3	3

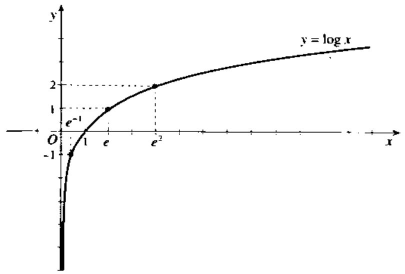

Fig. 6.13

Osservazione 6

Le curve:

$$y = a^x \qquad \text{e} \qquad y = \log_a x$$

sono l'una simmetrica dell'altra rispetto alla bisettrice $y = x$, come si deduce per esempio osservando la figura 6.14 in cui sono riportati i grafici delle curve:

$$y = 2^x \qquad \text{e} \qquad y = \log_2 x$$

Infatti, la funzione:

$$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}_0^+ \mid x \to a^x = y$$

ponendo una corrispondenza biunivoca tra i punti del dominio $\mathbf{R}$ e i punti del codominio $\mathbf{R}_0^+$, è invertibile.
Risolvendo l'equazione:

$$y = a^x$$

rispetto a x, si ottiene la funzione inversa:

$$f^{-1}: \mathbf{R}_0^+ \to \mathbf{R} \mid y \to \log_a y = x$$

che ha lo stesso grafico della f.
Se ora nella $x = \log_a y$ scambiamo x con y, applichiamo cioè una simmetria rispetto alla bisettrice $y = x$, otteniamo la curva:

$$y = \log_a x$$

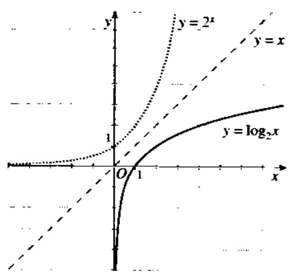

Fig. 6.14