Proprietà dei logaritmi

Si è detto (vedi § 6.5) che l'equazione esponenziale:

$$a^x = b$$

con $a > 0$ e $a \neq 1$, ammette una e una sola soluzione per ogni $b > 0$ e si è convenuto di indicare tale soluzione con il simbolo:

$$x = \log_a b$$

Possiamo allora dedurre le seguenti conseguenze fondamentali:

a. la funzione esponenziale $x \to a^x$, con $a > 0$ e $a \neq 1$, è dotata di inversa;
b. l'inversa della funzione esponenziale, $b \to \log_a b$, è definita per tutti i numeri positivi;
c. la funzione $x \to \log_a x$ gode delle proprietà formali, analoghe a quelle della funzione esponenziale, che ora enunceremo.

1. Se $b_1 > 0$ e $b_2 > 0$, allora:

$$\boxed{\log_a (b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2}$$

Infatti, avendo posto:

$$a^{x_1} = b_1 \quad \text{e} \quad a^{x_2} = b_2 \qquad [6.3]$$

segue:

$$x_1 = \log_a b_1 \quad \text{e} \quad x_2 = \log_a b_2 \qquad [6.4]$$

da cui si ottiene, moltiplicando le [6.3] membro a membro:

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = b_1 \cdot b_2$$

ossia:

$$a^{x_1 + x_2} = b_1 \cdot b_2$$

si ricava:

$$x_1 + x_2 = \log_a (b_1 \cdot b_2)$$

e, sostituendo i valori di x_1 e x_2 ricavati dalle [6.4]:

$$\log_a b_1 + \log_a b_2 = \log_a (b_1 \cdot b_2) \qquad [6.5]$$

2. Se $b_1 > 0$ e $b_2 > 0$, allora:

$$\boxed{\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2}$$

Infatti, dividendo membro a membro le [6.3], si ottiene:

$$a^{x_1 - x_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

da cui si ricava:

$$x_1 - x_2 = \log_a \frac{b_1}{b_2}$$

Sostituendo a x_1 e x_2 i valori ricavati dalle [6.4], si ottiene:

$$\log_a b_1 - \log_a b_2 = \log_a \frac{b_1}{b_2} \qquad [6.6]$$

3. Se $b > 0$, allora:

$$\boxed{\log_a b^k = k \log_a b}$$

Infatti, posto:

$$a^x = b \quad \text{ossia} \quad x = \log_a b$$

elevando i due membri della prima uguaglianza all'esponente k, si ottiene:

$$a^{kx} = b^k \quad \text{e quindi} \quad kx = \log_a b^k$$

da cui segue:

$$k \log_a b = \log_a b^k \qquad [6.7]$$

4. $\boxed{\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1}$

Infatti, poiché:

$$a^0 = 1 \quad \text{e} \quad a^1 = a$$

si ottiene:

$$\log_a 1 = 0 \quad \text{e} \quad \log_a a = 1 \qquad [6.8]$$

5. $\boxed{\log_c b = \log_a b \cdot \log_c a}$ ossia $\boxed{\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}}$

Infatti, ponendo:

$$a^x = b \quad \text{e} \quad c^y = a \qquad [6.9]$$

segue:

$$x = \log_a b \quad \text{e} \quad y = \log_c a \qquad [6.10]$$

ed elevando la seconda delle [6.9] a potenza con esponente x si ottiene:

$$c^{xy} = b \quad \text{o anche} \quad xy = \log_c b$$

da cui, sostituendo a x e y i valori ricavati dalle [6.10], si ottiene:

$$\log_c b = \log_a b \cdot \log_c a$$

da cui:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \qquad [6.11]$$

Le cinque proprietà elencate non sono tutte indipendenti tra loro; l'ultima rappresenta l'importante regola del **cambiamento di base** nei logaritmi.
Scelti per esempio $c = 10$ e $a = 2$, dalla [6.11] si ha l'uguaglianza:

$$\log_2 b = \frac{\log_{10} b}{\log_{10} 2}$$

la quale indica che, per conoscere il logaritmo di un numero in base 2, basta conoscere il logaritmo in base 10 di tale numero e il valore di $\log_{10} 2$. Le tavole di logaritmi tradizionali sono relative alla base $a = 10$: tale scelta è vantaggiosa perché 10 è la base del sistema di numerazione usuale.