Disequazioni esponenziali

Occupiamoci ora della risoluzione di disequazioni esponenziali del tipo:

$$a^x \gtrless b \qquad (\text{con } a > 0)$$

Sia $b \le 0$. Poiché, se a è positivo, a^x è positivo per ogni x, la disequazione:

$$a^x > b$$

è soddisfatta per ogni x, mentre la disequazione:

$$a^x \le b$$

non è mai soddisfatta.

Sia ora $b > 0$; distinguiamo due casi:

1) $0 < a < 1$
2) $a > 1$

$\boxed{0 < a < 1}$

Abbiamo già osservato nel paragrafo 6.4 che in questo caso la funzione $y = a^x$ è *decrescente* (fig. 6.7); ciò significa che, quali che siano i valori di x_1 e x_2, con $x_1 < x_2$, risulta:

$$x_1 < x_2 \quad \Leftrightarrow \quad a^{x_1} > a^{x_2}$$

Poiché, se $b > 0$, per la [6.2] si può scrivere:

$$b = a^{\log_a b}$$

La disequazione: $a^x > b$

diventa: $a^x > a^{\log_a b}$

che, se $0 < a < 1$, è verificata per $x < \log_a b$

La disequazione: $a^x < b$

diventa invece: $a^x < a^{\log_a b}$

che, se $0 < a < 1$, è verificata per $x > \log_a b$

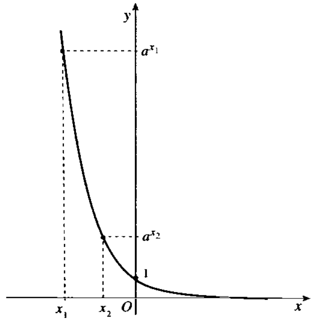


Fig. 6.7

$\boxed{a > 1}$

Abbiamo già detto, a proposito della funzione esponenziale $y = a^x$, con $a > 1$, che essa è *crescente* (fig. 6.8); ciò significa che, quali che siano i valori di x_1 e x_2, con $x_1 < x_2$, risulta:

$$x_1 < x_2 \quad \Leftrightarrow \quad a^{x_1} < a^{x_2}$$

Quindi, essendo $b = a^{\log_a b}$, la disequazione:

$$a^x > b \qquad (\text{con } a > 1)$$

è verificata per $x > \log_a b$

mentre la disequazione: $a^x < b$ (con $a > 1$)

è verificata per $x < \log_a b$

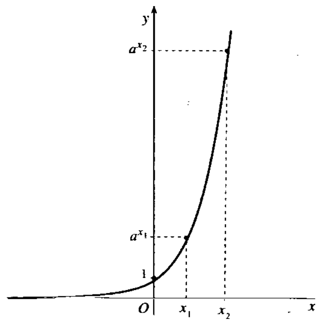


Fig. 6.8

Osservazione 4

Poiché per $a > 0$ si può scrivere: $a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$ se $0 < a < 1$ la potenza a^x si può trasformare nella potenza $\left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$ di base $\frac{1}{a} > 1$. Per esempio, si può scrivere:

$$2^{2-x} \text{ anziché } \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} \qquad \text{e} \qquad 3^{-2x-7} \text{ anziché } \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+7}$$

Quest'osservazione ci permette di considerare solo disequazioni del secondo tipo, cioè del tipo $a^x > b$ con $a > 1$, riconducendo le disequazioni con base $0 < a < 1$ a disequazioni con base maggiore di 1.

Esempi

5 La disequazione: $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+9} > 4$

si può trasformare nell'altra: $2^{-x-9} > 4$

e, poiché $4 = 2^2$, possiamo ancora scrivere: $2^{-x-9} > 2^2$

Sarà quindi: $-x-9 > 2$

ossia: $x \in \left]-\infty; -11\right[$

Altri esempi:

1 $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 1 \quad 3^{-x} < 1 \quad 3^{-x} < 3^0 \quad -x < 0 \quad x > 0$

0

2 $\left(\sqrt{5}\right)^{-x-3x^2} \geq -3$ sempre verificata $\forall x \in \mathbb{R}$

3 $2^x < -3$ mai verificata

4 $1 - \left(\frac{1}{13}\right)^{2+3x} \geq 0 \quad -\left(\frac{1}{13}\right)^{2+3x} \geq -1 \quad -13^{-(2+3x)} \geq -1 \quad 13^{-(2+3x)} \leq 1$

$13^{-(2+3x)} \leq 13^0 \quad -(2+3x) \leq 0 \quad -2-3x \leq 0 \quad -3x \leq +2$

$3x \geq -2 \quad x \geq -\frac{2}{3}$

$-\frac{2}{3}$

5

$5^{2x} - 2 \cdot 5^x - 3 \geq 0$ pongo $t = 5^x$

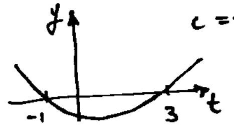
$t^2 - 2t - 3 \geq 0$ studio ricorrendo alla parabola

$y = t^2 - 2t - 3$

$a = 1$ concavità $\cup$

$b = -2$ int. asse t

$c = -3$ $t^2 - 2t - 3 = 0$ $t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+3}$ $\begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix}$



da cui $t \leq -1$ $t \geq 3$

ricambio variabile

$5^x \leq -1$ no soluzione; $5^x \geq 3$ $x \geq \log_5 3$

$\log_5 3$