Equazioni esponenziali

Un'equazione si dice **esponenziale** se l'incognita compare a esponente.
Per esempio, sono esponenziali le equazioni:

$$3^{x-2} = 5 \qquad 5^{x-3} = 3^{4x-2} \qquad 7^{\sqrt{x^2-1}} = 9$$

L'equazione:

$$a^x = b \qquad (\text{con } a > 0) \tag{6.1}$$

si dice **equazione esponenziale elementare**; risolverla significa determinare il valore da dare all'esponente x affinché la potenza a^x sia uguale a b.
Essendo $a > 0$, per ogni x reale risulta: $\quad a^x > 0$
quindi, affinché l'equazione [6.1] ammetta soluzione, occorre che anche b sia un numero positivo. Sussiste il seguente fondamentale teorema.

> **Teorema** Se a è positivo e diverso da 1 e b è positivo, esiste ed è unica la soluzione dell'equazione:
> $$a^x = b$$

La soluzione dell'equazione $a^x = b$ viene indicata con:

$$x = \log_a b$$

che si legge **logaritmo di b in base a**.

> **Definizione** Il logaritmo di un numero b in una base a è l'esponente da dare ad a per ottenere b.

In simboli:

$$a^{\log_a b} = b \tag{6.2}$$

Per esempio, l'equazione:

$$3^x = \frac{1}{9}$$

ha come soluzione $x = -2$ e quindi:

$$-2 = \log_3 \frac{1}{9}$$

Non sempre la soluzione dell'equazione esponenziale è direttamente calcolabile: per esempio, la soluzione dell'equazione:

$$3^x = 5$$

che si scrive:

$$x = \log_3 5$$

può calcolarsi solo con l'uso di strumenti quali le tavole dei logaritmi o una calcolatrice scientifica.

Esempi

1 *Risolviamo l'equazione:*

$$2^{x-1} = \frac{1}{4}$$

Poiché $\frac{1}{4} = 2^{-2}$, l'equazione si può scrivere nella forma:

$$2^{x-1} = 2^{-2}$$

da cui, poiché le basi sono uguali, si deduce che devono essere uguali gli esponenti:

$$x - 1 = -2$$

Quindi la soluzione è data da $x = -1$.

2 *Risolviamo l'equazione:*

$$3^{x^2-x} = 9^{x+2}$$

Poiché $9 = 3^2$, si può scrivere il secondo membro nella forma:

$$3^{\overset{x^2-x}{\cancel{2(x+2)}}} = 3^{2x+4}$$

Uguagliando gli esponenti dei due membri, si ottiene:

$$x^2 - x = 2x + 4 \qquad \text{cioè} \qquad x^2 - 3x - 4 = 0$$

equazione che ammette le soluzioni $x_1 = -1$ e $x_2 = 4$.

3 *Risolviamo l'equazione:*

$$3^{x-1} = 9 \times 4^{x-3}$$

Si ha:

$$\frac{3^{x-1}}{9} = 4^{x-3}$$

e, tenuto conto che $9 = 3^2$, si può scrivere:

$$3^{x-3} = 4^{x-3} \qquad \text{ossia} \qquad \left(\frac{3}{4}\right)^{x-3} = 1$$

da cui:

$$x - 3 = 0$$

Quindi la soluzione è $x = 3$.

Gli esempi 1, 2 e 3 suggeriscono uno stesso metodo di risoluzione: trasformare il primo e il secondo membro in potenze della stessa base e quindi uguagliare gli esponenti.

4 *Risolviamo l'equazione:*

$$2^{2x} - 9 \times 2^x + 20 = 0$$

Posto $2^x = t$, con $t > 0$, essendo $2^{2x} = t^2$, l'equazione diventa:

$$t^2 - 9t + 20 = 0$$

le cui soluzioni sono:

$$t_1 = 4 \qquad \text{e} \qquad t_2 = 5$$

Si ottiene allora:

$$2^x = 4 \qquad \text{da cui} \qquad x_1 = 2$$
$$2^x = 5 \qquad \text{da cui} \qquad x_2 = \log_2 5$$