La curva esponenziale

Sia a un numero positivo e diverso da 1. Tracciamo nel piano cartesiano il grafico della funzione esponenziale la cui equazione è:

$$y = a^x$$

riportando sull'asse delle ascisse i valori dell'esponente x e sull'asse delle ordinate i corrispondenti valori di a^x. Il grafico sarà costituito dall'insieme dei punti di coordinate

$$(x; a^x)$$

Possiamo distinguere due casi:

1) $0 < a < 1$
2) $a > 1$

$\boxed{0 < a < 1}$

Per fissare le idee, sia $a = \frac{1}{2}$; disegniamo perciò il grafico della curva di equazione:

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Per fare ciò, compiliamo una tabella, dando all'esponente x alcuni semplici valori e determinando i corrispondenti valori di $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Riportiamo poi nel piano cartesiano xOy i punti di coordinate $(-4;16)$, $(-3;8)$, ... Il grafico della curva $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ha l'andamento rappresentato in figura 6.1.

x	$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$
-4	16
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$
4	$\frac{1}{16}$

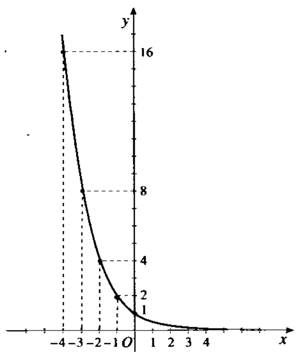

Fig. 6.1

Osserviamo che tale grafico è contenuto nel semipiano $y > 0$, poiché:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > 0 \qquad (\forall x \in \mathbb{R})$$

Inoltre, al crescere dell'esponente x, i valori corrispondenti di $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ decrescono, avvicinandosi al valore zero. Esprimiamo questo fatto dicendo che la funzione $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ è **decrescente** e tende a zero.

Per esponenti x negativi: -10, -32, ..., i valori di $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ diventano sempre più grandi:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-10} = 2^{10}, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-32} = 2^{32}, \quad \dots$$

Il grafico della curva generica:

$$y = a^x \qquad (\text{con } 0 < a < 1)$$

ha un andamento analogo a quello della curva $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ della figura 6.1.

Consigliamo allo studente di tracciare per esercizio i grafici di alcune funzioni, per esempio di $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ e $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$, aiutandosi con una modesta calcolatrice e disegnandoli sullo stesso piano cartesiano su cui avrà riprodotto la curva della figura 6.1, in modo da riconoscere le differenze tra le tre funzioni in corrispondenza di un medesimo valore dell'ascissa.

$\boxed{a > 1}$

Per fissare le idee, sia $a = 2$; disegniamo perciò il grafico della curva:

$$y = 2^x$$

costruendo una tabella analogamente a quanto si è fatto nel caso precedente e riportando i punti $\left(-4; \frac{1}{16}\right)$, $\left(-3; \frac{1}{8}\right)$, ... sul piano cartesiano xOy.

Il grafico della curva $y = 2^x$ ha l'andamento rappresentato in figura 6.2.

x	$y = 2^x$
-4	$\frac{1}{16}$
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16

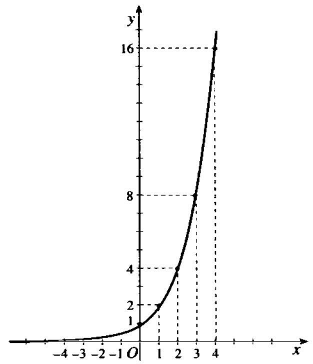

Fig. 6.2

Osserviamo che tale grafico è posto nel semipiano delle ordinate positive, poiché:

$$2^x > 0 \qquad (\forall x \in \mathbb{R})$$

Inoltre, al crescere dell'esponente x, i valori corrispondenti di 2^x crescono; questo fatto si esprime dicendo che la funzione $y = 2^x$ è **crescente**. Per esponenti x negativi: -10, -20, ... i corrispondenti valori di 2^x decrescono, avvicinandosi al valore zero:

$$2^{-10} = \frac{1}{2^{10}}, \quad 2^{-20} = \frac{1}{2^{20}}, \quad \dots$$

Il grafico della curva generica:

$$y = a^x \qquad (\text{con } a > 1)$$

ha un andamento analogo a quello della curva $y = 2^x$ rappresentato nella figura 6.2.
Lasciamo allo studente il compito di tracciare, sempre sullo stesso piano su cui avrà riprodotto la curva della figura 6.2, i grafici di altre funzioni, per esempio di:

$$y = 3^x, \quad y = 4^x, \quad y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$$

Osservazione 1

Dalla figura 6.3 si può osservare che i grafici delle curve:

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad \text{e} \quad y = 2^x$$

sono l'uno simmetrico dell'altro rispetto all'asse y: infatti poiché si può scrivere:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$$

una curva si ottiene dall'altra cambiando x in $-x$, applicando quindi una simmetria rispetto all'asse y.

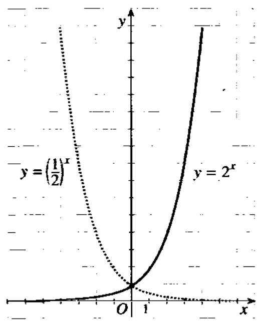

Fig. 6.3

Aggiungiamo, a titolo informativo, la tabella relativa alle tre funzioni:

$$y = x^2 \qquad y = 2^x \qquad y = 3^x$$

x	x^2	2^x	3^x
10	100	1024	59 049
20	400	$1{,}05 \times 10^6$	$3{,}48 \times 10^9$
64	4096	$1{,}84 \times 10^{19}$	$3{,}43 \times 10^{30}$

I valori di x, pur essendo pochi, sono già sufficienti perché si possa apprezzare la notevole differenza che passa tra la prima funzione e le altre.
In particolare, osservando la terza riga, possiamo fare un confronto tra i valori assunti dalle due funzioni $y = 2^x$ e $y = 3^x$ per $x = 64$ e ricordare la favola del giocatore di scacchi che pretese in premio 2 chicchi di grano sulla prima casella, 4 sulla seconda e così via, sempre raddoppiando il numero dei chicchi, fino alla sessantaquattresima. Il premio, assai grande ($1{,}84 \times 10^{19}$ chicchi), sarebbe però stato ancora modesto rispetto a quello derivato da una richiesta di tre chicchi sulla prima casella, nove sulla seconda, e così via, sempre triplicando, fino alla sessantaquattresima casella della scacchiera!

LA CURVA $y=e^x$

Rientra nel secondo caso ($a > 1$) la curva esponenziale:

$$y = e^x$$

essendo "e" un numero irrazionale definito come il valore a cui tendono, al crescere di n, i termini della successione:

$$1, \quad \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \quad \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, \quad \ldots, \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad \ldots$$

Il valore di "e", detta *costante di Nepero*, approssimato alla settima cifra decimale, è:

$$2{,}7182818$$

Essendo $2 < e < 3$, il grafico della curva $y = e^x$ è compreso fra quello della $y = 2^x$ e quello della $y = 3^x$.
Costruita la solita tabella, riportiamo i punti $(-3; e^{-3})$, $(-2; e^{-2})$, ... sul piano cartesiano, ottenendo il grafico rappresentato in figura 6.4.

x	$y = e^x$
−3	0,049
−2	0,135
−1	0,367
0	1
1	2,718
2	7,389
3	20,085
4	54,598

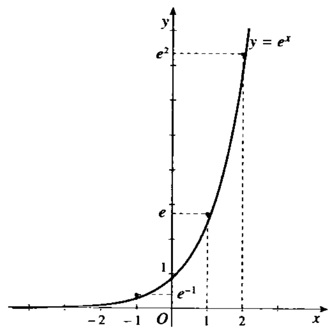

Fig. 6.4

Riassumiamo quindi le proprietà generali delle curve esponenziali:

1) TUTTE tagliano l'asse y nel punto di coordinate (0;1)
2) TUTTE danno luogo a valori y sempre positivi. Questo si può vedere anche dal loro grafico, il quale si sviluppa sempre nel semipiano positivo delle y e mai in quello negativo (le curve sono sempre al di sopra dell'asse x)
3) QUELLE CON BASE "a" maggiore di 1 sono strettamente crescenti. In particolare "a sinistra" tendono ad essere asintotiche verso l'asse X, "a destra" crescono più rapidamente di qualsiasi funzione potenza.
4) QUELLE CON BASE "a" compresa tra 0 e 1 sono strettamente decrescenti. In particolare "a sinistra" crescono più rapidamente di qualsiasi funzione potenza, "a destra" tendono ad essere asintotiche verso l'asse X.