

## Studio analitico e numerico delle Reti Ottime.

### 3.1 Sommario.

E' stato analizzato il modello OCN per le reti fluviali sia analiticamente sia numericamente. In un modello a reticolo (*lattice model*) è stato introdotto un funzionale descrivente la dissipazione di energia ed è stato minimizzato per trovare la configurazione ottimale della rete.

Il carattere frattale delle reti fluviali si riflette nel comportamento a legge di potenza di varie quantità caratteristiche della morfologia del bacino. Nell'ipotesi di leggi di scala dimensionalmente finite (*finite size scaling*) gli esponenti descrittivi il comportamento a legge di potenza sono stati calcolati esattamente [Colaïori et. al., 1997] e mostrano aderenza al comportamento "di campo medio", ad eccezione di due valori limitanti del parametro caratterizzante la dissipazione di energia per il quale il sistema appartiene a differenti classi di universalità.

Due versioni modificate del modello OCN, incorporanti un "disordine smorzato" (*quenched disorder*) sono state considerate:

- il primo simulante le eterogeneità nelle proprietà locali del suolo;
- il secondo considerante gli effetti di pioggia non uniforme nel bacino.

Nella regione di comportamento a campo medio il modello si è dimostrato robusto ad entrambe le fonti di perturbazione.

Nei due casi limitanti la precipitazione random è ancora irrilevante quando l'eterogeneità nelle proprietà dei suoli porta a nuove classi di universalità.

Vengono ora riportati i risultati di analisi numeriche sul modello che confermano e complementano le analisi teoriche del minimo globale. Le statistiche sul minimo locale sembrano rispecchiare fortemente i dati osservazionali dei fiumi reali.

### 3.2 Definizione e derivazione delle leggi di scala.

Un bacino fluviale è descritto come un campo scalare delle elevazioni. Le direzioni di drenaggio sono identificate dalla discesa più ripida (*steepest descent*), ossia dal maggiore locale decremento del campo di elevazione. L'estrazione dei bacini fluviali viene fatta attraverso le *Digital Terrain Maps* (*DTMs*) con tecniche che permettono di valutare la rete di drenaggio analizzando ogni *pixel* (es. valutandone la curvatura) del campo di elevazione in analisi; un *DTM*, ma anche una *Digital Elevation Map* (*DEM*), consiste infatti in una matrice delle altitudini di porzioni di territorio, tipicamente quadrate di lato variabile da 10 a 30 metri, rilevate da satellite geostazionario. Ogni porzione è quindi rappresentata da un *pixel* al cui baricentro viene attribuita la quota media del territorio che sottende.

[*Bras et. al.*, 2005; *Rinaldo et. al.*, 1999a-b-c; *Helmlinger et. al.*, 1993]

Le direzioni di drenaggio vengono individuate con due possibili metodi, il primo detto "delle otto direzioni di drenaggio", il secondo più recente "delle infinite direzioni di drenaggio" (vedi <http://hydrology.neng.usu.edu/taudem/>).

□

Le reti idrografiche si assomigliano in senso statistico (es. le leggi di Horton manifestano questa similarità) però senza un riferimento esterno è impossibile distinguere le dimensioni reali di ciò che si sta osservando.

Poichè i bacini fluviali sono autosimili sino alla scala dei versanti tutte le misure che riguardano le reti di canali, e in particolare le pendenze e le aree contribuenti, andrebbero riferite a tale scala fondamentale.

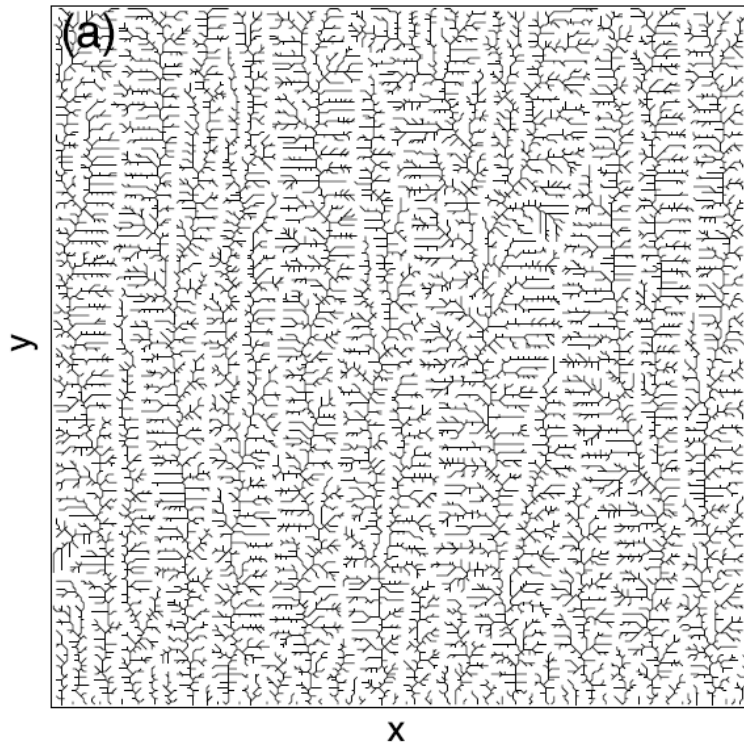
Il *coarse graining* (indicato spesso con l'acronimo *CG*) rappresenta l'insieme delle operazioni, descrivibili anche analiticamente in modo rigoroso, che si compiono quando si passa da una scala di osservazione più dettagliata a una più grossolana. Si introducono le seguenti grandezze,  $N = \frac{A}{l^2}$ ,  $a = l^2$ , e  $A_i = N_i a$ , dove  $N$  è il numero totale di *pixels* che compongono il bacino  $\mathcal{B}$ ,  $A = L \cdot L$  è l'area totale del

bacino,  $a$  è l'area relativa a ciascun pixel di lunghezza unitaria  $l$ , e  $A_i$  è l'area cumulata relativa al pixel  $i$ -esimo. Tutte queste quantità sono pensate riferite alla scala fondamentale  $\Lambda$ . Il *coarse graining* consiste nel creare nuovi pixels raggruppando quelli originari e mantenendo l'area del bacino  $A$  inalterata; i nuovi pixel generati hanno lato pari a  $\lambda l$  dove  $\lambda$  è l'*indice di coarse graining* e rappresenta il numero di pixels raggruppati per unità di lunghezza.

Il nuovo "regolo" di base delle aree è quindi  $a^{(\lambda)} = \lambda^2 a = \lambda^2 l^2$  e il nuovo numero totale di pixels è  $N^{(\lambda)} = N/(\lambda^2 l^2)$ .

Il valore medio di elevazione del nuovo pixel di lato  $\lambda l$ , è calcolato come l'elevazione media dei  $\lambda^2$  pixels costituenti di lato  $l$ , e la nuova rete di drenaggio è ricavata secondo le linee di massima pendenza dal nuovo campo di elevazioni aggregato.

La *densità di drenaggio* Hortoniana, definita come  $\mathcal{D} = \frac{L_T}{A}$  con  $L_T$  la lunghezza totale della rete drenante ed  $A$  l'area totale del bacino, effettuando il CG diminuisce.



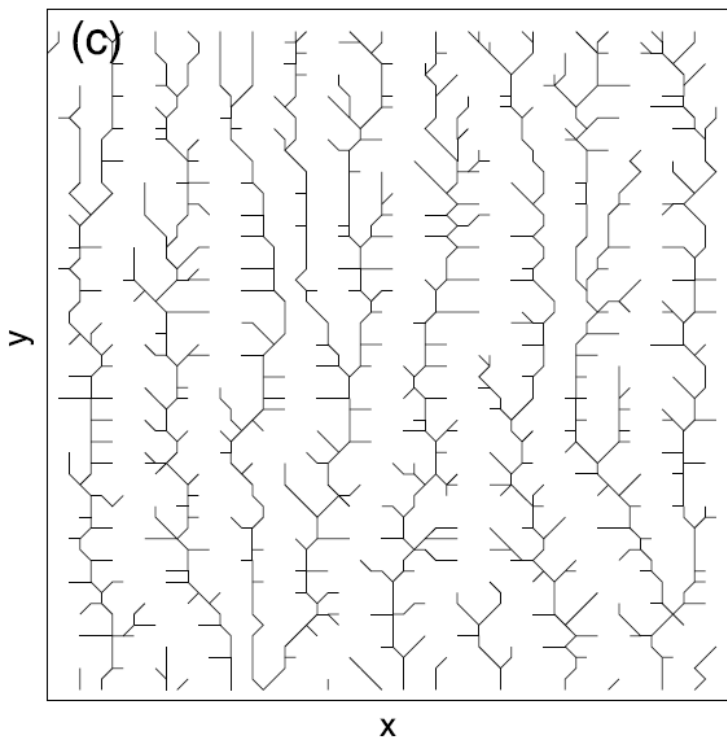
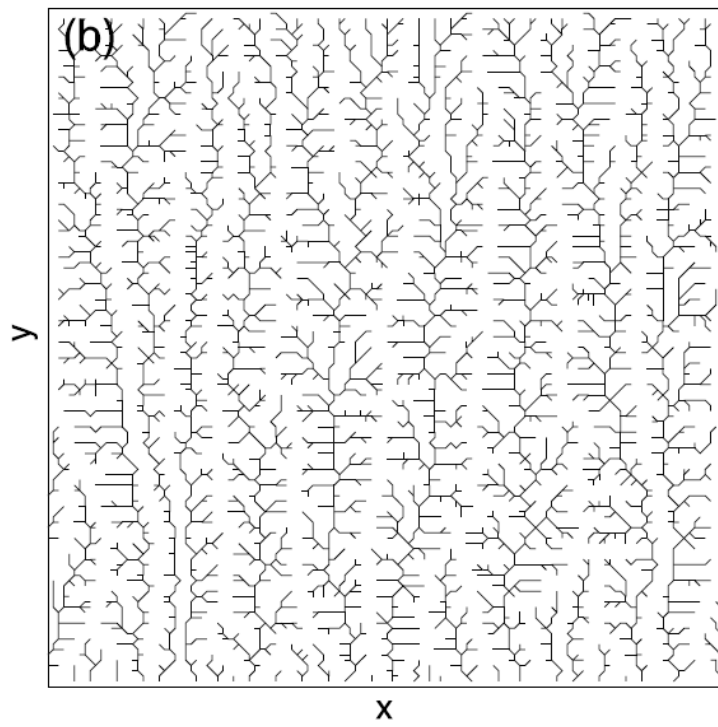


Figura 3.1 [Passalacqua et al., 2006]: (a), (b), (c), estrazione di reti con

$A = L \times L = 256 \times 256$  da campi di elevazione in stato stazionario, diversi per *risoluzione di griglia*, ed ottenuti dall'equazione semplificata di "landscape evolution" del modello KPZ con crescita costante; al diminuire della risoluzione (per  $L = cost$ ) l'indice di coarse graining  $\lambda$  aumenta, pertanto diminuisce la precisione nella soluzione numerica delle simulazioni idro-geomorfologiche; la rete (a) ha risoluzione  $256 \times 256$  ossia  $\lambda = 1$ , la rete (b) ha risoluzione  $128 \times 128$  quindi  $\lambda = 2$ , la rete (c) ha risoluzione  $64 \times 64$  quindi  $\lambda = 4$ .

L'operazione di *coarse graining* inoltre preserva l'elevazione media se viene eseguito il *pits eating* (o *pits filling*), ossia la correzione della quota dei pixel circondati da altri a maggiore elevazione, che altrimenti comporterebbe una individuazione delle direzioni di drenaggio errata.

La trasformazione dovuta al *coarse graining* dello stato di un dato sistema è chiamata in fisica *rinormalizzazione*, e l'obiettivo del così chiamato *gruppo di rinormalizzazione*, è studiare quantitativamente il cambiamento che una quantità fisica manifesta, quando le osservazioni sono compiute a differenti gradi di *coarse graining*.

I frattali e le procedure di rinormalizzazione sono intimamente connessi; infatti un frattale può essere definito come un oggetto che è invariante alla trasformazione di un gruppo di rinormalizzazione [Takayasu, 1990].

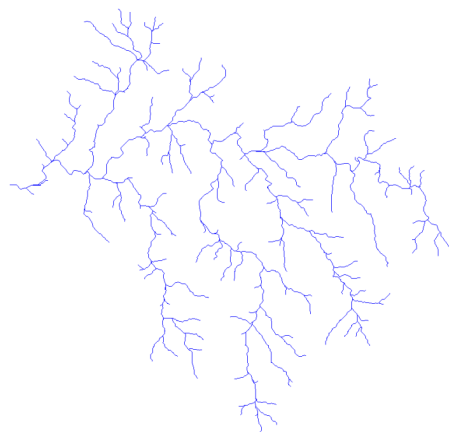
Il metodo del gruppo di rinormalizzazione usa quindi esplicitamente le proprietà di invarianza di scala, ed è risultato in passato la chiave di molti fondamentali sviluppi in fisica, geofisica compresa, ad esempio si veda [Turcotte, 1992] nello studio del flusso nei mezzi porosi.

Non bisogna ricorrere nell'errore di confondere il *coarse graining* con l'estrazione automatica di un bacino fissando valori di soglia sull'area cumulata via via crescenti. Le due operazioni sono nettamente differenti, sia a livello teorico sia a livello pratico.

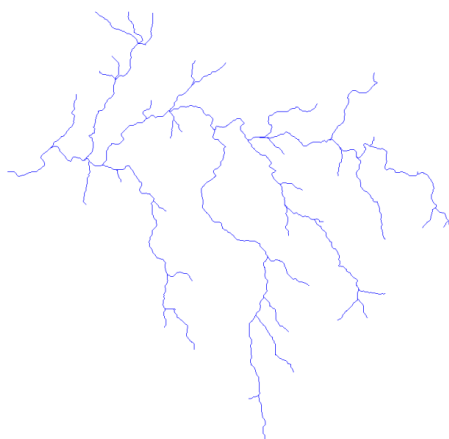
Stabilire una soglia  $A^*$  sull'area cumulata (è uno dei possibili metodi di estrazione della rete) significa infatti considerare come pixel-canale esclusivamente quei pixels con  $A_i > A^*$ , non vengono quindi creati nuovi pixels e ricalcolata la rete su di essi. In sostanza spostare la soglia è equivalente ad ingrandire o rimpicciolire un'immagine, quindi vedere più o meno dettagli.

Si ricordano altri due possibili tecniche di estrazione delle reti idrografiche, quali il metodo sulla pendenza e sull'area cumulata ed il metodo della soglia sull'area cumulata delle celle concave, entrambi implementati nel programma TauDEM [Tarboton et. al., <http://hydrology.neng.usu.edu/taudem/>].

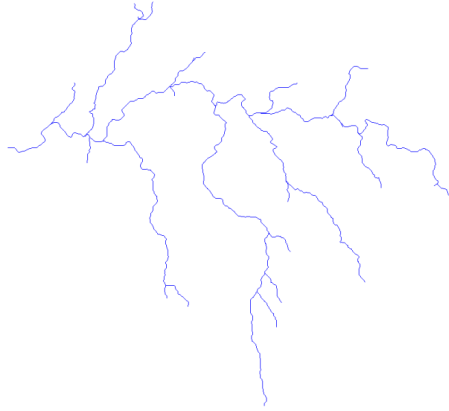
Il metodo della soglia sull'area cumulata e quello della soglia sull'area cumulata delle celle concave, forniscono sostanzialmente lo stesso risultato, mentre il metodo della pendenza e dell'area cumulata differisce apprezzabilmente dai primi a parità di numero di sottobacini estratti.



(a)

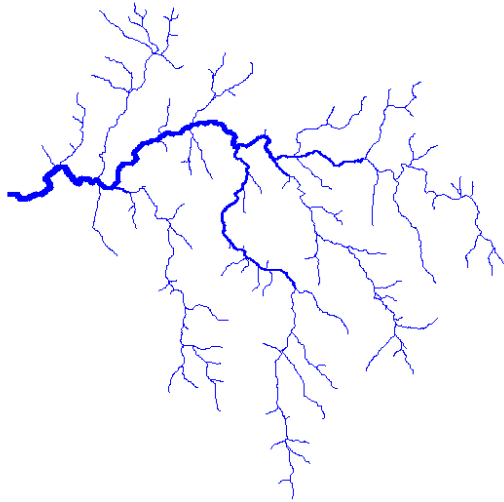


(b)

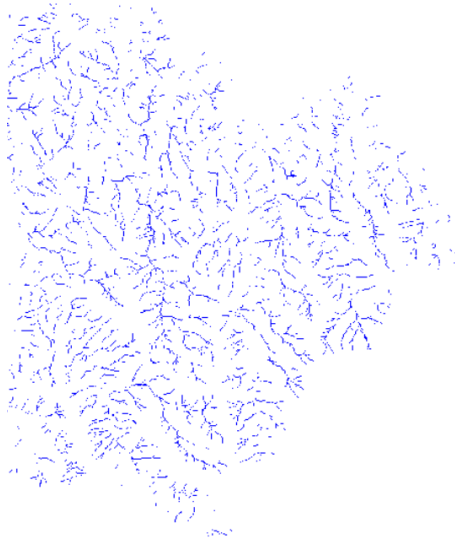


(c)

Figura 3.2: (a) (b) (c) estrazione bacino del Taloro con il metodo della soglia sull'area cumulata (*Contributing Area Threshold Method*) utilizzando il programma TauDEM [Tarboton, 2005] per  $A^* = 700 \Rightarrow 306$  sottobacini,  $A^* = 2500 \Rightarrow 80$  sottobacini, e  $A^* = 5000 \Rightarrow 43$  sottobacini rispettivamente; all'aumentare di  $A_{lim}$  il numero di sottobacini diminuisce perchè si riduce il numero di pixel-canale con  $A_i > A^*$ .



(a)



(b)

Figura 3.3: (a) bacino del fiume Taloro estratto con "extract-ocn" della Libreria FluidTurtle, in seguito implementata nella HortonMachine di JGrass [Rigon *et al.* 2002, 2006a, 2006b; Convertino *et al.*, 2006] con soglia  $A^* = 1000$ , nel quale la larghezza dei canali è posta proporzionale a  $\sqrt{A}$ ; si nota la similarità alla rete estratta di Figura 3.2 (a), la quale è relativa ad un valore di soglia  $A^* = 700$ , quindi presenta più pixel canalizzati; (b) estrazione rete bacino del Taloro con  $A^* = 100 \Rightarrow$ rete piumata; l'assunzione di valori di soglia troppo bassi per tutti i possibili metodi di estrazione porta al piumaggio della rete con la creazione di *pixel-canale* inesistenti, quindi una struttura di drenaggio completamente inesatta, si preferisce pertanto una rete semplificata ma aderente alla realtà.

┘

La presenza dei laghi nel modello OCNs non è stata considerata, quindi l'acqua passa per forza da un pixel all'altro, condizione equivalente ad avere tutti i laghi saturi.

*Una rete fluviale può essere rappresentata come un albero orientato distribuito (oriented spanning tree) in un reticolo bidimensionale di dimensione e forma arbitraria, nel quale i collegamenti orientati, fuoriuscenti dai nodi, corrispondono alle direzioni di drenaggio.*



Si considera un albero distribuito con outlet in un angolo su di un reticolo di dimensione  $L \times L$ .

Il sito  $i$  è a monte del sito  $j$  se esiste un percorso orientato da  $i$  a  $j$ . Associato ad ogni sito c'è un'iniezione locale di massa  $r_i$  corrispondente alla media annuale di pioggia al sito  $i$ .

Il flusso  $A_i$ , a cui ci si riferisce come area cumulata, può essere definito come la somma delle iniezioni su tutti i punti a monte del sito  $i$  ed includendolo. La variabile  $A_i$  è quindi espressa come:

$$A_i = \sum_j w_{i,j} A_j + r_i, \quad (3.1)$$

dove  $w_{i,j}$  è 1 se  $j$  è a monte rispetto il sito  $i$  e il più vicino ad esso, altrimenti è 0. L'iniezione locale è comunemente assunta essere omogenea e identicamente uguale ad 1.

La distanza *upstream* relativa a un sito è definita come la lunghezza di un corso d'acqua ottenuta partendo dal sito scelto e muovendosi ripetutamente nella direzione a monte verso il più vicino sito con area cumulata  $A_i$  maggiore (l'outlet è escluso in quanto è un sito a valle), fino a quando viene raggiunta una sorgente, ad esempio un nodo senza collegamenti [vedi Figura x.y (b)]. Se si incontrano due o più nodi con area cumulata uguale, uno è scelto a caso.

Per un dato albero si può considerare la distribuzione di probabilità delle seguenti quantità: in un reticolo di dimensione lineare  $L$  data chiamiamo  $p(a, L)$  la densità di probabilità delle aree cumulate  $a$ , e  $\pi(l, L)$  la densità di probabilità delle distanze *upstream*  $l$ .

Queste rappresentano la frazione di siti con area cumulata  $a$  e lunghezza principale  $l$ , rispettivamente.

Si considerano anche le distribuzioni di probabilità cumulata di superamento,  $P(a, L)$  la probabilità di trovare un'area cumulata maggiore di  $a$ ,  $\Pi(l, L)$  la probabilità di avere un sito con lunghezza principale maggiore di  $l$ .

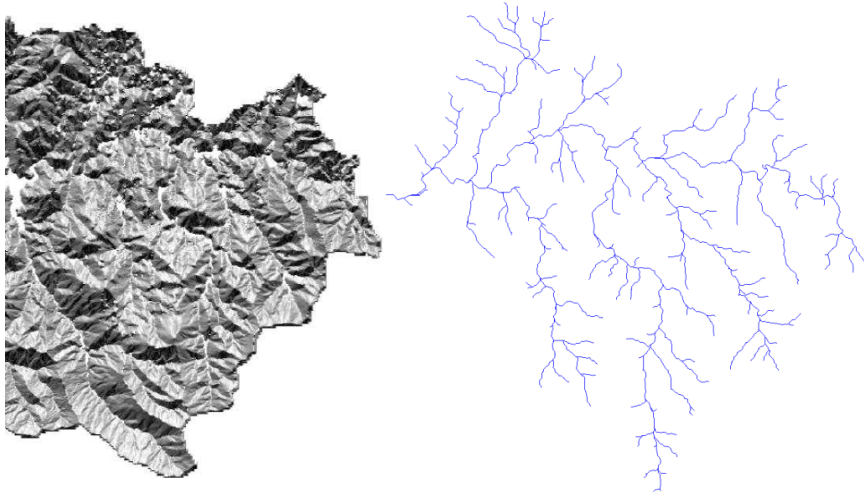
Entrambe queste distribuzioni di probabilità, qui definite nel semplice caso di un modello a reticolo, furono originariamente introdotte per descrivere i fiumi reali, e sperimentalmente è stato trovato che scalano come leggi a potenza portando alla congettura di *finite-size scaling*, ossia leggi di potenza valide per sistemi a taglia fine (vedi Allegato 1).

Le relazioni analitiche sono le seguenti:

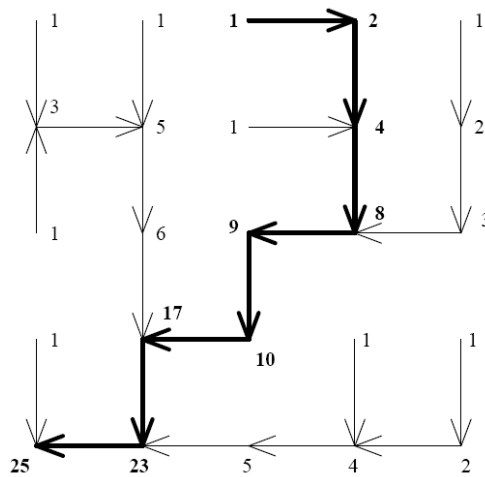
$$p(a, L) = a^{-\tau} f\left(\frac{a}{a_C}\right), \quad (3.2)$$

$$\pi(l, L) = l^{-\psi} g\left(\frac{l}{l_C}\right), \quad (3.3)$$

dove  $f(x)$  e  $g(x)$  sono *funzioni di scala* o *funzioni di omogeneità* che tengono conto degli effetti di scala finita, mentre  $a_C$  e  $l_C$  sono l'area e la lunghezza caratteristica del bacino, rispettivamente.



(a)



(b)

Figura 3.4: (a) bacino del fiume Taloro chiuso a Gavoi, Sardegna centro orientale, Italia, estratto da un DTM (pixel  $20 \cdot 20m^2$ ) tramite TauDEM JGrass con il metodo sull'area cumulata,  $A_{lim} = 700 \Rightarrow 306$  sottobacini; (b) modello di bacino a reticolo (*lattice*) di dimensione  $L = 5$ , in cui in ogni sito  $i$  il valore dell'area cumulata  $A_i$  è visualizzato, e la linea più scura rappresenta il corso d'acqua principale.

Le funzioni  $f(x)$  e  $g(x)$  postulate hanno le seguenti proprietà: quando  $x \rightarrow \infty$  vanno a zero velocemente a sufficienza per assicurare la normalizzazione, quando  $x \rightarrow 0$  tendono a una costante in modo da fornire un semplice comportamento a legge di potenza (*scale-free behaviour*) delle distribuzioni di probabilità nel limite di un'ampia dimensione.

Questo implica anche che  $\tau$  e  $\psi$  siano maggiori di uno.

L'area e la lunghezza caratteristica si postula che scalino come

$$a_C \sim L^\varphi, \quad (3.4)$$

$$l_C \sim L^{d_i} \quad (3.5)$$

dove con  $L$  intendiamo per comodità  $L_{||}$  da qui in avanti.

Nei bacini reali le anisotropie sono sempre presenti dovute alla pendenza media non nulla del territorio e alla presenza di gravità.

La relazione tra le due lunghezze caratteristiche del bacino, longitudinale e trasversale, misurate lungo i due principali assi di inerzia, è

$$L_\perp = L^H, \quad (3.6)$$

da cui l'area del bacino scala come  $A = LL_\perp = L^{1+H}$ , quindi  $a_C \sim L^{1+H} \rightarrow \varphi = 1 + H$ ;  $H$  è noto come l'esponente di *Hurst* e soddisfa alla diseguaglianza  $0 \leq H \leq 1$ .

In [Colaïori et al., 1997] è stato considerato un bacino quadrato, ma questo non fa venire meno le relazioni sopra riportate dato che esse valgono anche per i sottobacini.

L'esponente  $d_i$  caratterizzante la lunghezza caratteristica  $l_{Cupstream}$ , può essere assunto come la *dimensione frattale* di un rivolo del bacino (per reti fluviali frattali  $\Leftrightarrow$  autosimilari, ogni torrente che diparte da un sito e arriva all'outlet è un frattale con la stessa dimensione frattale), ed è tale che  $1 \leq$

$d_l \leq 1 + H$ . I confini del bacino corrispondono a linee dritte e coprono ogni spazio.

Per *bacini auto-affini* così come sono la maggior parte di quelli reali (si parla alle volte equivalentemente di *bacini "elongati"*, vedi []) ci si aspetta  $d_l = 1$  e  $H < 1$ , mentre, quando  $H = 1$  e  $d_l > 1$  si è nel caso di *bacini auto-similari*.

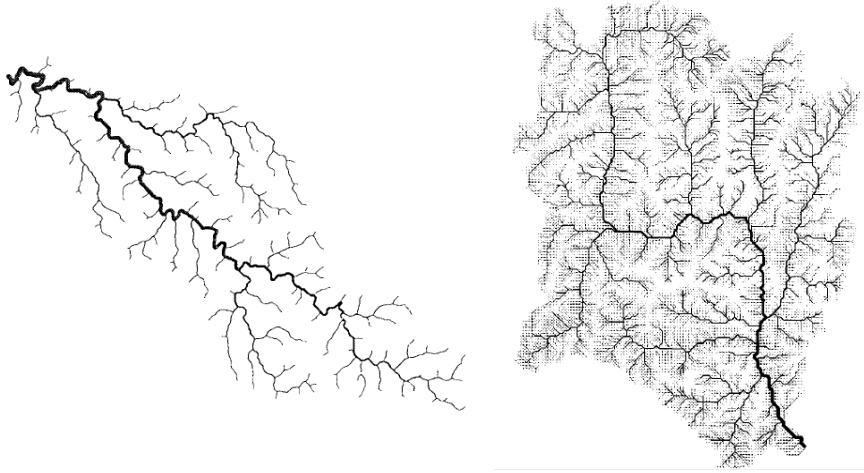


Figura 3.5: a *sx* il bacino *auto-affine* del fiume Johns, Kentucky, USA; a *dx* il bacino *auto-similare* del fiume Fella, Friuli V.G., Italia; citiamo inoltre il bacino *frattale* per eccellenza, quello di Peano, realizzato da un processo moltiplicativo binomiale che porta alla multifrattalità.

Le funzioni di probabilità cumulata di  $a$  e  $l$  sono analogamente scritte in forma di prodotto tra una legge di potenza e una legge di scala, ossia

$$P(a, L) = a^{1-\tau} F\left(\frac{a}{L^{1+H}}\right), \quad (3.7)$$

$$\Pi(l, L) = l^{1-\psi} G\left(\frac{l}{L^{d_l}}\right), \quad (3.8)$$

le quali seguono dall'equazione (2) e (3) con

$$F(x) = x^{\tau-1} \int_x^{+\infty} dy y^{-\tau} f(y), \quad (3.9)$$

$$G(x) = x^{\psi-1} \int_x^{+\infty} dy y^{-\psi} g(y), \quad (3.10)$$

dove le somme sulla variabile  $y$  sono state sostituite dagli integrali nel limite di  $L$  grande.

Dalle definizioni sopra riportate e le proprietà di  $f$ , segue semplicemente che

$$\langle a^n \rangle \sim L^{(1+H)(n-\tau+1)}, \quad (3.11)$$

per qualsiasi  $n > \tau - 1$ , mentre  $\langle a^n \rangle \sim \text{cost}$  se  $n < \tau - 1$ ; da notare che sia  $a$  sia  $l$  hanno un cutoff inferiore che è uno. L'equazione (11), valutata per  $n = 1$ , dà per l'area media,

$$\langle a \rangle \sim L^{(1+H)(2-\tau)}. \quad (3.12)$$

L'area media cumulata  $\langle a \rangle$  può essere facilmente dimostrato risultare uguale alla distanza da un sito arbitrario all'outlet, mediata su tutti i siti. In effetti nella somma su tutte le distanze *downstream* (da monte verso valle, ossia con i rivoli da ogni sito all'otlet), il numero di volte che ogni collegamento appare per unità di lunghezza, uguaglia esattamente l'area cumulata del sito associato. Quindi sommando su tutte le  $A_i$  è equivalente a sommare su tutte le lunghezze *downstream*, si può pertanto scrivere

$$\langle a \rangle = \langle l_{downstream} \rangle, \quad (3.13)$$

dove  $\langle l_{downstream} \rangle$  può essere valutato sostituendo nella somma che fornisce il momento primo, la distanza di ogni punto dall'outlet misurata lungo il canale, con la corrispondente distanza Euclidea  $d(x)$  alla potenza  $d_l$ .

$$\langle l_{downstream} \rangle = \frac{1}{L^2} \sum_x l_{downstream}(x) = \frac{1}{L^2} \sum_x d(x)^{d_l} \sim L^{d_l} \quad (3.14)$$

Questo fatto è generale e le argomentazioni usate non necessitano della conoscenza della distribuzione delle distanze downstream. Questa distribuzione può, tuttavia, essere esplicitamente derivata almeno nel caso delle *reti dirette*. Chiamiamo *dirette* quelle reti tali che, ogni collegamento orientato ha una proiezione positiva lungo la diagonale orientata verso l'outlet.

La ragione per introdurre questa classe di reti è che i bacini fluviali, spesso hanno un caratterizzazione a rete quasi-diretta, dovuta al fatto che essi si evolvono tipicamente su una porzione di territorio in pendenza che dà una direzione di flusso preferenziale. Inoltre le reti ad albero dirette sono molto più semplici da trattare analiticamente rispetto quelle non dirette.

Per tali "alberi" si consideri l'insieme delle  $2L$  diagonali, ortogonali a quella passante per l'outlet, i cui punti ad esse appartenenti hanno la stessa lunghezza downstream. Così il numero di punti  $\mathcal{N}_l$  a una data distanza  $l$  dall'outlet può essere semplicemente espressa come

$$\mathcal{N}_l = \begin{cases} l + 1, l = 1, \dots, L \\ 2L + 1 - l, l = L + 1, \dots, 2L. \end{cases} \quad (3.15)$$

La densità di probabilità per le lunghezze downstream è quindi una legge a potenza con esponente  $-1$ , e una funzione di scala di argomento  $l/L$ :

$$\pi_{downstream}(l, L) = l^{-1} f_{downstream}\left(\frac{l}{L}\right) \quad (3.16)$$

con

$$f_{downstream}(x) = \min(x^2, 2x - x^2) \text{ e } 0 \leq x \leq 2. \quad (3.17)$$

Il momento primo di tale distribuzione fornisce nuovamente l'equazione (3.14) con  $d_l = 1$ , il quale è il risultato atteso per la dimensione frattale di un albero diretto. Questo risultato assieme all'equazione (3.14), suggerisce che verso valle, la distribuzione delle lunghezze possa avere la seguente forma a legge di scala

$$\pi_{downstream}(l, L) = l^{-1} f_{downstream}\left(\frac{l}{L^{d_l}}\right) \quad (3.18)$$

per il caso generale.

Le equazioni (3.13) e (3.14) portano alla seguente espressione per l'area cumulata media

$$\langle a \rangle \sim L^{d_l}. \quad (3.19)$$

Dalle equazioni (12) e (19) si ha inoltre la relazione di scala

$$1 + H = \frac{d_l}{(2 - \tau)}. \quad (3.20)$$

Ricordiamo una ben conosciuta legge idrologica, la legge di Hack [*Hack*, 1957], che relaziona la lunghezza del più lungo canale  $l$  all'area drenata  $a$  del bacino, ossia

$$l \sim a^h. \quad (3.21)$$

Il valore accettato di  $h$  è  $h = 0.57 \pm 0.06$  [*Gray*, 1961, *Langbein*, 1967, *Muller*, 1973], la cui differenza dal valore Euclideo 0.5 porta alla prima supposizione della natura frattale dei fiumi [*Mandelbrot*, 1983].

Dalle equazioni (3.4) e (3.5) segue che

$$h = \frac{d_l}{1 + H}. \quad (3.22)$$

Assieme con  $\pi$  e  $p$  si può definire la probabilità condizionata  $\tilde{\pi}(l|a)$  di trovare il corso d'acqua principale (*mainstream*) di lunghezza  $l$ , in un bacino con area cumulata  $a$ . Il caso più semplice è quando l'equazione (21) rimane ancora valida e  $\tilde{\pi}(l|a)$  è una funzione molto "appuntita" di  $l$  rispetto ad  $a$ , per esempio se esiste un ben definito vincolo tra le lunghezze e le aree [*Maritan et al.*, 1996] come

$$\tilde{\pi}(l|a) = \delta(l - a^h), \quad (3.23)$$

o più genericamente [Rigon *et al.*, 1996]

$$\tilde{\pi}(l|a) = l^{-1} \tilde{g}\left(\frac{l}{a^h}\right). \quad (3.24)$$

Per le densità di probabilità  $\pi$ ,  $p$ , e  $\tilde{\pi}$ , la seguente equazione di consistenza deve tenere

$$\pi(l, L) = \int_1^{L^{(1+H)}} da \tilde{\pi}(l|a) p(a, L) \quad (3.25)$$

la quale fornisce, nel limite di  $L$  grande a sufficienza,

$$(\psi - 1)d_l = (\tau - 1)(1 + H) \quad (3.26)$$

relazionando li esponenti della distribuzione delle lunghezze e della distribuzione delle aree cumulate.

Le relazioni di scala (3.20) e (3.26) possono essere espresse in una forma più semplice, osservando che sia  $\tau$  sia  $\psi$  dipendono da  $d_l$  e  $H$  solo nella combinazione  $d_l/(1 + H) = h$ , dove  $h$  è il parametro che appare nella legge di Hack (3.21).

Quindi,

$$\tau = 2 - h, \quad (3.27)$$

e

$$\psi = \frac{1}{h}. \quad (3.28)$$

Gli esponenti caratterizzanti le distribuzioni delle aree cumulate e delle lunghezze *upstream* (da valle a monte), sono dunque relazionati dalla semplice espressione



$$\tau = 2 - \frac{1}{\psi}. \quad (3.29)$$

Per bacini auto-affini si ha

$$H < 1, \quad d_l = 1, \quad (3.30)$$

e tutti li esponenti possono essere espressi in termini dell'esponente di Hurst  $H$ , ottenendo

$$\tau = \frac{1 + 2H}{1 + H} \quad (3.31)$$

e

$$\psi = 1 + H, \quad (3.32)$$

mentre nel caso di bacini auto-simili si ha

$$H = 1, \quad d_l > 1, \quad (3.33)$$

ed esprimendo li esponenti in funzione della dimensione frattale dei rivoli  $d_l$ , si ha

$$\tau = 2 - \frac{d_l}{2}, \quad (3.34)$$

e

$$\psi = \frac{2}{d_l} \quad (3.35)$$

Da notare che in entrambi i casi si ha  $\tau \leq \frac{3}{2}$ , similmente è  $h \geq \frac{1}{2}$ . L'eguaglianza dei due casi invece si ha solo quando  $H = d_l = 1$ , la quale corrisponde alla situazione di campo medio.

In conclusione si riportano delle tabelle riassuntive, la prima con i risultati numerici ottenuti analizzando svariate OCNs e bacini reali, la seconda con un riepilogo delle relazioni tra gli esponenti di scala nel caso di *autoaffinità* e in quello di *autosimilarità*.

esponente	minimo assoluto	OCN	bacino reale	media nel bacino reale
$\beta$	0.50	0.43±0.02	0.41÷0.46	0.43
$H$	1.00	0.75±0.01	0.70÷1.00	0.75
$h$	0.50	0.57±0.02	0.52÷0.60	0.57
$\Phi_L$	1.00	1.10±0.05	1.02÷1.12	1.05
$\phi$	1.00	1.05±0.05	1.02÷1.10	1.05
$\xi$	1.00	0.80±0.05	0.65÷0.95	0.75

Tabella 3.1: tabella riassuntiva delle analisi delle precedenti ricerche [es. *Maritan et al.*, 1996]; si è riportata l'originaria notazione di alcuni esponenti, che alle volte capita di incontrare, nello specifico  $\Phi_L = d_l$ ,  $\phi = 1 + H = d_l/h$ , e  $\xi = \psi$

esponente	bacino autosimile	bacino autoaffine
$\tau$	$2 - d_l$	$(1 + 2H)/(1 + H)$
$\gamma$	$2/d_l$	$1 + H$
$h$	$d_l/2$	$1/(1 + H)$

Tabella 3.2: tabella riassuntiva degli esponenti di scala più significativi (attenzione che l'esponente  $\psi$  delle lunghezze upstream è indicato con  $\gamma$ , come alcune volte si trova nelle pubblicazioni, es. in [*Caldarelli*, 1996]); gli esponenti sono tutti in funzione di  $d_l$  nel caso dei bacini frattali, invece in funzione di  $H$  nel caso di bacini autoaffini.

Un recente modello a reticolo formulato [*Rodriguez-Iturbe et al.*, 1992 a-b, *Rinaldo et al.*, 1992], basato su un principio di minimizzazione sembra riprodurre piuttosto bene le caratteristiche principali delle reti fluviali.

Le giuste configurazioni, di cui si è già parlato e chiamate *Optimal Channel Networks* (OCNs), sono ottenute dalla minimizzazione di una energia dissipata, scritta come

$$E = \sum_i k_i \Delta z(i) Q_i \quad (3.36)$$

dove  $Q_i$  è il flusso (la portata media annua) nel collegamento uscente dal sito  $i$ ,  $\Delta z(i)$  è il salto di elevazione lungo la direzione di drenaggio, e  $k_i$  caratterizza le locali proprietà del terreno come l'erodibilità.

Quest'ultimo parametro sarà preso pari ad un nel caso di reti fluviali "omogenee".

Dato un campo di elevazioni, le direzioni di drenaggio sono usualmente identificate dalla "discesa più ripida", ossia dal maggiore gradiente  $\nabla z(i)$  verso valle del campo scalare  $z(i)$ .

Questo porta ad ottenere un'altra espressione per l'energia dissipata aggiungendo le seguenti ipotesi:

(i) nel caso di pioggia uniforme nello spazio e nel tempo, quindi con

$$Q_i \sim A_i, \quad (3.37)$$

(ii) le osservazioni sperimentali sui fiumi suggeriscono la relazione empirica tra la portata ed il salto di elevazione,

$$\Delta z(i) \sim Q_i^{\gamma-1} \quad (3.38)$$

con un valore numerico attorno a 0.5 per  $\gamma$ .

Così si ottiene, a parte la costante moltiplicativa, l'espressione alternativa all'equazione (3.36), la relazione

$$E = \sum_i k_i A_i^\gamma, \quad (3.39)$$

la quale è stata proposta da Rinaldo e da suoi collaboratori [Rodriguez-Iturbe et al., 1992 a-b, Rinaldo et al., 1992], e che verrà analizzata ulteriormente in seguito.

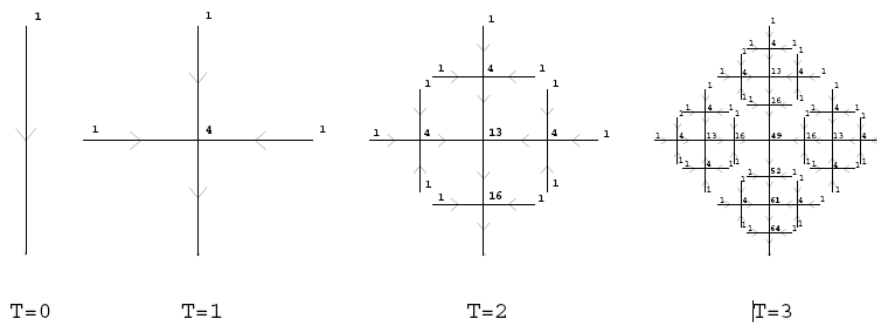
### 3.3 Un frattale esattamente autosimile: il bacino di Peano.

Il bacino di Peano è un frattale deterministico "a riempimento dei spazio" (*space-filling*) sul quale possono essere condotti calcoli esatti [Flammini et al., 1996].

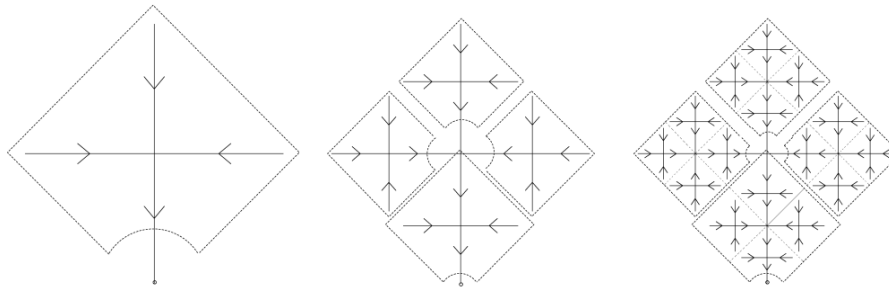
Ha una struttura ad albero distribuito non troppo dissimile da quella dei bacini reali. Le leggi di scala per tale bacino possono essere ottenute esattamente e l'energia dissipata (337) può essere stimata.

La stima dell'energia spesa nel bacino di Peano fornisce un limite superiore per l'energia minima dissipata da una OCN, e sarà un'ingrediente cruciale per i calcoli che seguiranno.

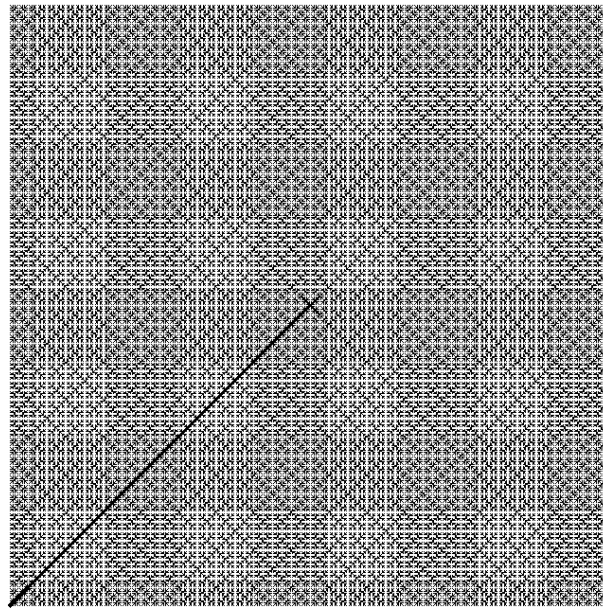
La regola per ottenere il bacino di Peano è molto semplice e non verrà trattata nel dettaglio, così come saranno solo riportati i risultati principali, senza dimostrazioni esplicitamente, delle distribuzioni delle aree e delle lunghezze.



(a)



(b)



(c)

Figura 3.6: (a) bacino di Peano a iterazioni  $T$  successive, ad ogni  $step T + 1$  vengono generati 4 nuovi collegamenti (*bonds*), due risultanti dalla suddivisione a metà del collegamento al passo  $T$  e preservando la sua orientazione, gli altri due aventi come comune estremo il punto a metà del bond allo step  $T$  e orientati verso di esso, il valore nodale è l'area cumulata  $A_i$  che nel caso di pioggia uniforme coincide con il flusso  $J_i$  ( $r_i = 1 \forall i$ ); (b) evidenza della auto-similarità del bacino di Peano, per ottenerlo al tempo  $T + 1$  tramite procedura ricorsiva, si prende il bacino al tempo  $T$ , si "taglia" l'outlet e si uniscono quattro copie del nuovo "sottobacino" elementare ottenuto dalla generazione dei nuovi rami, quindi in (b) se il bacino a destra ha *indice di coarse graining*  $\lambda = 1$ , il bacino centrale ha  $\lambda = 2$ , quello a sinistra  $\lambda = 4$ ; (c) bacino di Peano dopo 10 iterazioni del processo binomiale moltiplicativo, il quale porta all'epONENTE esatto  $\gamma = 1 + h = 1.5$ , con

l'esponente di Hack (vedi Capitolo 2 e [Rinaldo et. al., 2006]).

Dopo  $T$  iterazioni il frattale ha  $N_T = 4^T$  punti, escluso l'outlet, e può essere mappato su un reticolo quadrato di dimensione  $L = 2^T$ , con collegamenti che connettono il primo e il secondo punto vicino a formare un albero distribuito. La struttura auto-simile del bacino di Peano suggerisce una "naturale" procedura di decimazione, sono stati infatti ricavati gli esponenti  $\tau$  e  $\psi$  delle leggi di scala tramite il metodo del gruppo di rinormalizzazione [Colaïori et al., 1997].

La distribuzione di probabilità cumulata delle aree  $P(A_i > a_n, L = 2^T)$ , assume una espressione molto semplice per  $a_n$  di forma pari a  $4^t$  (si può facilmente controllare dall'espansione binaria di  $a_n$ , rappresentante i distinti valori di  $A_i$  che vengono generati iterando la costruzione del bacino di Peano, che  $a_{2^t-1} = 4^t$ ), e risulta nello specifico

$$P(A_i > a = 4^t, L = 2^T) = a^{1-\tau} F\left(\frac{a}{L^{1+H}}\right) \quad (3.40)$$

avendo la forma (3.7) con

$$\tau = 3/2, \quad H = 1, \quad (3.41)$$

e

$$F(x) = \frac{1}{3}(1-x) \text{ per } 0 < x < 1, \quad (3.42)$$

e  $F(x) = 0$  quando  $x > 1$ .

Similmente scegliendo  $l$  di forma  $l = 2^t$  e osservando che al passo  $T$  i siti con lunghezza upstream maggiore o uguale a  $2^t$  sono quelli in cui l'area cumulata supera il valore  $4^t$ , si trova che

$$\Pi(l \geq 2^t, L = 2^T) = l^{1-\psi} G\left(\frac{l}{L^d}\right) \quad (3.43)$$

la quale è della forma (8) con

$$\psi = 2, d_l = 1, (3.44)$$

e

$$G(x) = \frac{1}{3}(1 - x^2). (3.45)$$

Se lo sguardo e la sensibilità comune non fossero sufficienti, sono disponibili dimostrazioni esatte per il bacino di Peano [Colaïori *et al.*, 1997, Marani *et al.*, 1991] nel quale le grandezze topologiche incontrano perfettamente quelle dei bacini reali e delle OCNs, ma non soddisfa i vincoli stringenti di aggregazione ed elongazione.

### 3.4 Risultati analitici.

#### 3.4.1 Il caso omogeneo: omogeneità dei suoli e pioggia uniforme.

Si è proceduto alla analisi delle caratteristiche del minimo globale del funzionale  $E$  per  $\gamma$  variabile nell'intervallo  $[0, 1]$  [Colaïori *et al.*, 1997].

Si sono considerati dapprima i casi limitanti per  $\gamma = 0$  e  $1$ .

Se si chiamano  $l_i$  le lunghezze pesate dei canali che connettono il sito  $i$  all'outlet, calcolate assegnando a ogni collegamento il parametro  $k_i$ , è chiaro dimostrare che

$$\sum_i k_i A_i = \sum_i l_i. (3.46)$$

Ricordiamo la premessa fatta alla relazione (3.13), in effetti denotando con  $\mathfrak{D}(i)[\mathfrak{U}(i)]$  l'insieme di punti a monte o a valle rispetto il punto  $i$ , e osservando che  $A(i)$  eguaglia il numero di punti nell'insieme  $\mathfrak{U}(i)$  si ha  $\sum_i l_i = \sum_i \sum_{j \in \mathfrak{D}(i)} k_j = \sum_j \sum_{j \in \mathfrak{U}(i)} k_j = \sum_i k_i A_i$ .

La minimizzazione della dissipazione dell'energia per  $\gamma = 1$  quindi, corrisponde, alla minimizzazione dei percorsi pesati che connettono ogni sito all'outlet, indipendentemente uno dall'altro.

Il caso per  $\gamma = 0$  invece corrisponde alla minimizzazione della lunghezza totale pesata dell'albero distribuito, espressa dalla formula

$$E = \sum_i k_i. \quad (3.47)$$

Nel caso omogeneo il fatto di avere  $k_i = 1 \forall i$  porta ad un'elevata degenerazione sia per  $\gamma = 1$  sia per  $\gamma = 0$ .

### 3.4.2 Il caso eterogeneo "attenuato".

E' stato valutato l'effetto di qualche disordine "smorzato" considerando due tipi di eterogeneità:

- (i) collegamenti random tra i nodi rappresentanti le locali proprietà dei suoli;
- (ii) iniezione nodale random modellando la non uniformità della precipitazione.

Nel primo caso è stato dimostrato che l'energia può essere limitata dall'alto con la corrispondente energia in assenza di disordine. Questo fornisce, nel limite per  $L$  grande, un valore massimo per l'esponente  $\tau$ , specificamente realizzato per  $\gamma \in (\frac{1}{2}, 1)$  [Colaïori *et. al.*, 1997].

Nel caso di precipitazione casuale, è stato dimostrato che tale tipo di disordine non comporta cambiamenti nel comportamento di scala dell'energia dissipata, sempre nel limite di  $L$  grande.

Tutti i risultati analitici validi per il caso omogeneo, essendo basati sulla stima dell'energia nel limite termodinamico, possono essere quindi estesi a tale ultimo caso e forniscono gli stessi valori degli esponenti delle leggi a potenza.

Si accenna ora alla risoluzione analitica dei due casi presentata in [Colaïori *et al.*, 1997]

#### 3.4.2.1 ETEROGENEITA' DEI SUOLI: COLLEGAMENTI RANDOM NELLA RETE.



Nel caso di collegamenti random si è associato ad ogni collegamento del reticolo-bacino  $L \times L$  con  $[2L(L - 1)$  collegamenti], una variabile casuale attenuata  $k_b$ , arbitrariamente distribuita in modo tale che sia  $\langle k_b \rangle = 1$ .

Il pedice  $b$  spazia su tutti i collegamenti del bacino, e le  $2L(L - 1)$  variabili-collegamento sono scelte indipendenti tra loro ed identicamente distribuite. Per la trattazione completa si rimanda a [Colaioni et al., 1997], si riporta invece il caso per  $\gamma = 1$  il quale è stato esattamente risolto [Maritan et al., 1996] e corrisponde al problema di un polimero diretto in un mezzo non definito, o equivalentemente, ad una parete di dominio in un ferromagnete bidimensionale disordinato.

I valori degli esponenti corrispondenti sono

$$\tau = \frac{4}{3}, \psi = \frac{5}{3}, H = \frac{2}{3}, d_l = 1, h = \frac{3}{5}.$$

### 3.4.2.2 ETEROGENEITA' DI PIOGGIA: INIEZIONI RANDOM NEI NODI.

Il disordine può essere introdotto nel sistema in altro modo rispetto il caso precedente, sostituendo all'iniezione costante in ogni sito del reticolo, una iniezione locale casuale e smorzata, ad esempio una eterogeneità spaziale nella precipitazione  $r_i$  nell'equazione (1). Per fare questo è possibile associare ad ogni sito  $i$  del reticolo una variabile aleatoria  $r_i$ , inoltre le variabili sono scelte in modo da essere indipendenti le une dalle altre, identicamente distribuite e con media  $\langle r_i \rangle = 1$ .

Si vuole quindi provare ad estendere il risultato delle OCNs a bacini "grandi", facendo attenzione al significato dell'aggettivo "grandi" nel senso che bisogna valutare rispetto a quale criterio si effettua tale classificazione; esistono infatti bacini di estensione relativamente limitata nei quali a causa dell'orografia del territorio il *pattern* di precipitazione è molto differente (es. i bacini di alcuni affluenti del Colorado e di altri fiumi tra cui il Sevier nello stato dello Utah, U.S.A., hanno nella parte alta elevata precipitazione annuale con ecosistemi alpini, e nella parte meridionale una molto ridotta precipitazione annuale con ecosistema di tipo desertico).

In genere, nell'Italia settentrionale ed Europa centrale (clima continentale), i bacini la cui dimensione  $L_{||}$  e/o  $L_{\perp}$  è maggiore della dimensione caratteristica dell'evento di pioggia, sono quelli di estensione maggiore di  $1000 \div 2000 \text{ km}^2$ ;

in tal caso è necessaria la conoscenza della struttura spaziale e temporale dell'intensità di precipitazione  $j(\bar{x}, t)$ , la quale generabile tramite modelli stocastici geostatistici o di *kriging*.

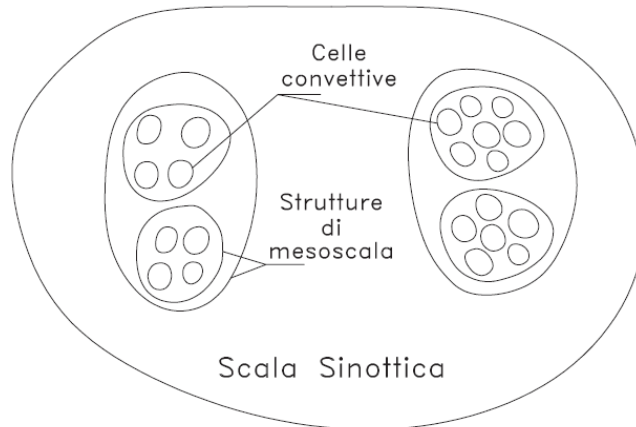


Figura 3.7 [Marani, 2005]: microscala o scala convettiva di  $1 \div 5$ km, mesoscala o scala "di temporale" di  $1 \div 5$ km, macroscale o scala sinottica  $> 100$ km; dalla microscala alla macroscale  $j$  diminuisce e  $t(j)$  aumenta secondo il secondo principio base dell'idrologia.

L'area cumulata deve soddisfare l'equazione (1), ossia richiamandola:

$$A_i = \sum_j w_{i,j} A_j + r_i, \quad (3.48)$$

in modo tale che

$$A_i = \sum_j \lambda_{i,j} r_j, \quad \text{con}$$

$$\lambda_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ è connesso a } j \text{ attraverso le direzioni di drenaggio "upstream" o se } i=j \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$(3.49)$$

Il minimo dell'energia mediata su una precipitazione random sarà indicata come  $E_{rr}(\gamma)$ , e per un dato valore di  $\gamma$  è data da:

$$E_{rr}(\gamma) = \langle \min_{\mathcal{T} \in \mathcal{S}} \sum_i A_i(\{r_j\}, \mathcal{T})^\gamma \rangle \quad (3.50)$$

dove  $\mathcal{S}$  denota l'insieme di tutti li *spanning trees* (alberi distribuiti nello spazio)  $\mathcal{T}$  e  $\{r_j\}$  indica l'intero insieme delle variabili casuali.

Come in (85)  $\mathcal{T}^*$  è uno degli alberi per cui il minimo dell'energia è realizzato in assenza di casualità nella precipitazione e per un dato valore di  $\gamma$ .

Poi:

$$E_{rr}(\gamma) = \langle \min_{\mathcal{T} \in \mathcal{S}} \sum_i A_i(\{r_i\}, \mathcal{T})^\gamma \rangle \leq \langle \sum_i A_i(\{r_i\}, \mathcal{T}^*(\gamma))^\gamma \rangle \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} &= \langle \sum_i (\sum_j \lambda_{i,j}(\mathcal{T}^*(\gamma)) r_j)^\gamma \rangle \leq \sum_i \sum_j \lambda_{i,j}(\mathcal{T}^*(\gamma)) \langle r_j \rangle^\gamma \\ &= \sum_i A_i(\mathcal{T}^*)^\gamma = E(\gamma). \quad (3.52) \end{aligned}$$

Quindi:

$$E_{rr}(\gamma) \leq E(\gamma) \sim \min(L^2, L^{1+2\gamma}). \quad (3.53)$$

In questo caso è anche possibile limitare l'energia dal basso con una procedura analoga a quella usata per il caso omogeneo. La trattazione dettagliata è fornita in Appendice.

Così si può concludere che:

$$E_{rr}(\gamma) \sim \min(L^2, L^{1+2\gamma}), \quad (3.54)$$

e tutti i risultati analitici del caso omogeneo sono confermati.

### 3.5 Risultati numerici.

### 3.5.1 Minimo Globale.

Sono state realizzate numerose investigazioni numeriche sulle OCNs [Colaïori et al., 1997] principalmente lungo due fronti:

- la ricerca del minimo globale con un algoritmo di Metropolis per  $\gamma = 1/2$ ;
- le statistiche sul minimo locale per  $\gamma = 1/2$ .

*Per minimo locale si intende una configurazione (un'albero distribuito) della rete caratterizzata dal fatto che nessun collegamento può essere cambiato senza un'aumento dell'energia.*

Il minimo globale è certamente anche un minimo locale, ma nei due casi sopra enunciati si sono trovate differenti statistiche, la qual cosa suggerisce una struttura molto varia della funzione energia.

Nelle simulazioni numeriche è stato considerato un reticolo quadrato con tutti i siti su di un lato come possibili *outlet* (sezione di chiusura) per la rete, mentre condizioni al contorno periodiche sono state imposte sugli altri lati. La scelta di adottare outlets multipli è dovuta al fatto di minimizzare gli effetti di scala finita (*finite-size effects*). La precipitazione è pensata uniforme nel bacino, visto che i risultati analitici del caso eterogeneo con precipitazione random portano a quelli del caso omogeneo (vedi Sezione 3.4.B.).

Il metodo di ottimizzazione usato è stato il *simulated annealing*, nel quale un parametro  $T$  analogo alla temperatura è introdotto e diminuito progressivamente durante la simulazione. Per ogni  $T$  il sistema cambia solamente in un nuovo collegamento, scelto casualmente, tra un nodo e l'altro della rete.

La nuova configurazione è accettata con probabilità 1 se  $\Delta E$  è negativo, ossia se l'energia del sistema diminuisce, e con probabilità  $\exp(-\Delta E/T)$  altrimenti; nel secondo caso viene generata una probabilità casuale  $p$  compresa nell'intervallo  $[0, 1]$ , poi se  $\exp(-\Delta E/T) \leq p$  la nuova rete è adottata, altrimenti si realizza una nuova configurazione random.

In breve l'algoritmo adottato da Colaïori e altri consiste nei seguenti passi:

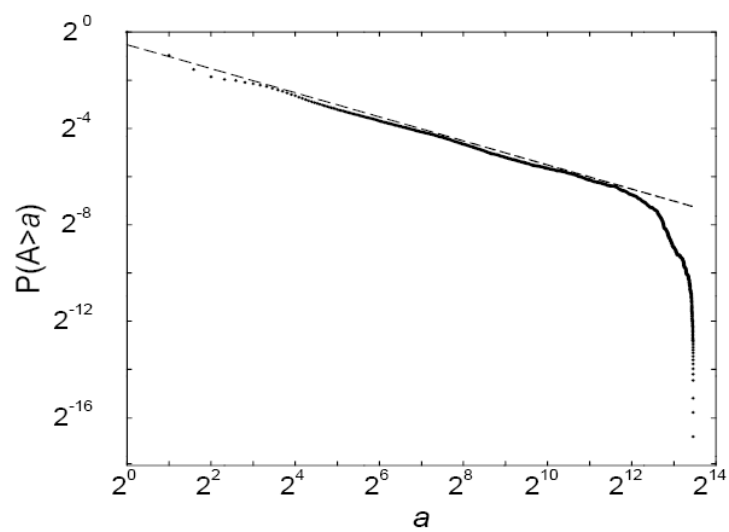
1. *Generazione di una configurazione random* della rete eseguendo, i passi (2) e (3) successivi, parecchie volte;
2. *Cambiamento casuale della configurazione* scegliendo un sito libero, non ancora appartenente alla rete, da connettere al nodo  $i$  in cui ci si trova;
3. *Controllo geometrico* verificando l'assenza di percorsi chiusi (*loops*), nel qual caso si ritorna al punto (2);
4. *Controllo energetico* come descritto in precedenza;
5. *Diminuzione del parametro  $T$*  secondo la relazione  $T(n) = \alpha^n T(0)$ , dove  $n$  è l' $n$ -esimo step,  $\alpha = 0.986$  e  $T(0)$  è una opportuna costante.

Il processo di annealing viene fermato quando il parametro  $T$  raggiunge valori molto bassi, tipicamente  $\approx 10^{-4}$ .

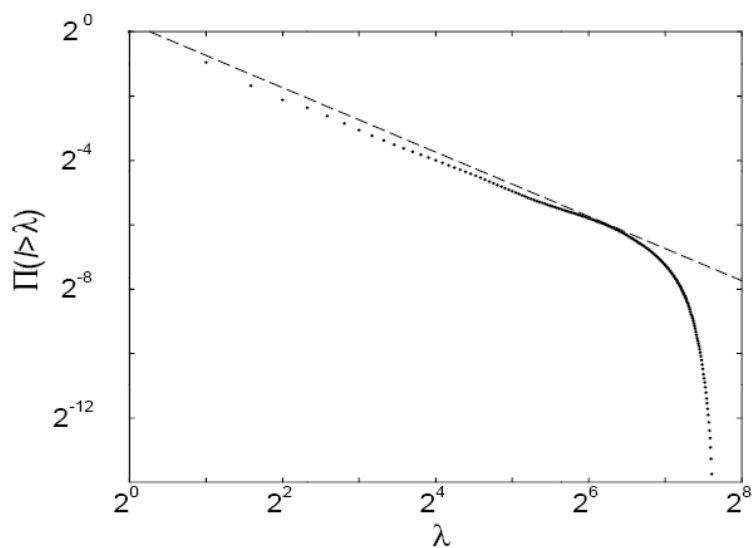
La simulazione è stata ripetuta variando le condizioni iniziali ( $L = 128$ ) ed è stato visto che tali non influenzano le quantità statistiche.

Le distribuzioni di probabilità cumulata delle aree cumulate e delle lunghezze dell'asta principale, mediate su dieci prove sono mostrate nella Figura sottostante, e forniscono  $\tau = 1.50 \pm 0.02$  e  $\psi = 2.00 \pm 0.02$ , dove l'errore è fornito dalla radice quadratica media sulle dieci prove.

I risultati sono in perfetto accordo con l'equazione (3.29) e confermano i risultati analitici ottenuti con  $\gamma = 1/2$ .



(a)



(b)

Figura 3.8 [Colaiori et al., 1997]: (a) Distribuzione  $P(A > a)$  vs  $a$ , per un bacino simulato di dimensione  $L = 128$ , con pendenza  $1 - \tau = -0.50$ ; (b) Distribuzione  $\Pi(l > \lambda)$  vs  $\lambda$  con pendenza  $1 - \psi = -1.00$ ; le aree cumulate e le lunghezze *upstream* sono in unità del parametro di reticolo quadrato scelto pari ad 1.

### 3.5.2 Minimo Locale.

Le reti fluviali ottimali "omogenee", ossia senza grandezze aleatorie nello spazio e nel tempo, risultano in buon accordo con i dati sperimentali sui fiumi quando si calcolano le statistiche basate sul minimo locale.

Questo suggerisce il concetto di *ottimalità fattibile* [Rinaldo et al., 1996] secondo cui la natura è incapace di raggiungere il vero stato inferiore quando sistemi complessi sono insiti nei problemi di ottimizzazione.

L'ottimizzazione si arresta non appena si è raggiunto un minimo locale e tale risultato si pensa abbia validità generale e possa spiegare alcune forme frattali naturali.

### 3.6 Sintesi dei risultati.

Nell'ipotesi di base di leggi di scala finita (*finite-size scaling*) per la distribuzione delle aree cumulate e delle lunghezze dell'asta principale dei bacini, è stato dedotto l'esatto comportamento di scala di una rete di drenaggio ad albero, per la quale il minimo assoluto dell'energia dissipata si realizza sia nel caso omogeneo sia in presenza di aleatorietà.

Gli esponenti di scala nel caso omogeneo sono risultati quelli del campo medio e differiscono da quelli misurati nei corsi d'acqua reali.

I risultati numerici sono stati ottenuti sia per le statistiche sul minimo globale (confermando le previsioni analitiche) sia per il minimo locale.

Gli esponenti statistici, ossia quelli derivanti da simulazioni, caratterizzanti il minimo locale differiscono chiaramente da quelli di campo medio.

Essi sembrano appartenere a una diversa *classe di universalità* e in accordo ai dati dei fiumi reali.

Questo suggerisce che i fiumi reali, durante la loro evoluzione, non visitano tutto lo spazio delle configurazioni, ma sono presto intrappolati in uno *stato metastabile*, per esempio quello relativo ad un minimo locale dell'energia dissipata [Rinaldo et al., 1996].

Nonostante la teoria delle OCNs sia stata estensivamente verificata sia nei suoi risultati numerici sia nelle sue conclusioni analitico-teoriche, esistono alcune opinioni discordanti riguardo certe sue implicazioni, principalmente la visione dell'evoluzione del territorio come processo di SOC (Self Organized Criticality) e alcune analisi multifrattali [Sapozhnicov et. al., 1996].

### 3.7 Risultati di altre ricerche.

In [Tucker et al., 1999] è stato sviluppato un modello stocastico, poi seguito dalla realizzazione del programma CHILD, di modellazione dell'evoluzione dei bacini di drenaggio fluviali con precipitazione random nello spazio e nel tempo.

Sebbene infatti l'evoluzione del territorio è modellata come un processo continuo, essa è guidata da eventi discreti.

La topografia di una montagna, per esempio, è formata da una sequenza *quasi random* di allagamenti, terremoti, e scivolamenti di pendii, ogni processo con la sua caratteristica distribuzione di frequenza la quale varia anch'essa nello spazio e nel tempo al pari della forma della montagna che ne è il suo effetto. Il modello stocastico implementato in CHILD è basato sul modello di precipitazione di Eagleson [Eagleson, 1978] e descrive la distribuzione di probabilità dell'intensità di pioggia, della sua durata e della sua frequenza.

La domanda principale è quindi stata quella di vedere le conseguenze geomorfologiche della variabilità di precipitazione.