

Allegato 2

Introduzione ad HydroGen per la generazione di campi random variamente correlati.

HydroGen è un codice, scritto in Ansi Fortran 77, per la generazione di funzioni casuali bidimensionali nello spazio con un'assegnata struttura di covarianza.

I calcoli vengono effettuati in doppia precisione.

Nel programma si fa riferimento alla covarianza (o *autocovarianza*) con la scrittura $cov(itype, r_x, r_y)$, dove l' argomento *itype* identifica la funzione di covarianza, r_x e r_y sono le distanze spaziali alle quali la covarianza è computata.

Con xsp e ysp si indicano le dimensioni principali dell'area di ricerca (*search neighborhood area*) nelle direzioni x e y (Figura x.y), ed i valori per esse suggeriti, basati sulla funzione di covarianza scelta e sulle scale integrali/di correlazione, sono calcolate e visualizzate a monitor in automatico.

E' fornito, anch'esso in automatico, il valore suggerito per $xspa$, la dimensione secondaria dell'area di ricerca.

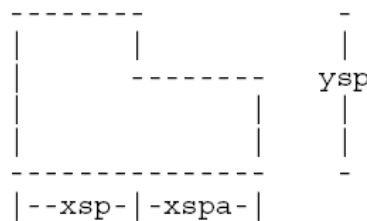


Figura a2.1: area di ricerca definita in HydroGen; le dimensioni xsp , $xspa$, e ysp devono essere introdotte manualmente, tuttavia sulla base di test condotti dagli autori *Bellin* e *Rubin*, il programma suggerisce in automatico dei valori.

Le dimensioni dell'area di ricerca devono essere ragionevolmente piccole rispetto le dimensioni di campo, pena un possibile errore di segmentazione con output vuoto; in tal caso si può optare di assumere dimensioni dell'area di ricerca minori di quelle suggerite, oppure effettuare la simulazione con un campo più ampio.

Tuttavia poichè le dimensioni della "search neighborhood area" sono basate su tests numerici degli autori del programma, vedi [Bellin e Rubin, 1996b], relativi alla riproduzione della struttura di covarianza, non è consigliabile adottarle molto più piccole di quelle consigliate, pertanto è preferibile lavorare con un campo il più ampio possibile.

Nel caso di campi frattali le dimensioni dell' area di ricerca sono automaticamente poste pari a quelle del campo generato, pertanto da $L_x = xsp$, $L_y = ysp$, $xspa = 0$, risulta l'equivalenza delle aree $L_x \times L_y = xsp \times ysp$.

Le strutture di covarianza possibili sono:

- (0) $itype = 0$, *funzione di covarianza discreta*, introdotta con un file di input il quale deve contenere la funzione di autocovarianza discretizzata su una sottogriglia di dimensioni $(xsp + xspa) \times ysp$, con spazature Δx e Δy della griglia uguali alle spazature della rete a maglia larga;

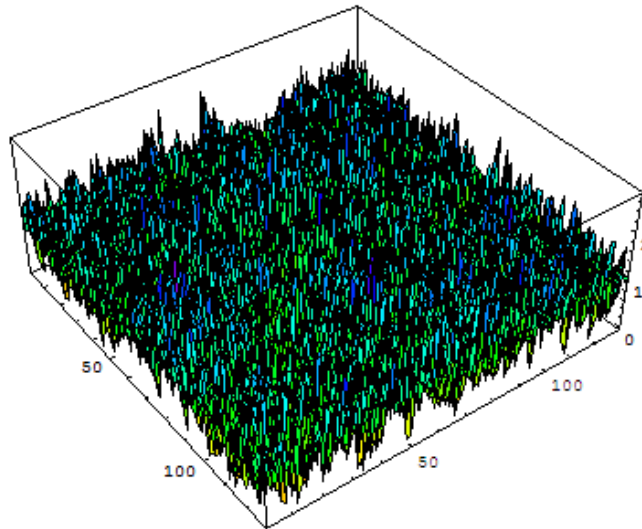
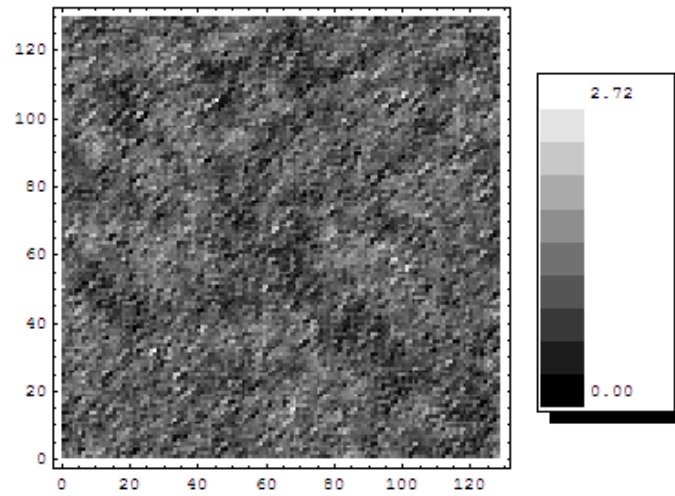


Figura a2.2: campo a covarianza discreta, si è eseguito l'esempio proposto a corredo del manuale [Bellin *et. al.*, 1996b], (vedi anche "addings" in <http://www.ing.unitn.it/bellin/frames/hydrogen.php>).

- (1) $itype = 1$, *funzione di covarianza esponenziale*, con $C_Z(r_x, r_y) = e^{-r'}$, dove $r' = \sqrt{(r_x/I_{Zx})^2 + (r_y/I_{Zy})^2}$ è la distanza tra due punti adimensionale, $r_x = x_2 - x_1$ e $r_y = y_2 - y_1$ sono le componenti in x e y della distanza di separazione tra due punti, I_{Zx} e I_{Zy} sono le scale integrali nella direzione x e y rispettivamente, $e = I_{Zy}/I_{Zx}$ è il rapporto di anisotropia;

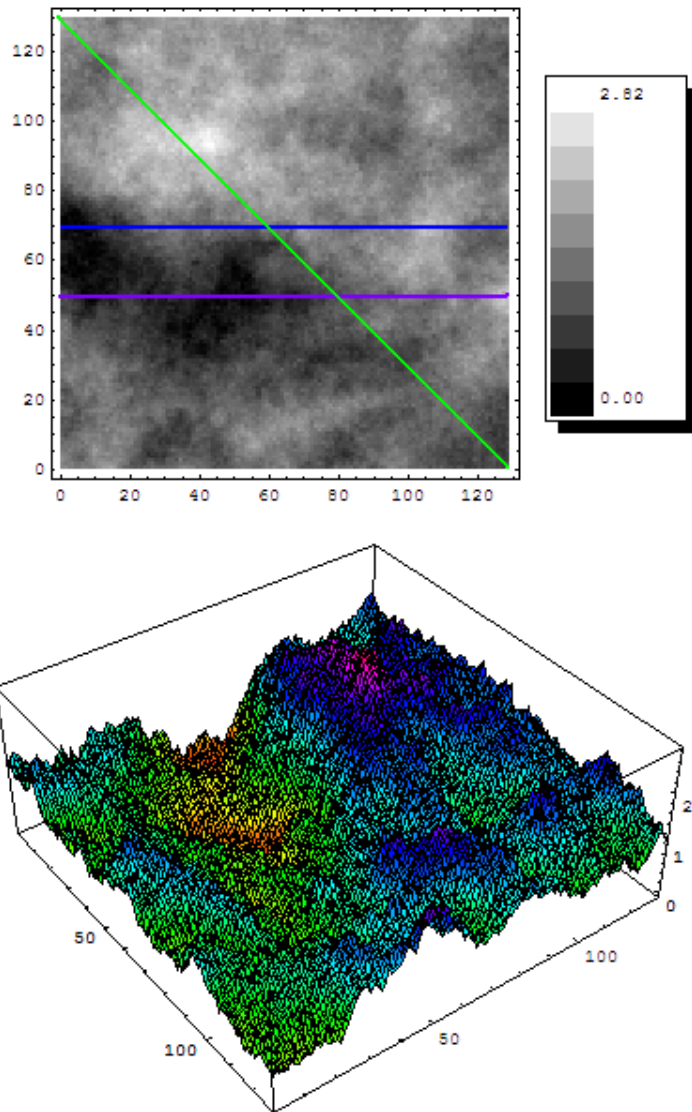
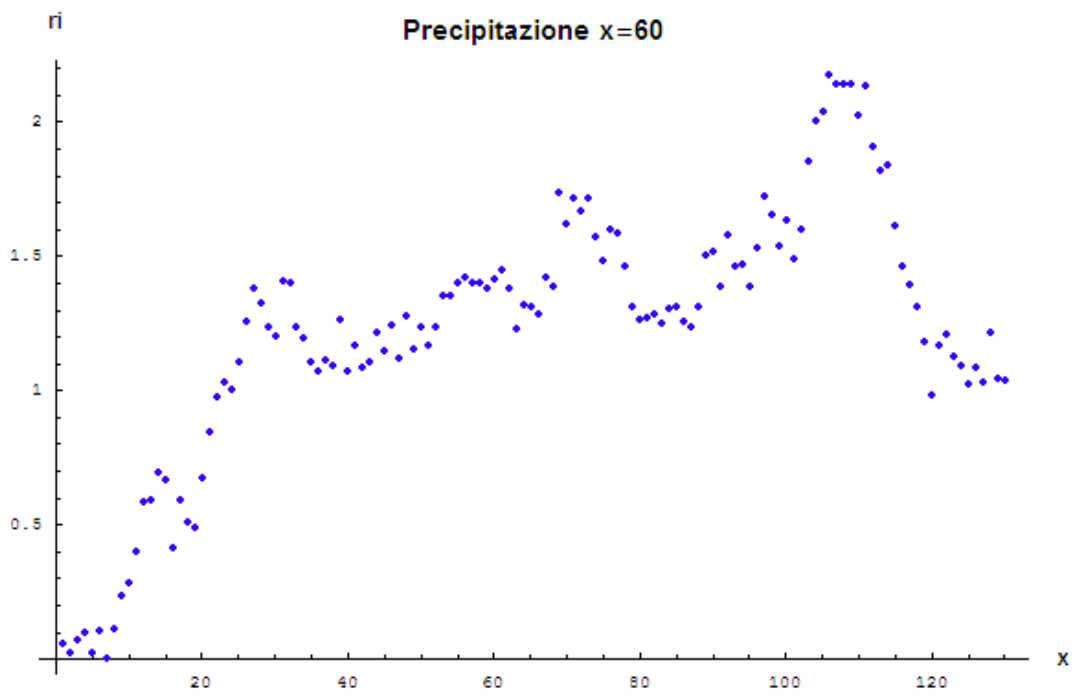
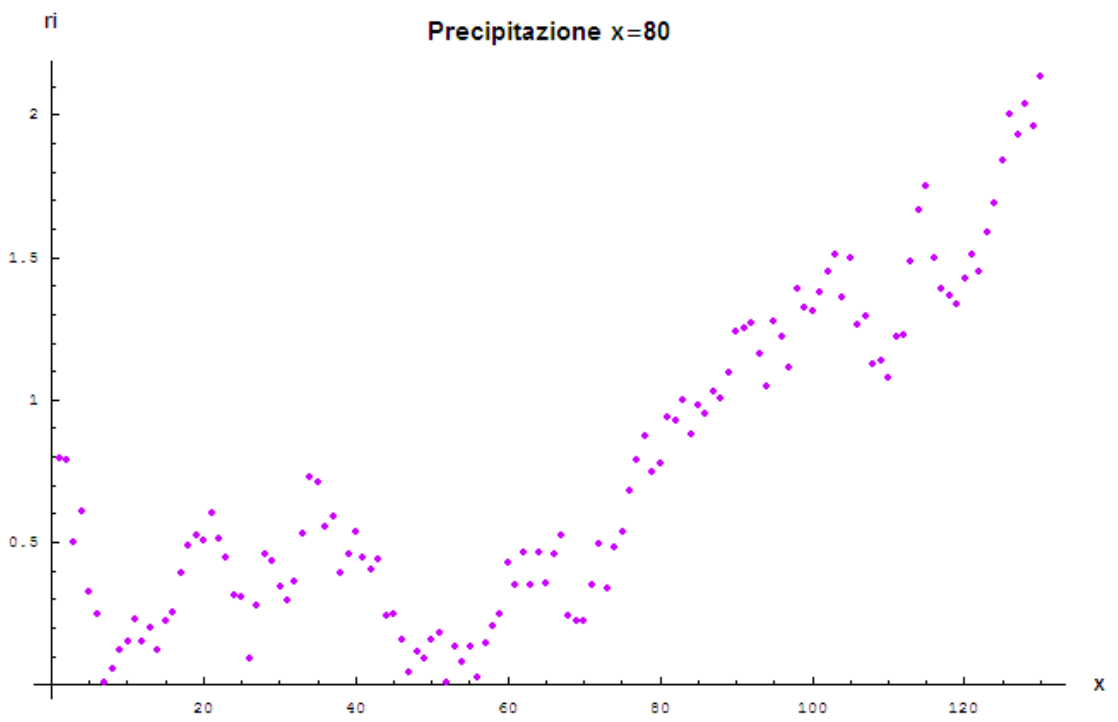


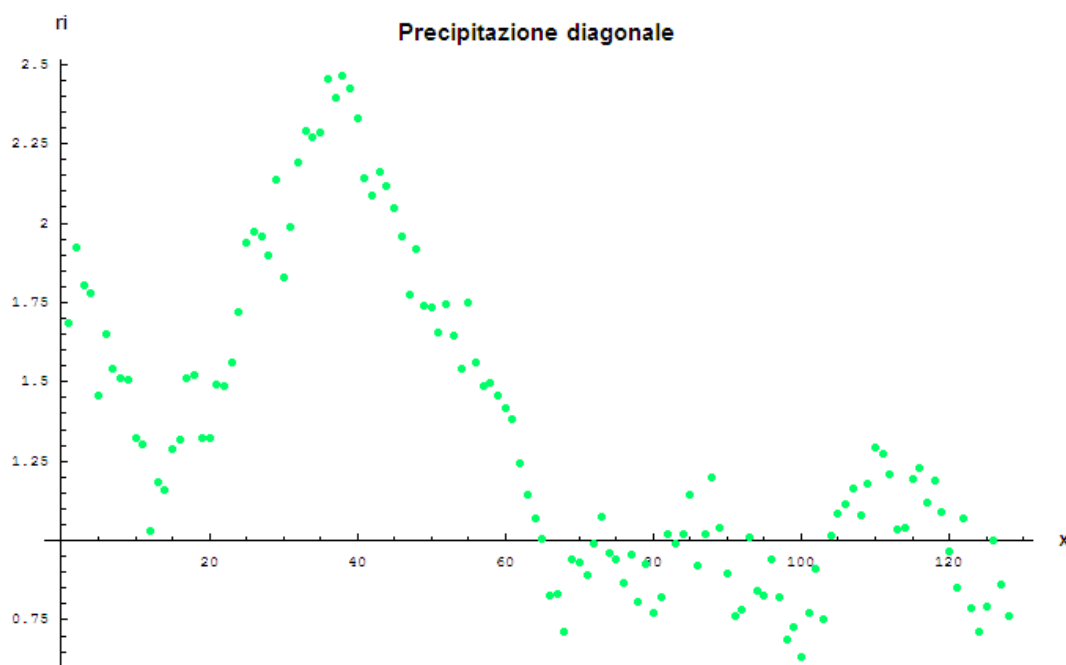
Figura a2.3: campo a covarianza esponenziale con $\langle r_i \rangle = 1$, $\sigma^2 = 1.0$, $I = 150$, e ottenuto con due raffinamenti di campo; visualizzazione bidimensionale in scala di grigi, e rappresentazione tridimensionale in modalità "MeshHue"



(a)



(b)



(c)

Figura a2.4: (a), (b), (c), sezioni a $x = 60$, $x = 80$, e sezione diagonale del campo di precipitazione di Figura a2.3.

- (2) $itype = 2$, funzione di covarianza Gaussiana, con $C_Z(r) = e^{-r^2}$;

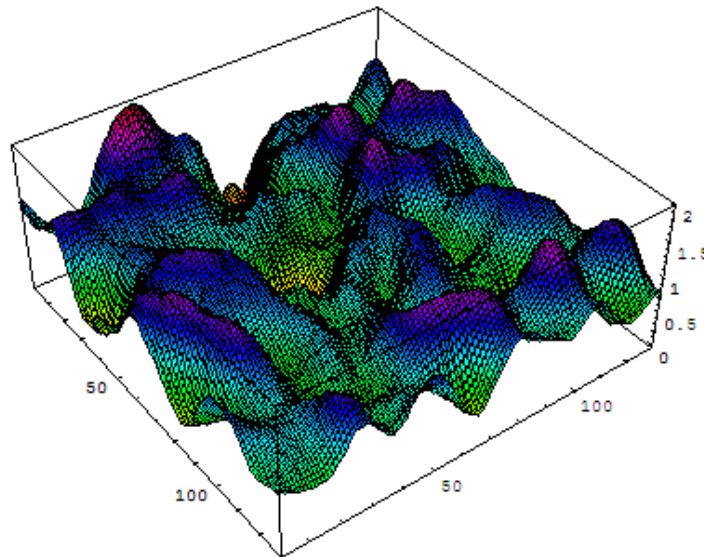
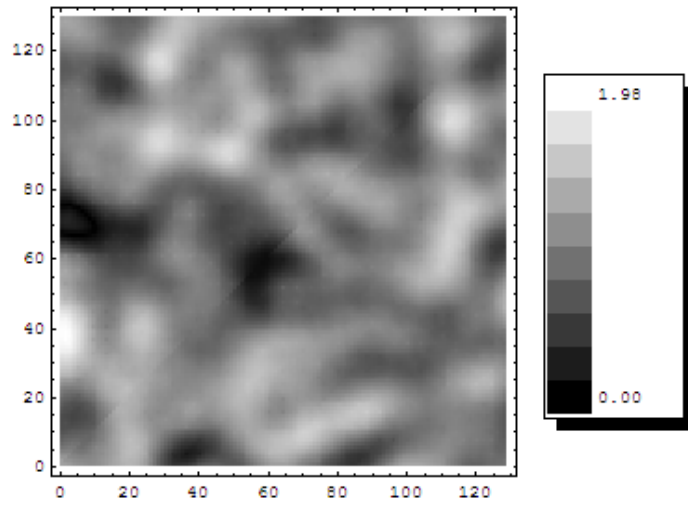


Figura a2.5: campo isotropo di pioggia a covarianza gaussiana con scala di correlazione $I = 10$, ottenuto con due raffinamenti di campo.

- (3) $itype = 3$, funzione di covarianza isotropica di Whittle, con $C_Z(r_x, r_y) = \alpha r K_1(\alpha r)$, dove $r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$ e $\alpha = \pi/2I_Z$, ponendo $I_{Zx} = I_{Zy} = I_Z$, e $K_1(\alpha r)$ è la funzione modificata di Bessel del terzo tipo al primo ordine;

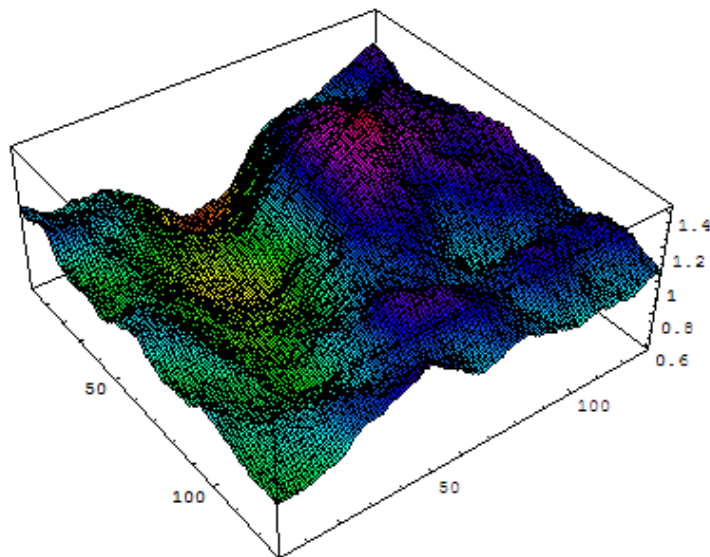
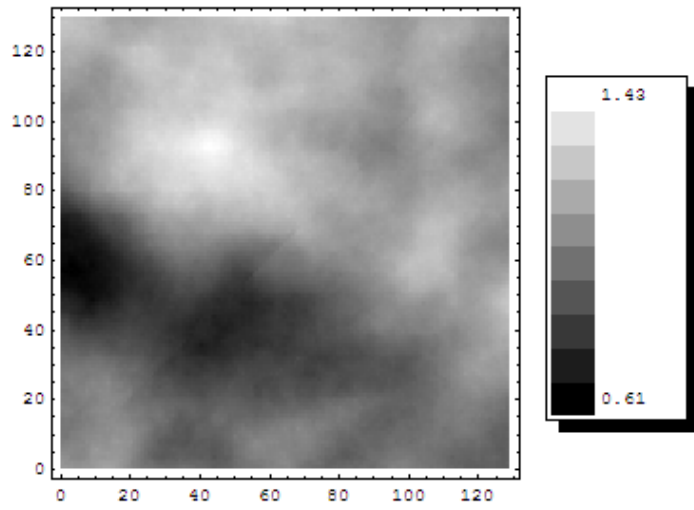


Figura a2.6: campo isotropo a covarianza di Whittle con $I = 10$, ottenuto con due raffinamenti di campo.

- (4) $itype = 4$, *funzione di covarianza isotropica di Mizell* (di tipo B) [Mizell, 1982], con $C_Z(r_x, r_y) = \alpha r K_1(\alpha r) - (\alpha r)^2 K_0(\alpha r)$, i cui simboli hanno lo stesso significato di quelli della precedente funzione di covarianza (3), e K_0 è la funzione di Bessel modificata del terzo tipo di ordine zero;

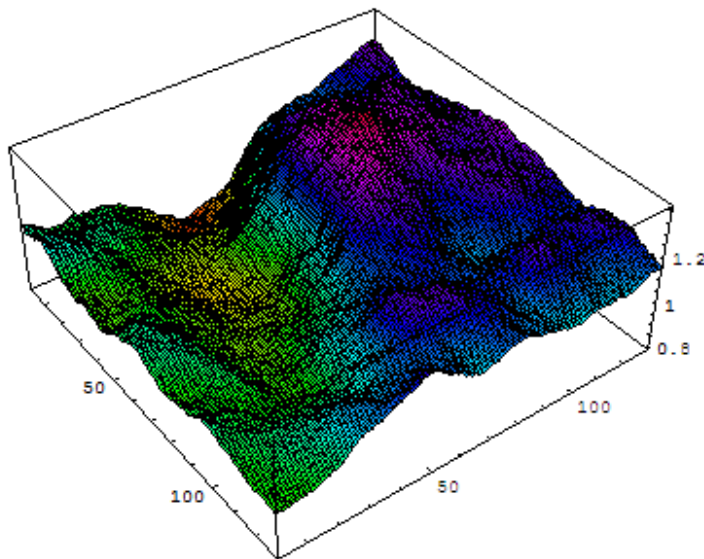
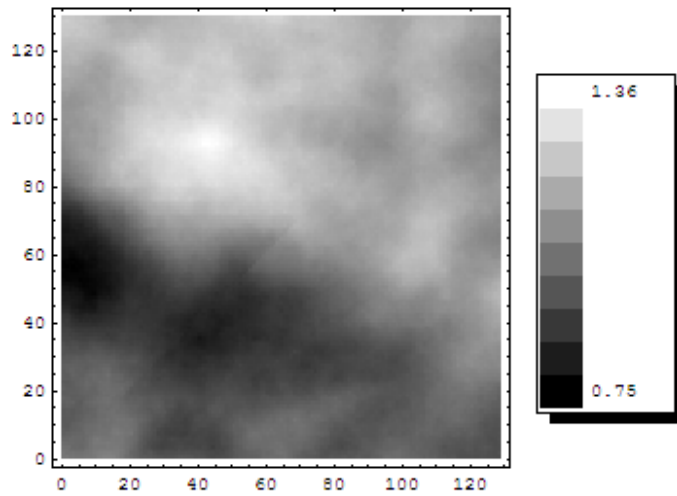


Figura a2.7: campo isotropo a covarianza di Mizell (tipo B) con $I = 10$, ottenuto con due raffinamenti di campo; si noti la sostanziale equivalenza del pattern di pioggia con quello di Figura a2.6 avente covarianza di Whittle, il valore $r_{i_{max}} = 1.26$ risulta minore mentre $r_{i_{min}} = 0.76$ risulta maggiore, sempre rispetto al precedente caso.

- (5) $itype = 5$, semivariogramma a legge di potenza, con $\gamma_Z(r_x, r_y) = cr^{I\beta}$, dove $r_x = x_2 - x_1$, $r_y = y_2 - y_1$, $r' = \sqrt{(r_x/I_x)^2 + (r_y/I_y)^2}$, I_x e

I_x e I_y sono le scale di riferimento lungo la direzione x e y rispettivamente le quali rappresentano la minima scala di variabilità risolta nelle simulazioni, c è una costante legata alla varianza di campo, e l'esponente β , che controlla come $\gamma_Z(r_x, r_y)$ cresce con la distanza, è in relazione all'esponente di Hurst tramite la relazione $\beta = 2H$ [Hurst, 1951]; per $\beta < 1$ il campo appare sgranato con valori correlati su distanze molto piccole, il fenomeno è chiamato *antipersistenza*, viceversa per $\beta > 1$ la correlazione persiste, da cui il nome *persistenza* per tale caso, su grandi distanze, il campo appare "liscio" ma con forti contrasti tra una zona e l'altra. Il caso con $H = 0.5$, quindi $\beta = 1$ corrisponde al rumore Gaussiano.

Ponendo $I_x = I_y = I$ si ottiene un campo frattale o auto-simile, con $I_x \neq I_y$ si crea un campo auto-affine; inoltre con $\Delta x = \Delta y = I$ non si ha variabilità spaziale a scale minori di I .

Nel caso di covarianza "frattale" si può anche forzare la media ad essere costante in ogni realizzazione, questo è equivalente però ad assumere deterministiche e note le variabilità di campo a larga scala.

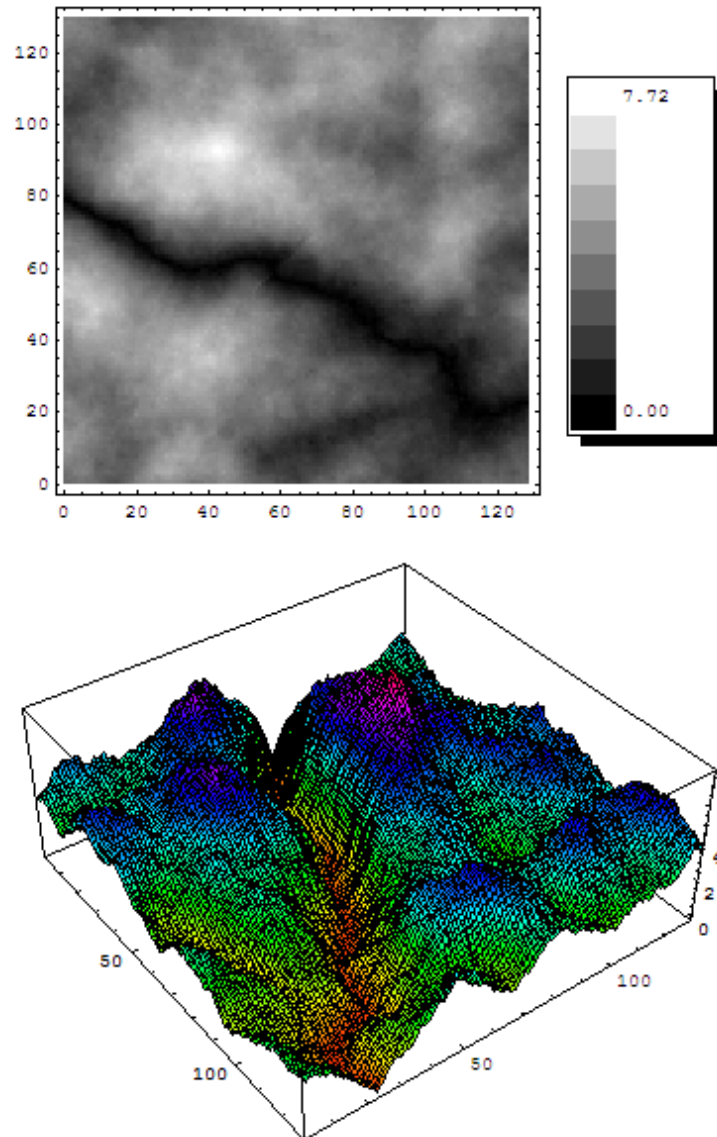


Figura a2.8: campo isotropo con semivariogramma a legge di potenza, avente $c = 0.5$, $\beta = 1.8$ quindi $H = \beta/2 = 0.9$, $I = 5$, e media imposta a $\langle r_i \rangle = 1$; si vede come tale campo proposto abbia una ridotta probabilità di descrivere la realtà fisica di un evento precipitativo.

All'aumentare della scala di correlazione o della scala integrale I dei campi di pioggia generati, aumenta la distanza tra le zone a pioggia mediamente nulla, o mediamente unitaria, dato che la media è stata imposta pari ad uno, e la loro dimensione.

Quindi per I/L grande, ad esempio tendente ad uno o maggiore, si hanno zone di precipitazione molto estese e distanti tra loro (rispecchianti gli eventi nella stagione invernale), viceversa per I/L piccolo si hanno zone di precipitazione molto vicine tra loro e di dimensione limitata (eventi estivi), mentre al tendere di I/L a zero si ritorna al caso uniforme.

Inoltre al crescere di I/L il valore massimo di r_i diminuisce in conseguenza all'aumento dell'ampiezza del campo di precipitazione (mediamente di area $I \times I$ e con $\langle r_i \rangle = 1$, nel bacino $L \times L = 128 \times 128$); è possibile infatti fissare $I > L$ (imponendo opportunamente in HydroGen un'area di ricerca piccola, ma non troppo, per evitare errori nella generazione dei campi) ma il valore medio della variabile aleatoria precipitazione è fissato sempre sul DEM in studio, quindi nei bacini reali sull'area $L \times L$.

L'imposizione della media ad uno nel campo di pioggia $L \times L$ spiega il perché nel caso con I elevato, tendente alla dimensione del bacino o superiore, si verifichi sempre il caso di "alluvione" e non di "siccità", ossia il bacino ricade sempre nella zona caratterizzata da precipitazione.

Per ovviare a questo sono state fatte delle simulazioni con campi di precipitazione a media zero, quindi come se si ricadesse nella zona a precipitazione mediamente nulla del caso con rapporto I/L elevato (es. pari ad uno); li esponenti in tal caso risultano sostanzialmente uguali a quelli per I/L tendente a zero, quindi a quelli delle reti ottime con $r_i = \text{cost} = 1$.

L'analisi della variazione degli esponenti è stata condotta generando campi di precipitazione con varianza $\sigma^2 = 0.5$ e $\sigma^2 = 1$

In genere, per tutte le strutture di correlazione, le lunghezze di campo L_x e L_y , e le spaziature di griglia Δx e Δy , vengono sempre esplicitate come multipli delle scale integrali/di correlazione I_x e I_y , ossia si trova scritto frequentemente $L_{x,y} = mI_{x,y}$ e $\Delta x, y = mI_{x,y}$ con m numero generico decimale e positivo.

I grafici vengono quasi esclusivamente forniti in forma adimensionale rispetto le scale integrali o le scale di correlazione (queste ultime, alle volte anche dette, scale di riferimento).

Secondo la scelta dell'utente la generazione può avvenire in due modi:

(i) generazione diretta su una griglia selezionata;

(ii) generazione su una griglia "aperta" (*coarse grid*) seguita da massimo tre passi di raffinamento nei quali la dimensione del blocco di punti, quindi l'*indice di coarse graining* λ , è ridotto di un fattore pari a due e pertanto la densità di nodi della griglia raddoppia ad ogni step.

La generazione della griglia prima avviene su una griglia "sparsa", poi le sottosezioni della griglia sono rifinite incrementando la densità di nodi; ad ogni raffinamento, il quale avviene in due passi, il numero di nodi raddoppia. Per esempio inserendo $\Delta x = 0.25\Delta y = 0.025$ come valori desiderati per le spaziature di griglia del campo finale (indicati anche come dx e dy), e posto $n = 1$ rifinimenti, il programma genera dapprima una griglia sparsa con spaziature $\Delta x = 0.50$ e $\Delta y = 0.050$ (quindi $\lambda = 2$), il quale poi è raffittita una volta al fine di ottenere la maglia di calcolo voluta.

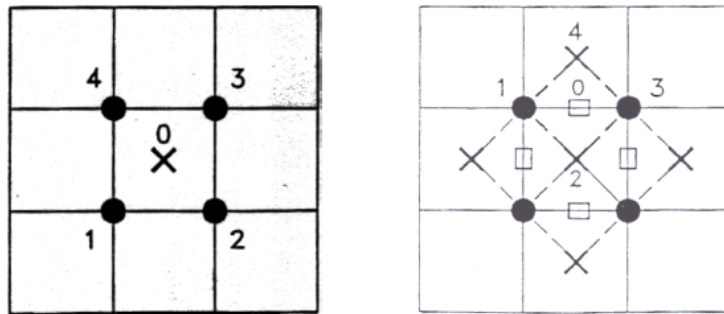


Figura a2.9: esempio di discretizzazione isotropa del dominio (con griglia avente Δl uguale in x e y), ed esempio di raffinamento; sulla sinistra il primo stage di raffinamento (su coarse grid), sulla destra il secondo stage.

Nelle simulazioni condotte sulle reti fluviali artificiali e naturali, si è sempre posto $\Delta x = \Delta y = 1.00$ pari alla dimensione unitaria dei pixel del DEM.

Sempre in merito al precedente punto (ii) in [Bellin e Rubin, 1996b] si avvisa l'utente di rispettare il limite di tre raffinamenti per evitare una apprezzabile riduzione nell'accuratezza numerica.

In generale il numero di passaggi per raffinare la rete dovrebbe essere sufficientemente grande per evitare errori di segmentazione (tipici dei casi con area di ricerca troppo ampia), ma allo stesso tempo, abbastanza piccolo per preservare un certo livello di accuratezza dei campi generati.

Il numero dei passi di raffinamento dipende dal rapporto tra la risultante spaziatura della griglia "coarse" e le scale integrali; tests numerici [Bellin e Rubin, 1996b] suggeriscono che per campi casuali regolari le spaziature della griglia "coarse" dovrebbero non eccedere due volte il valore delle scale integrali ($l_x = \lambda\Delta x \leq 2I_{Zx}$ e $l_y = \lambda\Delta y \leq 2I_{Zy}$), mentre per campi frattali il limite dipende dal valore β e dalle dimensioni di campo.

Per questa ragione la spaziatura ottimale della rete a maglie larghe, dovrebbe essere fissata secondo tests performati direttamente dall'utente, usando differenti numeri di raffinamenti multipli.

Il raffinamento può essere utile quando l'area di ricerca (*neighborhood area*) è grande; in queste situazioni lo sforzo computazionale per la generazione della griglia a maglie larghe (*coarse grid*), può essere ridotto senza un'apprezzabile impatto sull'accuratezza.

Si indica con Δx e Δy le discretizzazioni della griglia nella direzione x e y rispettivamente, ossia la distanza tra due centri di pixel adiacenti. Per campi frattali (*auto-simili*) la più grande area di ricerca coincide con il dominio di generazione.

E' importante definire nel processo di generazione la dimensione massima della matrice contenente la funzione di covarianza.

Ad ogni step le dimensioni sono $(NN2 + NN2A) \times NN1$ [Bellin e Rubin, 1996b], dove si definisce $NN2 = xsp/\Delta x$, $NN2A = xspa/\Delta x$, e $NN1 = ysp/\Delta y$, con xsp e ysp le dimensioni in x e y dell'area di ricerca come mostrato in Figura x.y, mentre Δx e Δy sono le discretizzazioni della griglia lungo x e y .

Da notare che mentre xsp e ysp rimangono costanti ad ogni step di calcolo dopo averli inseriti, Δx e Δy variano tante volte quanti sono i raffinamenti di griglia utilizzati, massimo tre come consigliato; ad esempio nel caso si voglia un solo raffinamento i valori di input voluti Δx e Δy risultano dapprima pari a $\lambda\Delta x$ e $\lambda\Delta y$, con λ indice di coarse graining, corrispondenti alla generazione della prima griglia "coarse".

Nel caso di campi frattali $NN2$ e $NN1$ sono il numero di nodi nelle direzioni x e y , perchè l'area di ricerca coincide con il dominio generato, inoltre $NN2A = 0$ perchè $xspa = 0$.

Il principale vantaggio del metodo usato dal programma è che i *coefficienti di*

kriging dipendono esclusivamente dalla geometria di campo e dalla spaziatura di griglia, e non dai loro stessi valori [Bellin e Rubin, 1996b].

L'opzione di utilizzare coefficienti di interpolazione (o di kriging) generati su simulazioni precedenti, è valida esclusivamente per simulazioni con identiche spaziature di griglia Δx e Δy , e stessa funzione di correlazione $C_Z(r)$.

È possibile quindi generare un campo casuale $\mathfrak{F}_i(Z)$ con le stesse proprietà statistiche di un generico campo $\mathfrak{F}_{i-1}(Z)$ precedentemente simulato e avente dimensioni L_x e L_y differenti, utilizzando i coefficienti di interpolazione di quest'ultimo.

Con Z si indica, in genere, una *funzione casuale stazionaria nello spazio* (anche nota in letteratura come RSP, da *Random Space Function*) caratterizzata da una media costante $\langle Z \rangle$ e una varianza σ_Z^2 .

Con l_x e l_y si indicano le dimensioni di campo ossia le dimensioni in x e y della griglia generata.

Al variare del tipo di covarianza (o autocovarianza) varia la *funzione di autocorrelazione* definita come rapporto tra la covarianza e la varianza, analiticamente è $\rho(r_x, r_y) = C(r_x, r_y)/\sigma_Z^2$; al solito r_x e r_y sono le componenti in x e y della distanza tra due punti nei quali la funzione di covarianza C_Z è computata, e σ_Z^2 è la varianza.

Il campo casuale generato, o i campi nel caso di più realizzazioni Monte Carlo, è dato come output in due possibili modalità, formato x, y, z in colonna dove x e y sono le coordinate spaziali e z il valore della variabile random, oppure formato matrice in cui i valori della variabile aleatoria Z si susseguono.

L'ultimo formato è stato postprocessato, trasformandolo nel formato Fluid-Turtle, per ricavare la matrice delle aree cumulate con iniezione r_i eterogenea.

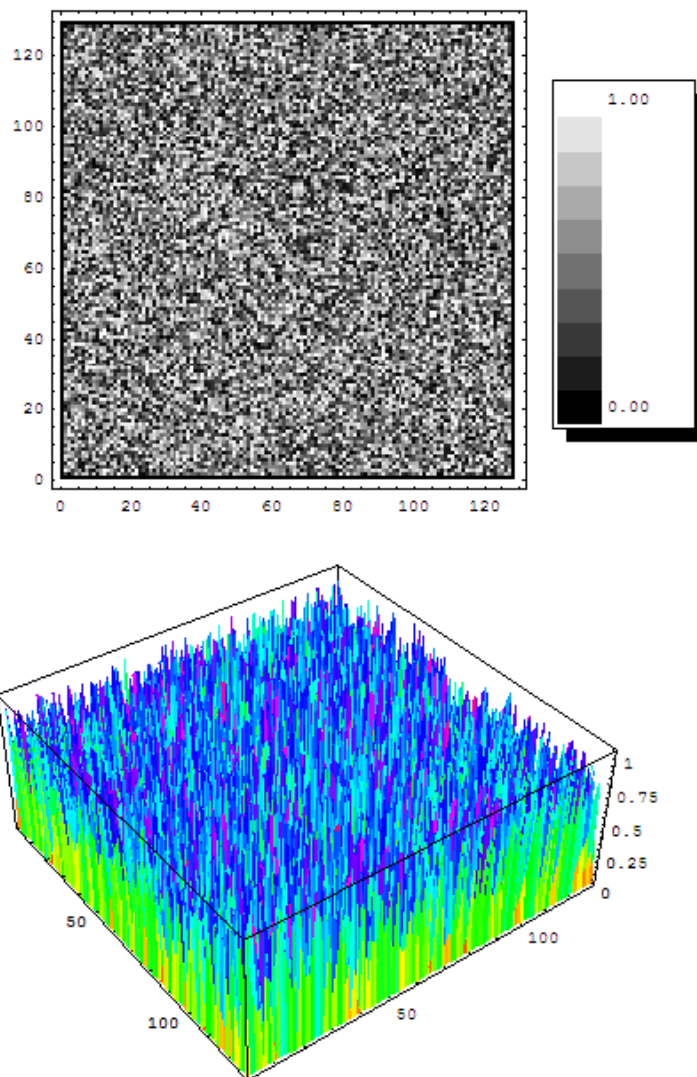


Figura a2.10: campo di pioggia casuale senza struttura di correlazione, generato con la routine FluidTurtle "random-uncorrelated" [*Rigon et. al.*, 2002; *Convertino et. al.*, 2006b]

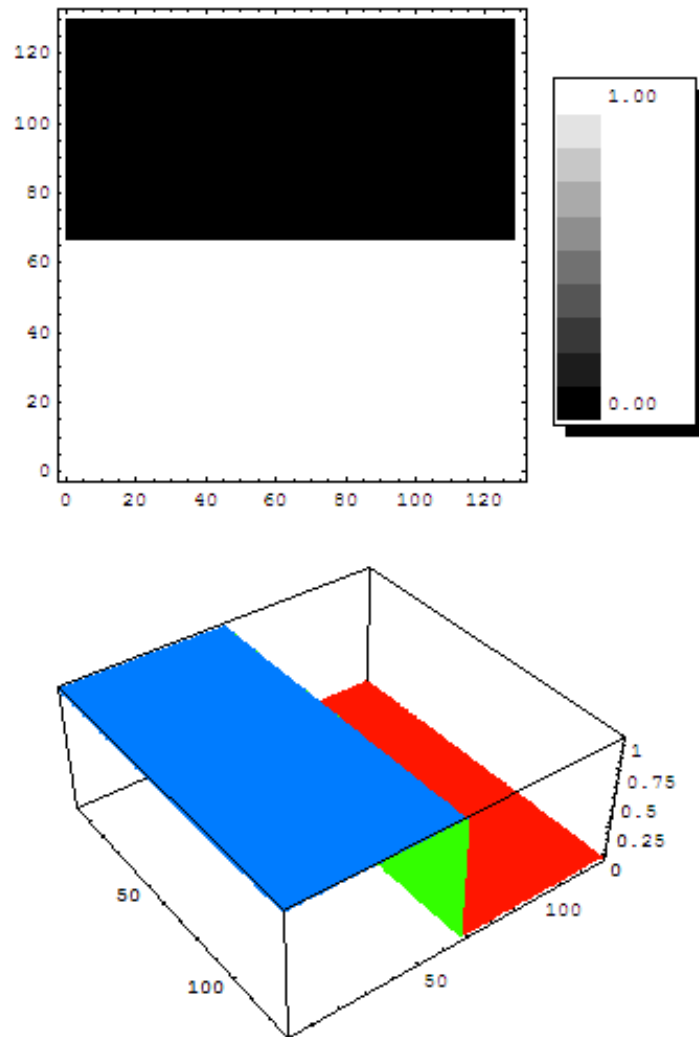


Figura a2.11: campo di pioggia deterministico imponendo nella metà superiore $\langle r_i \rangle = 0.001$, nella metà inferiore $\langle r_i \rangle = 1.001$; la scelta di numeri non interi è dovuta al fatto di voler avere un unico outlet, applicando tale campo ad una rete per la determinazione del flusso cumulato $J_i \forall$ pixel i -esimo. La routine "r-metropolis" non accetta infatti condizioni al contorno cilindriche.

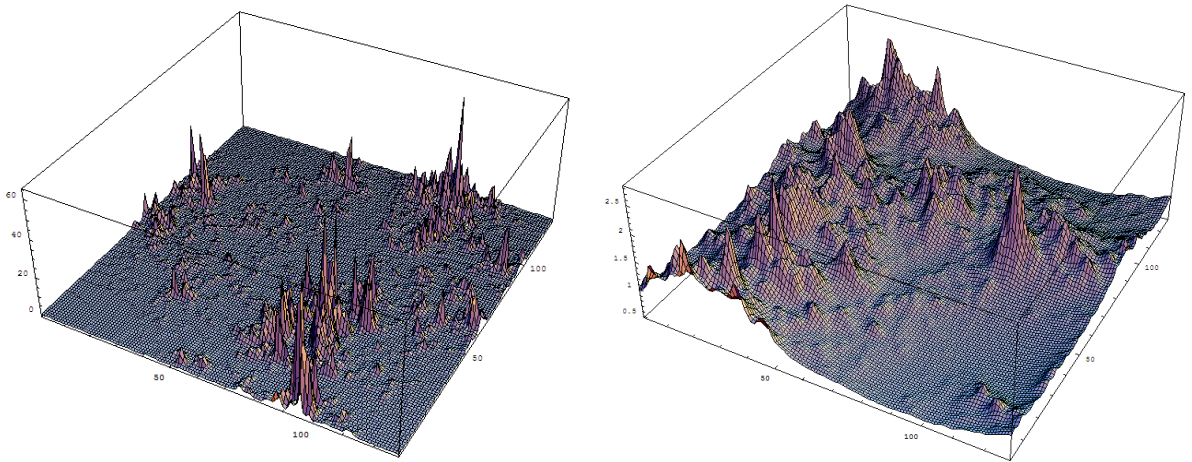


Figura a2.12: alcuni campi multifrattali isotropi, non utilizzati nelle simulazioni proposte, ma probabilmente più rappresentativi dei campi di precipitazione reali [si veda <http://www.physics.mcgill.ca/~gang/multifrac/index.htm>].