

## ZENONE E I SUOI PARADOSSI, CON PARTICOLARE ATTENZIONE AL PARADOSSO D'ACHILLE

Zenone di Elea (V secolo a. C.) è un matematico e un filosofo greco della scuola eleatica, noto per i suoi paradossi filosofici. Zenone nacque a Elea (presso l'attuale Salerno), fu discepolo prediletto del filosofo greco Parmenide e lo accompagnò ad Atene a circa quarant'anni. Ad Atene Zenone insegnò filosofia. In seguito tornò ad Elea dove, secondo la tradizione, si unì a una cospirazione per liberare la sua città natale dal tiranno Nearco; quando il complotto fu scoperto, Zenone, sottoposto a tortura, si rifiutò di denunciare i suoi compagni.

Delle sue opere sono rimasti solo pochi frammenti, ma gli scritti di Platone e di Aristotele forniscono parecchi riferimenti ai suoi scritti. In modo particolare Aristotele si occupa di Zenone nella Fisica. Sembra, inoltre, che Simplicio, che visse nel VI secolo d. C., ebbe a disposizione un riassunto dell'opera originale di Zenone.

Zenone accettò la credenza parmenidea secondo cui l'essere è una sostanza unica e indifferenziata, ossia un'unità indivisibile, sebbene ai sensi possa apparire molteplice ed eterogenea. Parmenide afferma, infatti, che il linguaggio verte sempre su ciò che è, nel senso di ciò che esiste. Nominare qualcosa che non è, ossia qualcosa che non abbia alcun grado di realtà, è un assurdo, possibile solo nella fantasia, nel sogno o più semplicemente nell'errore. Un oggetto non esistente non può neppure essere pensato; al contrario pensare una cosa implica innanzi tutto attribuirle un qualche grado di esistenza.

Tutto ciò può essere riassunto in questa breve frase: "L'essere è, e non può non essere. Il non essere non è, e non può in alcun modo esistere". Emerge, dunque, un problema: come può ciò che non sussiste diventare oggetto del discorso? Come possono propriamente esistere il nulla, il vuoto, l'assenza? Secondo Parmenide è il linguaggio ordinario, la fallace doxa, a farci parlare di vuoto, di assenza ecc. Tutto ciò è evidentemente un assurdo perché una condizione di mancanza non ha la stessa realtà di una presenza. La frase "è buio" contiene un paradosso perché asserisce l'esistenza di un'irrealtà (come qualsiasi frase che affermi il non essere di una cosa). Quella di Parmenide è una dottrina "contraria all'opinione dei più" (doxa), lontana cioè da ciò che è comunemente detto buon senso. Per questo tutti i fenomeni in qualche modo legati al divenire, come il tempo, il movimento, il ciclo vitale degli organismi, la traslazione dei corpi nello spazio, e così via, sono negati. Infatti il divenire implica il passaggio dall'essere al non essere (da ciò che era a ciò che sarà) ed è quindi intimamente illogico. Errore è persino ogni frase che implica la pluralità: non è possibile dire che un qualsiasi A è uguale a un qualsiasi B, perché ciò implica che A non sia B. Il mondo così come appare alla sensazione, in cui le cose possono essere e non essere, è ammissibile solo in via di opinione, come ipotesi, quindi al di fuori di ogni discorso logico, coerente e rigoroso. Tutto ciò porta Parmenide a concepire l'universo come una sfera compatta, uniforme, immobile e immutabile. Con la sua riflessione Parmenide attacca le tesi sostenute dai filosofi ionici e in particolare quelle di Eraclito di Efeso il quale considerava il mondo in uno stato di continuo mutamento e le concezioni di Pitagora, secondo il quale sono i numeri a costituire la sostanza ultima dell'universo.

Tuttavia Zenone di Elea non elaborò una propria dottrina, si limitò a difendere quella del suo maestro Parmenide utilizzando per la prima volta il ragionamento paradossale. Non dimostrava direttamente la tesi del maestro ma, più sottilmente, confutava le confutazioni, ossia dimostrava come l'opinione dei suoi detrattori portasse a conclusioni ancora meno accettabili delle sue. Il ragionamento paradossale viene anche chiamato metodo dialettico: Zenone sviluppa un tipo di argomentazione che non si limita ad affermare una tesi, ma si premura di confutarne la negazione (ossia l'antitesi). Per capire il modo di procedere di Zenone è necessario riflettere sul significato del termine paradosso. La parola deriva dal greco (parà e doxa) e significa "contrario all'opinione comune". Si utilizza il termine paradosso in riferimento a Zenone con il significato di "affermazione o credenza contraria a quanto ci si aspetta o all'opinione accettata". La dialettica viene da Zenone, dunque, usata per difendere la tesi del maestro Parmenide che aveva affermato l'esclusivo essere dell'essere. Per avvalorare questa tesi, in base al metodo dialettico, Zenone ne confuta l'antitesi, la negazione: confuta l'esistenza di ciò che implicherebbe il non essere ossia l'esistenza del divenire e della molteplicità. Così Zenone elabora quelli che sono passati alla storia come i paradossi, confutazioni della tesi avversaria, dimostrazioni per assurdo, che pretendono di esplicitare conseguenze evidentemente inaccettabili che scaturirebbero dalle premesse della posizione avversaria e che l'avversario stesso non potrebbe ammettere. Il nome paradossi evidenzia il carattere specifico di tali argomenti che portano lontano dal senso comune pur seguendo una via che appare rigorosamente logica.

I paradossi zenoniani si dividono in due gruppi: quelli contro la molteplicità e quelli contro il divenire. Quelli contro la pluralità sono i seguenti: se le cose sono molte, il loro numero è, ad un tempo, finito e infinito: finito, perché esse non possono essere né più né meno di quante sono; infinito, perché tra due cose ce ne sarà sempre una terza e tra questa e le altre due ce ne saranno altre ancora; e così via all'infinito. Ma non è possibile che una stessa quantità sia finita e infinita nello stesso tempo, dunque le cose non sono affatto molteplici, come i sensi ci inducono a credere. Tutto è quindi Uno e il mondo è veramente lo Sfero predicato da Parmenide, senza parti al suo interno. Un'analoga contraddizione compare se si ammette che ogni cosa è costituita da molte unità: giacché se queste unità non hanno grandezza, le cose da esse composte non avranno grandezza; se le unità invece hanno una certa grandezza, le cose composte da infinite unità avranno una grandezza infinita.

### IL PRIMO PARADOSSO CONTRO IL MOVIMENTO

Gli argomenti più famosi sono quelli contro la realtà del movimento. Il primo argomento, detto "della dicotomia", sostiene che il movimento è assurdo e impossibile perché un corpo, per raggiungere una meta, dovrebbe prima raggiungere la metà della strada che deve percorrere; ma prima di raggiungere questa metà, dovrebbe raggiungere la metà di questa metà, e prima ancora la metà della metà della metà, e così all'infinito perché c'è sempre una metà della metà. Zenone dimostrava la sua proposizione affermando che ciò che si muove deve percorrere una certa distanza: ma essendo ogni distanza divisibile all'infinito, ciò che si muove deve prima attraversare la metà della distanza che percorre e poi il tutto. Ma prima di aver percorso tutta la metà della distanza, deve attraversare la metà di quella e di nuovo la metà di quest'ultima. Ma se le metà sono infinite per il fatto che di ogni tratto preso è possibile prendere la metà, è impossibile percorrere in tempo finito infiniti tratti. Poiché non posso percorrere uno spazio infinito in un tempo finito il movimento non esiste. Secondo i matematici moderni Zenone aveva errato nel modo di concepire le somme di serie infinite. Il percorso, infatti, compiuto dal corpo per raggiungere la meta può essere considerato una serie. Il tratto, percorso dal corpo, è una addizione ordinata e progressiva di infiniti termini che in questo caso sono frazioni, ma possono essere anche numeri interi. Questa serie può essere così rappresentata:  $1/2+1/4+1/8+1/16+1/32+\dots$ . In questa serie  $1/2$  rappresenta la metà del percorso,  $1/4$  la metà di questa metà,  $1/8$  la metà della metà della metà ecc. E' evidente che questa serie è infinita perché è sempre possibile aggiungere una frazione più piccola dimezzando la precedente. Ci sono tuttavia, due tipi di serie: la serie divergente e la serie convergente. La serie divergente non ammette una somma. Per esempio l'insieme dei numeri interi pari non ammette somma: si può aggiungere sempre un termine ulteriore e fare crescere la somma all'infinito. Se prendiamo la serie infinita dei numeri pari ( $0+2+4+6+8+10+12+\dots$ ) possiamo accrescere la somma finale aggiungendo un altro numero. Ciò non accade, invece, per la serie  $1/2+1/4+1/8+1/16+1/32+\dots$ . Questa, infatti, è una serie convergente in cui la sequenza delle somme parziali viene detta somma della serie. Infatti se indichiamo con  $S_n$  la somma della serie e con  $S_1=1/2$ ,  $S_2=1/2+1/4$ ,  $S_3=1/2+1/4+1/8$  si ha che se  $1/2=a_1$ ,  $1/4=a_2$ ,  $1/8=a_3$   $S_1=a_1$ ,  $S_2=S_1+a_2$ ,  $S_3=S_2+a_3$  e  $S_n=S_{n-1}+a_n$ . In questo caso esiste, dunque, una somma della serie. La serie, presa in esame, tende a 1 perché più termini vengono aggiunti più la somma si avvicina al limite 1:  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n=1$ .

Zenone ha errato nel formulare il paradosso perché ha sostenuto che la somma di un numero infinito di intervalli finiti di spazio e tempo debba essere infinita.

Secondo il paradosso di Zenone si può anche dimostrare che il corpo non solo non raggiunge la meta, ma addirittura non può iniziare la corsa. Infatti il corpo deve dapprima raggiungere il punto medio (C) tra il punto di partenza (A) e l'arrivo (B). E, tuttavia, prima ancora, deve raggiungere il punto medio tra A e C, e così via, all'infinito. Ciò mostra come tra due punti appartenenti ad un continuo esista sempre una infinità di punti. Tuttavia anche qui abbiamo in realtà una serie infinita, ma con limite 1.

#### IL SECONDO PARADOSSO E DISCUSSIONI CRITICHE INERENTI A TALE PARADOSSO

Il secondo argomento, detto "dell'Achille", sostiene che il movimento è talmente assurdo che, se per ipotesi, noi lo concedessimo e potessimo il più veloce Achille ad inseguire una tartaruga, ne verrebbe che egli non riuscirebbe mai a raggiungere questa, perché le stesse difficoltà viste nel precedente argomento si ripresenterebbero in altra forma: Achille dovrebbe prima giungere nel punto in cui la tartaruga si trovava alla partenza, successivamente nel punto in cui essa si trovava quando egli raggiunse il suo punto di partenza, e poi ancora in quel terzo punto in cui essa si trovava quando egli raggiunse il secondo e così via all'infinito. Questo argomento è lo stesso di quello della dicotomia, ma ne differisce per il fatto che la grandezza successivamente presa non viene più divisa per due.

Si può confutare questo paradosso facendo riferimento alle esperienze reali di gare di corsa. Tuttavia occorre trovare il punto debole dell'argomento dal punto di vista della logica matematica. Come nel caso della dicotomia dobbiamo tener conto di una serie infinita che ammette un limite.

Se il rapporto tra le velocità è di 10 a 1 e alla tartaruga viene concesso un vantaggio di 100 metri si ha:

$V_a$ = velocità di Achille	$V_a=1\text{m/sec}$
$V_T$ = velocità tartaruga	$V_T=0,1\text{m/sec}$
$S_t=V_t \cdot t$	$t=S_t/V_t$
$S_a=V_a \cdot t$	$t=S_a/V_a$
$S_t/V_t=S_a/V_a$	$S_t=(S_a/V_a) \cdot V_t$

$S_{t1}$ = spazio percorso dalla tartaruga quando Achille ha percorso il tratto di vantaggio della tartaruga=  $100/1\text{m/sec}$ .  $0,1\text{m/sec}=10$

$S_{t2}$ = spazio percorso dalla tartaruga quando Achille ha percorso lo spazio  $S_{t1}$  per cui la serie è la seguente:  $100+10+1+1/10+\dots$ . La serie si approssima al limite di  $111,111111\dots$ . Infatti dopo tale valore Achille si sarà affiancato alla tartaruga e da questo momento rimarrà sempre davanti a lei.

La forza logica del paradosso di Zenone è la tesi, che posta l'infinita divisibilità dello spazio, il movimento di un corpo dato non raggiungerà mai la sua meta, poiché, dovendo superare gli infiniti punti di cui consta qualsiasi distanza, dovrà impiegare un tempo infinito. Nella realtà ciò non accade perché Achille raggiungerà la tartaruga dopo  $111,1111\dots$  secondi. Vogliamo calcolare tale valore? Se  $t$  è un intervallo di tempo lo spazio percorso dopo tale tempo sarà:

$S_t= V_t \cdot t$  per la tartaruga

$$S_a = V_a \cdot t \text{ per Achille}$$

Se consideriamo il vantaggio che aveva la tartaruga lo spazio totale percorso da questa dopo il tempo  $t$  sarà:

$$S_{\text{totale tartaruga}} = 100 + S_t = 100 + V_t \cdot t$$

Achille raggiungerà la tartaruga quando  $S_{\text{totale tartaruga}} = S_a$  e quindi il tempo impiegato da Achille per raggiungere la tartaruga è il seguente:

$$S_a = S_t + 100$$

$$100 + V_t \cdot t = V_a \cdot t$$

$$100 = (V_a - V_t)t$$

$$t = 100 / (V_a - V_t)$$

$$t = 111,1111 \dots \text{secondi}$$

Aristotele cercherà di risolvere il problema distinguendo tra piano reale e piano del pensiero. Per Aristotele nella realtà esiste solo il finito, mentre l'infinito è semplicemente la possibilità mentale di aumentare indefinitamente, o diminuire indefinitamente, una qualsiasi quantità data. Per Russel ("I principi di matematica" 1903) il merito di Zenone è l'aver fatto emergere appunto questa sfasatura tra piano logico-matematico e piano fisico-reale.

Il paradosso della dicotomia e di Achille vogliono confutare, dunque, l'idea che lo spazio e il tempo siano continui. Invece i paradossi della freccia e dello stadio vogliono confutare l'idea opposta: respingono l'idea che il tempo sia composto di istanti privi di durata e che lo spazio sia composto di atomi privi di dimensioni.

#### IL TERZO PARADOSSO CONTRO IL MOVIMENTO

Il terzo argomento è detto "della freccia". Con questo paradosso Zenone vuole dimostrare che una freccia in volo, in realtà è in quiete. Quando la freccia percorre uno spazio determinato in ogni istante di questo spazio determinato occupa uno spazio uguale a se stessa. Dunque in ogni istante la freccia è immobile. E poiché il tempo è costituito da infiniti istanti, la somma di infinite immobilità non mi può dare il movimento. Infatti se si assume, come fa Zenone, che un istante non ha parti il movimento non è possibile. Poiché se la freccia si muovesse nel corso di un istante ci sarebbe una contraddizione con la definizione di istante perché l'istante sarebbe composto da parti in quanto la freccia sarebbe in una certa posizione nella prima parte di un istante e in una posizione diversa nella parte successiva dell'istante.

In questo paradosso si fa riferimento a un'estensione temporale analoga all'estensione spaziale. Per ogni punto lungo il percorso della freccia esiste un istante corrispondente. Zenone anticipa la concezione moderna di spazio e tempo. Secondo questa concezione spazio e tempo sono estensioni del medesimo tipo. Infatti tra due punti qualunque lungo una linea c'è sempre un altro punto e perciò una infinità di altri punti così come tra due istanti qualunque c'è sempre una infinità di istanti.

Cercherò di dimostrare la fallacia del paradosso di Zenone utilizzando una metafora tra il movimento della freccia e i fotogrammi di uno spezzone di un film. Per Zenone il movimento avviene secondo un numero finito di fotogrammi che sono determinati da istanti indivisibili, ma in realtà è infinito il numero di fotogrammi possibili compresi tra due istanti qualunque del volo della freccia. Dunque Zenone non tiene conto di tutta la serie di fotogrammi possibili.

#### IL QUARTO PARADOSSO CONTRO IL MOVIMENTO

Il quarto argomento contro il movimento è quello dello stadio. Due corridori (A, B) procedono in senso opposto; quando si incontrano ognuno di essi, vedendo l'altro avanzare rapidamente in senso contrario, crederà di correre molto veloce, ma un osservatore esterno (O) non avrà la stessa impressione e darà un giudizio ben diverso sulla velocità dei due atleti. Quindi la velocità è una misura relativa, dipendente dal punto di vista e dallo stato di moto di colui che la rileva. Il che, secondo Zenone; era un paradosso (in quanto per tutti i Greci la velocità rimase sempre un valore assoluto, dipendente unicamente dall'impeto dello spostamento). Per chiarire questo paradosso si può fare l'esempio dei treni moderni. Supponiamo l'esistenza di tre treni disposti su binari paralleli, di cui i primi due corrano in direzioni opposte con una velocità uguale a 100 km orari e il terzo sia immobile. Ora la velocità del treno posto al centro apparirà di 100 km orari nei confronti del treno che è immobile e di 200 km orari nei confronti del treno che si muove in senso opposto. Zenone ha anticipato la teoria della relatività del movimento con questa differenza: ciò che per Einstein è realtà (la relatività del movimento) per Zenone è un assurdo logico.

#### ALTRI PARADOSSI

Zenone espone anche l'argomento della sorite ("cumulo") che nega la quantità. Si prenda, dunque, un chicco di grano, poi due, tre e così via; alla fine se ne avrà un mucchio. Ma da quando parlerò di quantità e non più di chicco numero uno, chicco numero due, chicco numero tre ecc. Non è possibile stabilirlo, perciò la nozione di quantità è logicamente improponibile. Una curiosa variante di questo paradosso riguarda la calvizie: quanti capelli sono necessari perché una testa sia detta calva, spelacchiata o capelluta? Un'altra ancora riguarda il rumore: un chicco di grano cadendo a terra non fa rumore, un sacco di grano invece sì. Ma come è possibile ciò, se qualsiasi quantità di grano consiste sempre in una somma di chicchi? Ossia come può il rumore (del sacco) essere prodotto da una somma di silenzi (dei singoli chicchi)?

#### COMMENTO CONCLUSIVO

In conclusione si può affermare che i paradossi di Zenone hanno posto dei problemi circa la concezione dello spazio e del tempo che sono ancora oggi fonte di stimolo per una accurata riflessione. Ma forse il più grande merito di Zenone non è stato porre in rilievo le problematiche relative allo spazio e al tempo, ma quello di dar vita ad un nuovo modo di procedere nella riflessione: la dialettica.