ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
SESSIONE ORDINARIA – ANNO SCOLASTICO 2000/01
PROVA DI MATEMATICA – CORSO DI ORDINAMENTO

Problema 1.

Si consideri la seguente relazione tra le due variabili x e y: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a}$, dove a è un parametro reale.

a) Esprimere y in funzione di x e studiare la funzione così ottenuta, disegnandone il grafico in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali XOY.
b) Determinare per quali valori di a la curva disegnata risulta tangente o secante alla retta t di equazione $x+y=4$.
c) Scrivere l'equazione della circonferenza K che ha centro nel punto di coordinate (1;1) e intercetta sulla retta t una corda di lunghezza $2\sqrt{2}$.
d) Calcolare le aree delle due regioni finite di piano il cui cerchio delimitato da K è diviso dalla retta t.
e) Determinare per quale valore del parametro a il grafico, di cui al precedente punto a), risulta tangente alla circonferenza K.

Problema 2.

Considerato un qualunque triangolo ABC, siano D ed E due punti intermi al lato BC, tali che $\overline{BD}=\overline{DE}=\overline{EC}$. Siano poi M e N i punti medi, rispettivamente, dei segmenti AD e AE.

a) Dimostrare che il quadrilatero $DENM$ è la quarta parte del triangolo ABC.
b) Ammesso che l'area del quadrilatero $DENM$ sia $\frac{45}{2}a^2$ dove a è una lunghezza assegnata, e ammesso che l'angolo ABC sia acuto e si abbia inoltre $\overline{AB}=13a$, $\overline{BC}=15a$, verificare che tale quadrilatero risulta essere un trapezio rettangolo.
c) Dopo aver riferito il piano della figura, di cui al precedente punto b), ad un conveniente sistema di assi cartesiani, trovare l'equazione della parabola avente l'asse perpendicolare alla retta BC e passante per i punti M, N, C.
d) Calcolare infine le aree delle regioni in cui tale parabola divide il triangolo ADC.

QUESTIONARIO

1. Indicata con $f(x)$ una funzione di variabile reale, si sa che $f(x)\to l$ per $x\to a$, essendo l e a numeri reali. Dire se ciò è sufficiente per concludere che $f(a)=l$ e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

2. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, continua nel campo reale, tale che $f(0)=2$. Calcolare $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{2xe^x}$, dove e è la base dei logaritmi naturali.

3. Si consideri il cubo di spigoli AA', BB', CC', DD', in cui le facce opposte sono i quadrati $ABCD$ e $A'B'C'D'$. Sia E il punto medio dello spigolo AB. I piani $ACC'A'$ e $D'DE$ dividono il cubo in quattro parti. Dimostrare che la parte più estesa è il quintuplo di quella meno estesa.

4. Un tronco di piramide ha basi di aree B e b ed altezza h. Dimostrare, col metodo preferito, che il suo volume V è espresso dalla formula: $V=\frac{1}{3}h\left(B+b+\sqrt{Bb}\right)$. In ogni caso, esplicitare ciò che si ammette ai fini della dimostrazione.

5. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, derivabile in un intervallo $[a,b]$ e tale che, per ogni x di tale intervallo, risulti $f'(x)=0$. Dimostrare che $f(x)$ è costante in quell'intervallo.

6. Dimostrare che si ha: $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$, dove n e k sono numeri naturali qualsiasi, con $n>k>0$.

7. Fra i triangoli inscritti in un semicerchio, quello isoscele ha:

a) area massima e perimetro massimo
b) area massima e perimetro minimo
c) area minima e perimetro massimo
d) area minima e perimetro minimo.

Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.

8. Considerare la funzione $f(x) = ax^3 + 2ax^2 - 3x$, dove a è un parametro reale non nullo; determinare i valori di a per cui essa ha un massimo ed un minimo relativi e quelli per cui non ha punti estremanti.

9. Il limite della funzione $f(x) = \dfrac{\sin x - \cos x}{x}$, quando x tende a $+\infty$:

a) è uguale a 0
b) è uguale a 1
c) è un valore diverso dai precedenti
d) non è determinato.

Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.

10. Si consideri la funzione $f(x) = \dfrac{x + \sin x}{x - \cos x}$. Stabilire se si può calcolare il limite per $x \to \infty$ e spiegare se il calcolo possa essere effettuato ricorrendo al teorema di De l'Hospital.