Chapter 1

Una introduzione alla teoria delle code

1.1 I processi nascita e morte

Mostriamo come dai processi nascita e morte si può giungere a definire il concetto di equilibrio statistico.

Si consideri un sistema nel quale per ogni istante di tempo $t \geq 0$ si possa definire una variabile casuale $N(t)$ con realizzazioni $0, 1, 2, \cdots$ ($N(t)$ è una variabile casuale diversa fissato un determinato valore di $t \geq 0$) si studia il processo stocastico, ovvero la famiglia di variabili casuali non numerabili $N(t), t \geq 0$ che origina da questa variabile casuale.

In pratica la variabile casuale $N(t)$ assume dei valori interi che possono rappresentare il numero di chiamate che arrivano ad un sistema teelfonico, il numero di clienti in coda e così via.

Si dice che il processo è nello stato (E_j) al tempo t quando $N(t) = j$.

Un *processo nascita e morte* si basa sui seguenti postulati: dato un qualche istante di tempo t in cui il sistema è nello stato E_j la probabilità condizionale che nell'intervallo di tempo $(t, t + h)$ avvenga

1. la transizione $E_j \to E_{j+1}$ $(j = 0, 1, \cdots)$ è uguale a $\lambda_j h + o(h)$[1] per $h \to 0$
2. la transizione $E_j \to E_{j_1}$ $(j = 0, 1, \cdots)$ è uguale a $\mu_j h + o(h)$ per $h \to 0$
3. più di una transizione è $o(h)$ per $h \to 0$

Vediamo come per questo tipo di processi si giunge a definire lo stato stazionario, ovvero lo stato che raggiunge il sistema dopo una fase iniziale. Prima occorre definire le equazioni che regolano il comportamento di questo processo, in pratica si tratta di definire come in un istante $t + h$ la probabilità che il sistema sia

[1] una quantità $f(h)$ si dice eguale ad $o(h)$ quando $h \to 0$ se $\lim_{h \to 0} f(h)/h = 0$. Si noti che se $f(h)$ è $o(h)$ anche $xf(h) = o(h)$ per ogni x finito.

nello stato E_j ovvero che si abbia $N(t+h) = j$. Sulla base del teorema della probabilità totale si ha:

$$P\{N(t+h) = j\} = \sum_{i=0}^{\infty} P\{N(t+h) = j | N(t) = i\} P\{N(i) = i\} \tag{1.1}$$

quando $h \to 0$, dai postulati segue:

$$P\{N(t+h) = j | N(t) = i\} = \begin{cases} \lambda_{j-1} h + o(h) & i = j-1 \\ \mu_{j+1} h + o(h) & i = j+1 \\ o(h) & |i-j| > 2 \end{cases}$$

In ogni caso deve valere $\sum_{k=0}^{\infty} P\{N(t+h) = k | N(t) = j\} = 1$ e quindi, quando $h \to 0$, si ottiene:

$$P\{N(t+h) = j | N(t) = j\} = 1 - (\lambda_j + \mu_j)h + o(h)$$

che rappresenta la probabilità che si resti nello stesso stato. Per semplicare la notazione della 1.1 poniamo $P\{N(t) = j\} = P_j(t)$ e riscriviamola utilizzando il risultato precedente:

$$P_j(t+h) = \lambda_{j-1} h P_{j-1}(t) + \mu_{j+1} h P_{j+1}(t) + [1 - (\lambda_j + \mu_j)h] + o(h)$$

$$h \to 0,\ j = 0, 1, \cdots,\ \lambda_{-1} = \mu_0 = P_{-1}(t) = 0$$

e quindi risistemando e dividendo per h si ottiene:

$$\begin{gathered} \frac{P_j(t+h) - P_j(t)}{h} = \lambda_{j-1} P_{j-1}(t) + \mu_{j+1} P_{j+1}(t) - (\lambda_j + \mu_j) P_j(t) + \frac{o(h)}{h} \\ h \to 0,\ j = 0, 1, \cdots,\ \lambda_{-1} = \mu_0 = P_{-1}(t) = 0 \end{gathered} \tag{1.2}$$

Quando $h \to 0$ si ottiene un insieme di equazioni differenziali che caratterizzano il processo di nascita e morte:

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt} P_j(t) = \lambda_{j-1} P_{j-1}(t) + \mu_{j+1} P_{j+1}(t) - (\lambda_j + \mu_j) P_j(t) \\ j = 0, 1, \cdots,\ \lambda_{-1} = \mu_0 = P_{-1}(t) = 0 \end{gathered} \tag{1.3}$$

Se al tempo $t = 0$ il sistema è nello stato E_i, le condizioni iniziali sono date da:

$$P_j(0) = \begin{cases} 1 & j = 1 \\ 0 & j \neq 1 \end{cases} \tag{1.4}$$

I coefficienti λ_j e μ_j sono chiamati rispettivamente *tassi di nascita* e *tassi di morte*; si parla di *processi di pure nascite* quando $\mu_j = 0$ per ogni valore di j e, simmetricamente, di *processi di pure morti* quando $\lambda_j = 0$ per ogni valore di j.

Consideriamo il processo di pure nascite con tasso di nascita costante $\lambda_j = \lambda$ che può modellare il processo di arrivo dei clienti in una coda, supponendo lo stato iniziale eguale ad E_0 (sistema vuoto) le equazioni precedenti divengono:

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt} P_j(t) = \lambda P_{j-1}(t) - \lambda P_j(t) \\ j = 0, 1, \cdots,\ \lambda_{-1} = P_{-1}(t) = 0 \end{gathered} \tag{1.5}$$

e

$$P_j(0) = \begin{cases} 1 & j = 1 \\ 0 & j \neq 1 \end{cases} \tag{1.6}$$

La soluzione può essere ricavata per ricorrenza per ogni $t \geq 0$.
Iniziamo con $j = 0$ dove $P_{0-1} = P_{-1} = 0$:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}P_0(t) = -\lambda P_0(t) \\ P_0(0) = 1 \end{cases} \tag{1.7}$$

La soluzione è quindi[2]:

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

Consideriamo ora $j = 1$:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}P_1(t) = \lambda P_0(t) - \lambda P_1(t) \\ P_1(0) = 0 \end{cases}$$

che si riscrive, utilizzando la soluzione precedente, come:

$$\begin{cases} P_1^{'}(t) = \lambda e^{-\lambda t} - \lambda P_1(t) \\ P_1(0) = 0 \end{cases}$$

anche per questa equazione differenziale esiste una soluzione [3] che nel nostro caso è data da:

$$P_1(t) = e^{-\lambda \int_0^t dx} \int_0^t e^{-\lambda x} e^{\lambda x} dx == \lambda t e^{-\lambda t}$$

Per $j = 2$:

$$\begin{cases} P_2^{'}(t) = \lambda P_1(t) - \lambda P_2(t) \\ P_1(0) = 0 \end{cases}$$

che si riscrive, utilizzando la soluzione precedente, come:

$$\begin{cases} P_2^{'}(t) = \lambda^2 e^{-\lambda t} - \lambda P_2(t) \\ P_2(0) = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è simile alla precedente. In generale si ha che la soluzione per la coppia (1.5)-(1.6) è data da:

$$P_j(t) = \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} \quad j = 0, 1, \cdots \tag{1.8}$$

[2] l'equazione differenziale $y^{'} = y$ ha come soluzione la famiglia di funzioni $y = e^x + C$

[3] L'equazione differenziale

$$\begin{cases} y^{'} + R(t)y = Q(t) \\ f(a) = b \end{cases}$$

ha come soluzione:

$$\begin{cases} f(t) = be^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int_a^t Q(x) e^{A(x)} dx \\ A(t) = \int_a^t R(x) dx \end{cases}$$

e verifica:

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_j(t) = 1 \quad t \geq 0$$

La (1.8) rappresenta una distribuzione di Poisson con media λt e quindi $N(t)$ ha una distribuzione di Poisson e $\{N(t), t \geq 0\}$ è un processo di Poisson (o di conteggio) [4].

1.1.1 coda con un servitore senza coda

Come caso particolare di processo nascita e morte consideriamo il processo a due stati E_0 ed E_1 che modella una coda con un servitore nel quale non è possibile attendere in coda; questo sistema potrebbe rappresentare un modello per le chiamate telefoniche in cui il servitore è la centrale telefonica di zona e l'utente quando riceve il segnale di occupato attacca essendo inutile aspettare. Lo stato E_0 corrisponde a servitore libero e E_1 corrisponde a servitore occupato. La probabilità di una richiesta in $(t, t+h)$ è $\lambda t + o(h)$ con $h \to 0$, la probabilità che, se il servitore è occupato, termini di servire il cliente nel tempo $(t, t+h)$ è $\mu t + o(h)$ con $h \to 0$. Vista la particolare natura del modello si ha:

$$\begin{cases} \lambda_0 = \lambda \\ \lambda_j = 0 \quad j \neq 0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \mu_1 = \mu \\ \lambda_j = 0 \quad j \neq 1 \end{cases}$$

in questo modo l'equazione (1.3) diviene:

$$\begin{cases} P_0^{'}(t) = \mu P_1(t) - \lambda P_0(t) \\ \\ P_1^{'}(t) = \lambda P_0(t) - \mu P_1(t) \end{cases}$$

La soluzione può ricavarsi notando che la somma delle due equazioni differenziali precedenti è 0:

$$P_0^{'} + P_1^{'} = \frac{d}{dt}[P_0(t) + P_1(t)] = 0$$

e quindi la somma delle probabilità è costante per ogni $t \geq 0$:

$$P_0(t) + P_1(t) = c$$

ma essendo P_0 e P_1 delle probabilità c deve valere 1 e quindi $P_1(t) = 1 - P_0(t)$ che sostituito nella prima delle due componenti della coppia di equazioni differenziali che regola il processo dà:

$$P_0^{'}(t) + (\lambda + \mu)P_0(t) = \mu$$

[4] fate riferimento all'altra dispensa per i dettagli.

che ha come soluzione generale:

$$P_0(t) = \underbrace{\frac{\mu}{\lambda+\mu}}_{in\ equilibrio} + \underbrace{(P_0(0) - \frac{\mu}{\lambda+\mu})e^{-(\lambda+\mu)t}}_{transitoria}$$

e per simmetria

$$P_1(t) = \underbrace{\frac{\mu}{\lambda+\mu}}_{in\ equilibrio} + \underbrace{(P_1(0) - \frac{\mu}{\lambda+\mu})e^{-(\lambda+\mu)t}}_{transitoria}$$

Nelle due equazioni la parte indicata come transitoria per $t \to \infty$ tende a 0, la parte indicata con in equilibrio è inipendente dai valori nell'istante iniziale ($P_0(0)$ e $P_1(0)$). Quindi, dopo un periodo di tempo sufficientemente lungo il sistema raggiunge l'equilibrio statistico. In questo stato il sistema è *stazionario* ovvero le probabilità non cambiano col tempo ed è anche *ergodico*, in ogni realizzazione del processo, la parte di tempo spesa nello stato E_j nell'intervallo di tempo $(0, x)$ converge alla probabilità di equilibrio P_j quando $x \to \infty$.

Il concetto può essere esteso a tutti i sistemi di teoria delle code. Considerando lo stato di equilibrio statistico le soluzioni possono essere ricavate direttamente dalle equazioni (1.3) ponendo il termine derivato eguale a 0, giustificando le equazioni di bilanciamento sugli stati[5].

1.2 Teoria delle code

Le altre fotocopie sulle code vi offrono una serie di formule per ricavare i principali parametri di interesse di una coda. È opportuno riflettere sul concetto di *multiplexing statistico* ovvero sul fatto che può essere più vantaggioso usare più servitori con una sola coda che lo stesso numero di servitori ma ciascuno con una sua coda.

[5]anche quando avevamo parlato del modello di Gilbert si era fatta questa ipotesi e si era usato quest'ultimo procedimento.