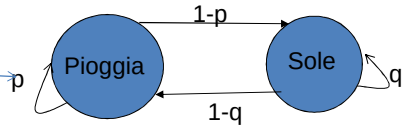
16/12/2013

Informatica per la Finanza
Informatica per le Scienze Economiche
Informatica e Programmazione per il Turismo

Catene di Markov

- Si consideri la seguente situazione:
  - In una località quando
    - un giorno piove il giorno dopo piove con una probabilità p (c'è il sole con probabilità 1-p);
    - un giorno c'è il sole il giorno dopo c'è il sole con una probabilità q (piove con probabilità 1-q).
  - È possibile conoscere la probabilità di pioggia o di sole?

Rappresentazione Mediante grafo



Catene di Markov

- Al problema può essere data una risposta analitica ma è anche possibile usare una simulazione Montecarlo
  - Si parte da una delle due situazioni (stati)
  - Si genera numero casuale ed in base la risultato si decide se restare o meno nello stesso stato
  - Si ripetono i punti precedenti per N volte tenendo una statistica delle volte che si è passati per ciascun stato

Catene di Markov

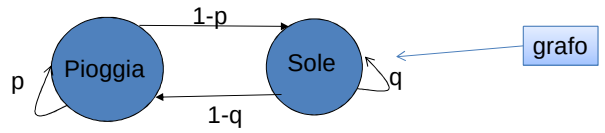
```
function [fP fS]=tempo(p, q, N)

    St=(rand<0.5);  %1 piove; 0 sole
    gP=0; gS=0;

    pb = rand(1,N);
    for i=1:N
        if St==1   %oggi piove
            gP = gP + 1;
            if pb(i)> p
                St=0;
            end
        else
            gS = gS + 1;
            if pb(i) > q
                St=1;
            end
        end
    end
    fP = gP/N;
    fS = gS/N;
end
```

```
A=[];
for i=1:10
    [x, y]=tempo(0.3, 0.8, 10^4);
    A=[A; x y];
end
```

```
A = 0.2194    0.7806
    0.2210    0.7790
    0.2192    0.7808
    0.2226    0.7774
    0.2159    0.7841
    0.2252    0.7748
    0.2268    0.7732
    0.2273    0.7727
    0.2263    0.7737
    0.2259    0.7741

>> mean(A)
0.2230    0.7770

>> std(A,1)
0.0037    0.0037
```

Catene di Markov

– Le probabilità di passare da uno stato ad un altro possono essere formalizzate anche attraverso la matrice di transizione



$$M = \begin{bmatrix} P(pioggia / pioggia) & P(sole / pioggia) \\ P(pioggia / sole) & P(sole / sole) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{bmatrix}$$

Matrice di transizione

La somma delle righe vale sempre 1

Catene di Markov

- In maniera formale:
  - Le catene di Markov sono dei processi stocastici a tempo discreto in cui lo stato futuro dipende solo dallo stato presente.
  - Sono descritte:
    - mediante grafi
      - Quando il numero di stati è elevato la rappresentazione diviene poco comprensibile.
    - Mediante la matrice di transizione

Catene di Markov

Matrice di transizione

– Se S1, S2, ..., Sn sono gli stati la matrice di transizione ha questa forma:

$$M = \begin{array}{c} \\ S1 \\ S2 \\ \vdots \\ Sn \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} S1 & S2 & \cdots & Sn \end{array} \\ \begin{bmatrix} p(S1/S1) & p(S2/S1) & \cdots & p(Sn/S1) \\ p(S1/S2) & p(S2/S2) & \cdots & p(Sn/S2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p(S1/Sn) & p(S2/Sn) & \cdots & p(S1/Sn) \end{bmatrix} \end{array}$$

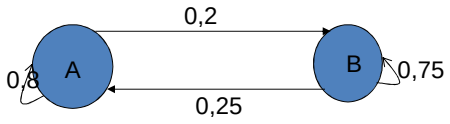
Catene di Markov

– Una società ha due tipologie di clienti Fedeli (A) e Occasionali (B).
  - I clienti di tipo A restano di quella tipologia con una probabilità di 80% passano nella categoria B con una probabilità del 20%
  - I clienti di tipo B restano di quella tipologia nel 75% dei casi e divengono di tipo A nel restante 25%
– All'istante t=0 i clienti di tipo A sono il 60% ed i clienti di tipo B sono il 40%
– Al tempo t=5 come quanti clienti ci sono di ogni tipologia?
– Dopo un tempo sufficientemente lungo esiste una distribuzione limite delle due tipologie di clienti?

Catene di Markov

– Nel nostro esempio gli stati sono solo 2 cliente Fedele (A) e cliente Occasionale (B).
– In base alla descrizione data si ha la seguente matrice:

$$M = \begin{bmatrix} p(A/A) & p(B/A) \\ p(A/B) & p(B/B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}25 & 0.75 \end{bmatrix}$$



Catene di Markov

– Al tempo t=5 come quanti clienti ci sono di ogni tipologia?
– Il problema si può risolvere analiticamente sapendo che se la distribuzione al tempo t è descritta dal vettore di probabilità P_t, la distribuzione al tempo t+1 (P_{t+1}) sarà data da:

$$P_{t+1} = P_t \cdot M$$

$$P_{t+N} = P_t \cdot M^N$$

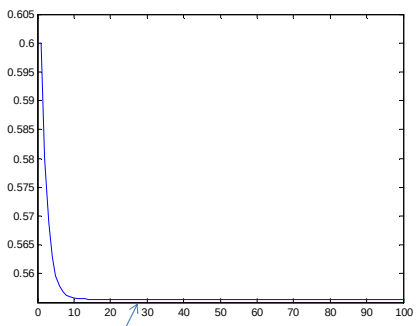
Catene di Markov

```
function [Pfin] = Markov(M,Pin, N)
%data la catena di Markov M, la distribuzione
%iniziale Pin e la durata N determina Pfin

  Pfin = Pin*M^N;
end
```


Catene di Markov

- Alla seconda domanda rispondiamo in maniera intuitiva con il seguente codice:

```
Pf=Pin;
for i=1:99
    Pf=[Pf; markov(M,Pf(i,:),1)];
end

plot(1:100,Pf(:,1));
```



Prende il primo valore di Pf

Catene di Markov

- Nelle catene di Markov dopo un transitorio le probabilità dei singoli stati si assestano su di un valore di probabilità (*distribuzione limite*).
- Se
  - M è la matrice di transizione
  - P=[p(s1), ..., p(sn)] la matrice di probabilità dei singoli stati
  - Risolvendo:

$$\begin{cases} P = P \times M \\ 1 = \sum_i p(si) \end{cases}$$

Si ricava la distribuzione limite

Catene di Markov

- Dato il sistema a due stati P=[P(A), P(B)]
  - Allora

$$M = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{bmatrix} \quad P * M = P$$

  - Risolvendo il sistema, dove una delle due prime equazioni è superflua, si ottiene la distribuzione limite

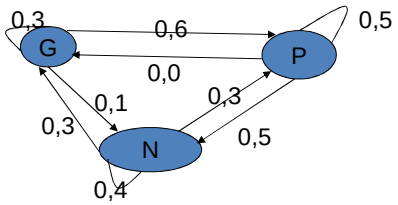
$$\begin{cases} 0{,}8 \cdot p(A) + 0{,}25 \cdot p(B) & = p(A) \\ 0{,}2 \cdot p(A) + 0{,}75 \cdot p(B) & = p(B) \\ p(A) + p(B) & = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -0{,}2 \cdot p(A) + 0{,}2 \cdot p(B) & = 0 \\ 0{,}2 \cdot p(A) - 0{,}25 \cdot p(B) & = 0 \\ p(A) + p(B) & = 1 \end{cases}$$

Catene di Markov

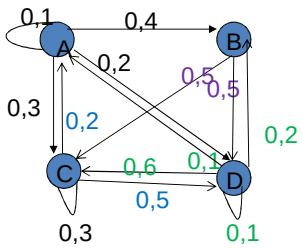
Usando Matlab (con la seconda e terza riga):

```
M=[0.2, -0.25; 1 1]
b=[0;1]
P=M\b
P =[0.5556; 0.4444]
```


Catene di Markov



$$M = \begin{array}{c} \\ \text{Parte} \end{array} \begin{array}{c} \text{Arriva} \\ \begin{array}{ccc} G & P & N \end{array} \\ \begin{array}{c} G \\ P \\ N \end{array} \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{bmatrix} \end{array}$$



$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ M= \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Catene di Markov

- La simulazione delle catene di Markov è abbastanza agevole tenendo conto che:
  - è indifferente lo stato di partenza,
  - basta gestire per ogni nodo la distribuzione delle probabilità ricavata dalla riga opportuna della matrice di transizione
    - Per la gestione delle probabilità di transizione di ogni stato si possono usare le funzioni già viste

Esercizio Propedeutico

```
function [ M ] = estraiDist( dist, n,m )
% data una distribuzione di probabilità
% ricava una matrice n x m di valori
% distribuiti secondo la distribuzione
% data

C = cumsum(dist);

M = rand(n,m);%distribuiti secondo U(0,1)

for i=1:n
    for j=1:m
       v=find(M(i,j) < C);
       M(i,j)=v(1);
    end
end
end
```

```
C=[0.2 0.5 0.7 1.0]
```

```
M =[0.9044    0.0164
    0.1107    0.0912
    0.6038    0.9057]
```

La posizione in C dà lo stato

```
stato=[1 2 3 4]
```

```
M = [4     1
     1     1
     3     4]
```

Esercizio Propedeutico

```
>> P=[0.1  0.4   0.3  0.2]
P =
  0.1000 0.4000 0.3000 0.2000

>> C=cumsum(P)
C =
  0.1000 0.5000 0.8000 1.0000
```

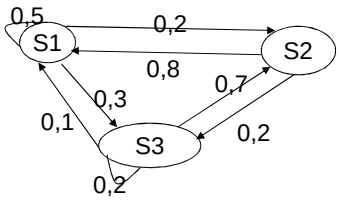
Generazione di una cumulata da un vettore

Generazione di una cumulata da una matrice. Le righe contengono la funzione di densità.
In maniera equivalente:
`cM=cumsum(M')'`

```
M = 0.5000    0.2000    0.3000
    0.8000         0    0.2000
    0.1000    0.7000    0.2000

>> cM = cumsum(M,2)
cM =
    0.5000    0.7000    1.0000
    0.8000    0.8000    1.0000
    0.1000    0.8000    1.0000
```


Esercizio

```
function [ Pcalc, Pteor ] =markovGenerale(M, n)
    %calcolo della cumulata di ogni riga di M
    MC=cumsum(M,2)

    Pcalc=zeros(1,length(M));
    stato = 1;
    r = rand(1,n);
    for i=1:n  %tempo
        for j=1:length(M)
            if j == stato
                for k=1:length(M)
                    if r(i) < MC(j,k)
                        stato = k;
                        Pcalc(k) = Pcalc(k) + 1;
                        break
                    end
                end
                break
            end
        end
    end
    Pcalc=Pcalc/n;
    %calcolo distribuzione limite teorica
    Pteor = distTeorica(M);
end
```




```
M=[ 0.5  0.2  0.3
    0.8  0    0.2
    0.1  0.7  0.2]
```

Esercizio

```
M=[0.5 0.2  0.3
   0.8   0  0.2
   0.1 0.7  0.2]
```

```
function [teo]= distTeorica(M)
    Q = M' - eye(length(M));
    Q = [Q; ones(1,length(M))];
    Q = Q(2:end, :);
    b = [zeros(length(Q)-1,1);1];
    teo = Q\b;
    teo=teo';
end
```

```
[-0.5  0.8  0.1 =[0.5 0.8 0.1   - [1  0  0
  0.2 -1.0  0.7   0.2   0 0.7      0  1  0
  0.3  0.2 -0.8]  0.3 0.2 0.2]     0  0  1]
```

```
[-0.5  0.8  0.1
  0.2 -1.0  0.7
  0.3  0.2 -0.8
  1.0  1.0  1.0]
```

```
0
0
1
```

```
[ 0.2 -1.0  0.7
  0.3  0.2 -0.8
  1.0  1.0  1.0]
```

$$[p(s1)\quad p(s2)\quad p(s3)]\cdot\begin{bmatrix}0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3\\ 0{,}8 & 0 & 0{,}2\\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}2\end{bmatrix}=[p(s1)\quad p(s2)\quad p(s3)]$$

$$[0{,}5p(s1)+0{,}8p(s2)+0{,}1p(s3)\quad 0{,}2p(s1)+0{,}7p(s3)\quad 0{,}3p(s1)+0{,}2p(s2)+0{,}2p(s3)]$$

$$=[p(s1)\quad p(s2)\quad p(s3)]$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}0{,}5p(s1)+0{,}8p(s2)+0{,}1p(s3)=p(s1)\\ 0{,}2p(s1)+0{,}7p(s3)=p(s2)\\ 0{,}3p(s1)+0{,}2p(s2)+0{,}2p(s3)=p(s3)\\ p(s1)+p(s2)+p(s3)=1\end{cases}$$