Cilc per tutti gli appunti *(AUTOMAZIONE – TRATTAMENTI TERMICI ACCIAIO – SCIENZA delle COSTRUZIONI…)*

e-mail per suggerimenti

INTEGRALE DI SIMPSON

Siano M_g e $g(x)$ due funzioni continue, di cui una lineare, e siano rispettivamente f_m e g_m i loro valori nel punto medio dell'intervallo $[a,b]$ d'integrazione. L'integrale del prodotto è dato dalla formula:

$$\int_b^a f(x)\cdot g(x)\cdot dx = \frac{l}{6}\left[f(a)\cdot g(a) + 4 f_m \cdot g_m + f(b)\cdot g(b)\right] \qquad (1)$$

Ove

l è la lunghezza dell'intervallo $[a,b]$: $l = b - a$

a $f(a)$, $g(a)$ sono, rispettivamente, i valori delle due funzioni calcolate nel punto iniziale "a" dell'intervallo $[a,b]$

d $f(b)$, $g(b)$ sono, rispettivamente, i valori delle due funzioni calcolate nel punto finale "b" dell'intervallo $[a,b]$

f_m, g_m sono, rispettivamente, i valori delle due funzioni calcolate nel punto medio "m" dell'intervallo $[a,b]$

Sono qui di seguito riportati diversi casi di risultati dell'integrale, eseguito sul prodotto di due funzioni, che più usualmente si presentano nelle soluzioni di problemi di statica, risolti con il metodo dei lavori virtuali.

Per ottenere l'espressione risultante (1) dell'integrale in forma semplificata, ogni funzione si riferisce ad un valore caratteristico, e precisamente:

M_f Valore caratteristico per la funzione $f(x)$

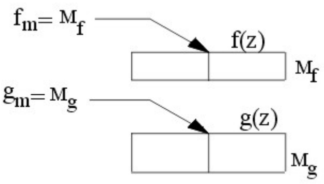
M_g Valore caratteristico per la funzione $g(x)$

Dove M_f, M_g sono riportati rispettivamente nel diagramma di $f(x)$ e di $g(x)$, come rappresentati nelle seguenti figure, e indicanti generalmente i valori massimi nell'intervallo $[a,b]$.

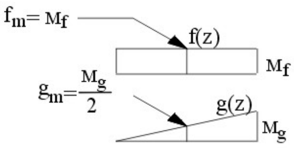
I valori, $f(a)$, $g(a)$, $f(b)$, $g(b)$, f_m, g_m sono calcolati rispetto ai valori caratteristici M_f, M_g

Qui di seguito sono riportati risultati dell'integrale, nei casi più caratteristici, eseguito su un intervallo unitario $l = b - a = 1$.

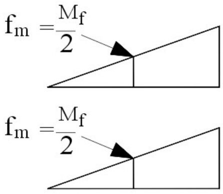
Ovviamente il risultato finale va poi moltiplicato per la lunghezza effettiva $l = b - a$ di integrazione



$$\int_b^a f(x)\cdot g(x)\cdot dx = \frac{1}{6}\left[M_f \cdot M_g + 4M_f \cdot M_g + M_f \cdot M_g\right] = 1\cdot M_f \cdot M_g$$

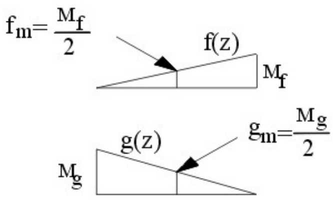


$$\int_b^a f(x)\cdot g(x)\cdot dx = \frac{1}{6}\left[0 + 4M_f\cdot\frac{M_g}{2} + M_f\cdot M_g\right] = 1\cdot\frac{1}{2}M_f\cdot M_g$$



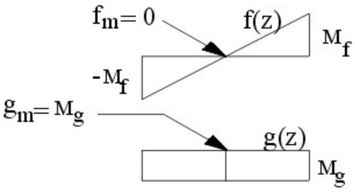
(1)

$$\int_b^a f(x)\cdot g(x)\cdot dx = \frac{1}{6}\left[0 + 4\frac{M_f}{2}\cdot\frac{M_g}{2} + M_f\cdot M_g\right] = 1\cdot\frac{1}{3}M_f\cdot M_g$$



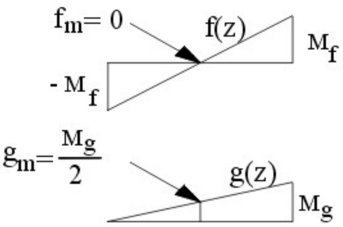
(2)

$$\int_b^a f(x)\cdot g(x)\cdot dx = \frac{1}{6}\left[0 + 4\frac{M_f}{2}\cdot\frac{M_g}{2} + 0\right] = 1\cdot\frac{1}{6}M_f\cdot M_g$$



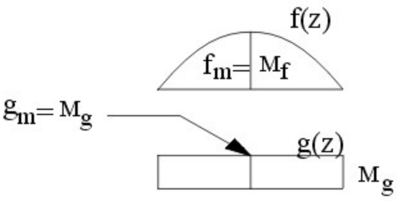
(3)

$$\int_b^a f(x)\cdot g(x)\cdot dx = \frac{1}{6}\left[- M_f\cdot M_g + 0 + M_f\cdot M_g\right] = 0$$



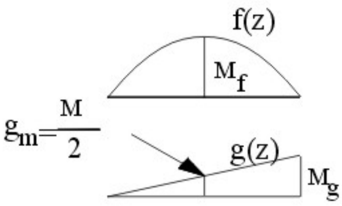
(4)

$$\int_b^a f(x)\cdot g(x)\cdot dx = \frac{1}{6}\left[0 + 0 + M_f\cdot M_g\right] = 1\cdot\frac{1}{6}M_f\cdot M_g$$



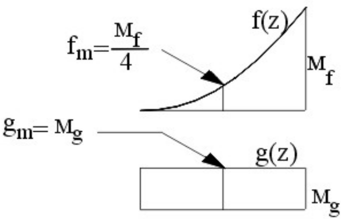
(5)

$$\int_b^a f(x)\cdot g(x)\cdot dx = \frac{1}{6}\left[0 + 4M_f\cdot M_g + 0\right] = 1\cdot\frac{2}{3}M_f\cdot M_g$$



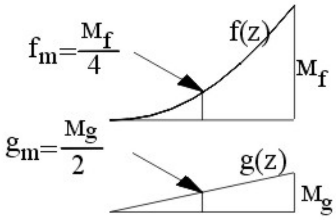
(6)

$$\int_b^a f(x)\cdot g(x)\cdot dx = \frac{1}{6}\left[0 + 4M_f\cdot\frac{M_g}{2} + 0\right] = 1\cdot\frac{1}{3}M_f\cdot M_g$$



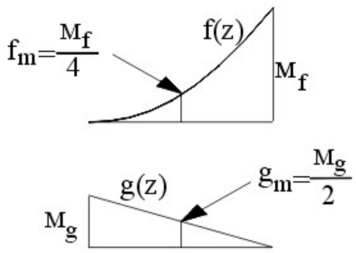
(7)

$$\int_b^a f(x) \cdot g(x) \cdot dx = \frac{1}{6}\left[0 + 4\frac{M_f}{4} \cdot M_g + M_f \cdot M_g\right] = 1 \cdot \frac{1}{3} M_f \cdot M_g$$



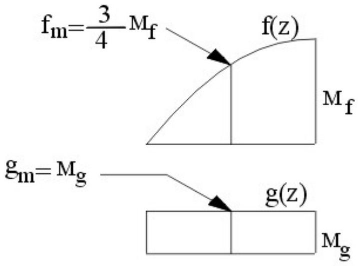
(8)

$$\int_b^a f(x) \cdot g(x) \cdot dx = \frac{1}{6}\left[0 + 4\frac{M_f}{4} \cdot \frac{M_g}{2} + M_f \cdot M_g\right] = 1 \cdot \frac{1}{4} M_f \cdot M_g$$



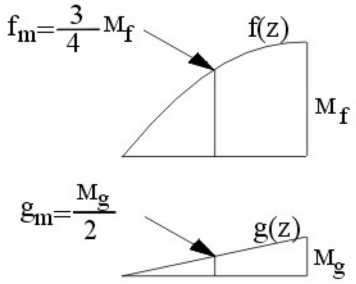
(9)

$$\int_b^a f(x) \cdot g(x) \cdot dx = \frac{1}{6}\left[0 + 4\frac{M_f}{4} \cdot \frac{M_g}{2} + 0\right] = 1 \cdot \frac{1}{12} M_f \cdot M_g$$



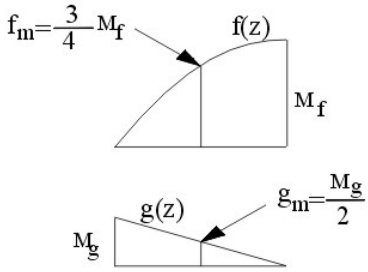
(10)

$$\int_b^a f(x) \cdot g(x) \cdot dx = \frac{1}{6}\left[0 + 4\frac{3}{4} M_f \cdot M_g + M_f \cdot M_g\right] = 1 \cdot \frac{2}{3} M_f \cdot M_g$$



(11)

$$\int_b^a f(x) \cdot g(x) \cdot dx = \frac{1}{6}\left[0 + 4\frac{3}{4} M_f \cdot \frac{M_g}{2} + M_f \cdot M_g\right] = 1 \cdot \frac{5}{12} M_f \cdot M_g$$

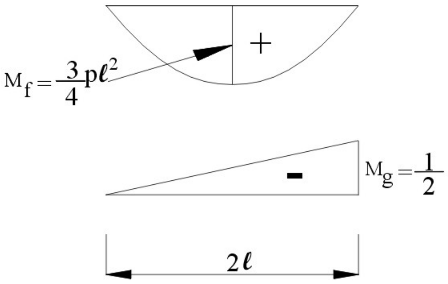


(12)

$$\int_b^a f(x) \cdot g(x) \cdot dx = \frac{1}{6}\left[0 + 4\frac{3}{4} M_f \cdot \frac{M_g}{2} + 0\right] = 1 \cdot \frac{1}{4} M_f \cdot M_g$$

NB) Le funzioni non lineari si riferiscono a tratti di parabola nell'intervallo $b - a = 1$

Esempio



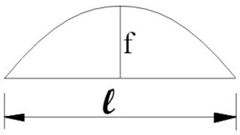
Si debba determinare l'integrale del prodotto delle due funzioni con diagrammi indicati nella figura. Nel caso specifico si ha:

$M_f = \frac{3}{4} \cdot pl^2$ $\qquad M_g = \frac{1}{2}$ $\qquad$ intervallo di integrazione: $b - a = 2l$

Utilizzando il risultato indicato nello schema (6), dove al posto della lunghezza unitaria (1) si pone l'intervallo reale di integrazione $b - a = 2l$, si ottiene:

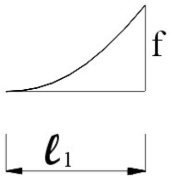
$$\int_b^a f(x) \cdot g(x) \cdot dx = 2l \cdot \frac{2}{3} M_f \cdot M_g = 2l \cdot \frac{2}{3}\left(+ \frac{3}{4} pl^2 \right) \cdot \left(- \frac{1}{2} \right) = - \frac{1}{2} pl^3$$

PARAMETETRI INTERESSANTI SEGMENTI DI PARABOLA



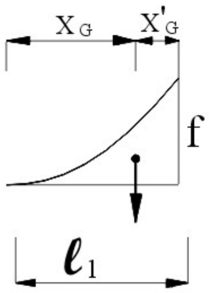
Area racchiusa dal segmento

$$Area = \frac{2}{3} f \cdot l$$



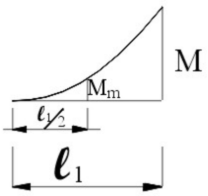
Area racchiusa dal segmento

$$Area = \frac{1}{3} f \cdot l$$



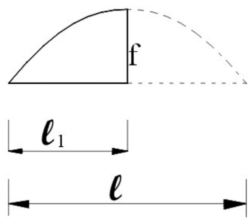
Baricentro della superficie

$$\begin{cases} x_G = \frac{3}{4} l_1 \\ x'_G = \frac{1}{4} l_1 \end{cases}$$



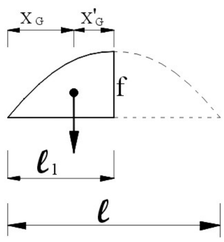
Valore nel punto medio rispetto al valore massimo M

$$M_m = \frac{1}{4} M$$



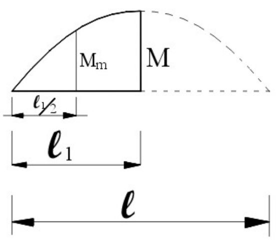
Area racchiusa dal segmento

$$Area = \frac{2}{3} f \cdot l_1$$



Baricentro della superficie

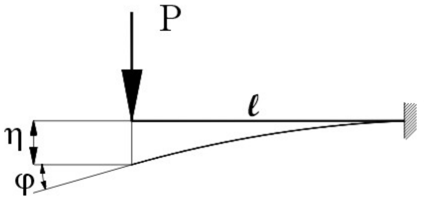
$$\begin{cases} x_G = \frac{5}{8} l_1 \\ x'_G = \frac{3}{8} l_1 \end{cases}$$



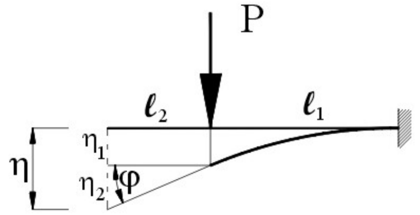
Valore nel punto medio rispetto al valore massimo M

$$M_m = \frac{3}{4} M$$

ROTAZIONI E FRECCE NOTE

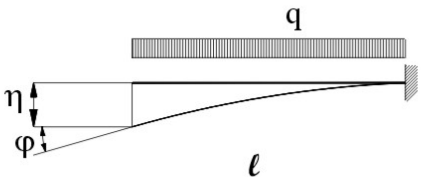


$$\varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{Pl^2}{EJ} \qquad \eta = \frac{1}{3} \cdot \frac{Pl^3}{EJ}$$

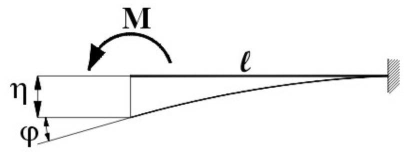


$$\varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{Pl_1^2}{EJ}$$

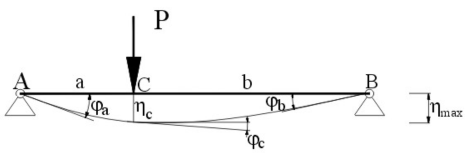
$$\begin{cases} \eta = \eta_1 + \eta_2 \\ \eta = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{Pl_1^3}{EJ} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{Pl_1^2}{EJ} \cdot l_2 \end{cases}$$



$$\varphi = \frac{1}{6} \cdot \frac{ql^3}{EJ} \qquad \eta = \frac{1}{8} \cdot \frac{Pl^4}{EJ}$$

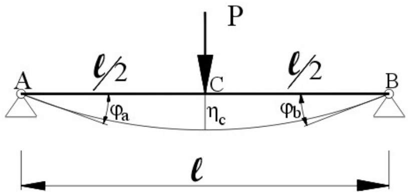


$$\varphi = \frac{ml}{EJ} \qquad \eta = \frac{1}{2} \cdot \frac{ml^2}{EJ}$$

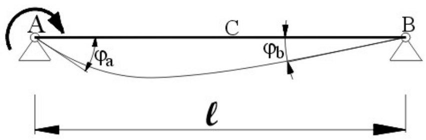


$$\begin{cases} \varphi_A = \dfrac{Pb\left(l^2 - b^2\right)}{6l \cdot EJ} \\ \varphi_B = -\dfrac{Pa\left(l^2 - a^2\right)}{6l \cdot EJ} \\ \varphi_C = \dfrac{P \cdot ab(b - a)}{3l \cdot EJ} \end{cases}$$

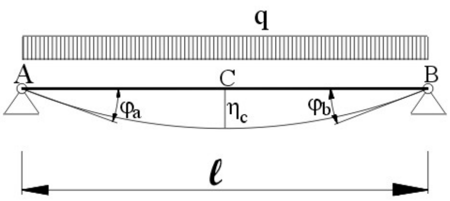
$$\begin{cases} \eta_C = \dfrac{P \cdot a^2 b^2}{3lEJ} \\ \eta_{max} = \dfrac{Pb \cdot \left(l^2 - b^2\right)^{\frac{3}{2}}}{9\sqrt{3} \cdot lEJ} \end{cases}$$



$$\varphi_A = -\varphi_B = \frac{1}{16} \cdot \frac{Pl^2}{EJ} \qquad \eta = \frac{1}{48} \cdot \frac{Pl^3}{EJ}$$

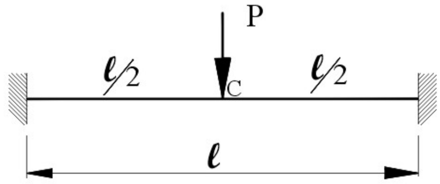


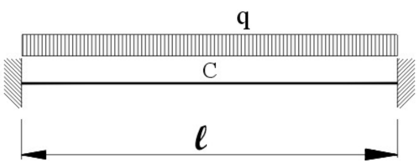
$$\begin{cases} \varphi_A = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{ml}{EJ} \\ \varphi_B = -\dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{ml}{EJ} \end{cases} \qquad \eta_C = \frac{1}{16} \cdot \frac{ml^2}{EJ}$$



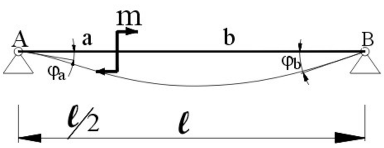
$$\varphi_A = -\varphi_B = \frac{1}{24} \cdot \frac{ql^3}{EJ} \qquad \eta_C = \frac{5}{348} \cdot \frac{ql^4}{EJ}$$

$$\eta_C = \frac{2}{348} \cdot \frac{Pl^3}{EJ} = \frac{1}{192} \cdot \frac{Pl^3}{EJ}$$

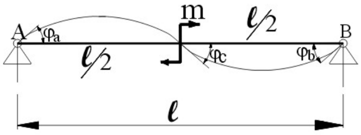




$$\eta_C = \frac{1}{348} \cdot \frac{ql^4}{EJ}$$



$$\begin{cases} \varphi_A = \dfrac{m\left(l^2 - 3b^2\right)}{6l \cdot EJ} \\ \varphi_B = -\dfrac{m\left(l^2 - 3a^2\right)}{6l \cdot EJ} \\ \varphi_C = \dfrac{m \cdot ab(b - a)}{3l \cdot EJ} \end{cases} \qquad \eta_C = \frac{m \cdot ab(b - a)}{3l \cdot EJ}$$



$$\begin{cases} \varphi_A = -\varphi_B = -\dfrac{1}{24} \cdot \dfrac{ml}{EJ} \\ \varphi_C = \dfrac{1}{12} \cdot \dfrac{ml}{EJ} \end{cases} \qquad \eta_C = 0$$

REAZIONI NOTE