SEMPLICE ESEMPIO NUMERICO DEL METODO DI ANALISI DINAMICA

Si vuole qui chiarire con un semplice esempio numerico il metodo di calcolo accennato nel paragrafo 11.4 degli appunti riguardanti le “AZIONI SISMICHE”.

Si seguono passo passo i punti indicati.

1° - Matrice delle masse e delle rigidezze

Supponiamo che la struttura sia costituita da tre orizzontanti. Sia stata effettuata l’analisi dei carichi e sovraccarichi e il calcolo delle masse gravitazionali abbiano fornito i seguenti risultati:

Orizzontamento	Massa gravitazionale kg$\times$ 10^3
1°	45
2°	45
3°	50

Si supponga che le masse possano essere considerate concentrate ai piani; in tal modo si ottiene per esse la matrice diagonale:

$$\mathbf{M} = \begin{Vmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 45 & 0 \\ 0 & 0 & 45 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 50 \\ 45 \\ 45 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 50 \\ 45 \\ 45 \end{Vmatrix} \cdot \mathbf{I} \qquad (1.1)$$

Si supponga di aver determinato la matrice delle rigidezze, ottenendo:

$$\mathbf{K} = \begin{Vmatrix} 18000 & -22000 & 13000 \\ -22500 & 40500 & -21600 \\ 13500 & -21600 & 45000 \end{Vmatrix} \qquad (1.2)$$

2° - Determinazione dei modi come autosoluzioni del determinante caratteristico

Nel secondo punto del paragrafo 11.4 si è rilevato come nel sistema oscillante a n gradi di libertà, in assenza del forzante ($\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_g = 0$), e considerando nulli i coefficienti di smorzamento viscoso ($\mathbf{C} = 0$), per la determinazione delle oscillazione libere del sistema denominate modi, si ottenga l’espressione matriciale:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = 0$$

Si è spiegato poi come, considerando le particolari oscillazioni ω possibili con cui le masse, sui diversi piani, possano vibrare con lo stesso periodo T ,come se fossero parti di una stessa verga elastica, si ottenga il seguente sistema omogeneo a n equazioni a n incognite:

$$\left\| -\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} \right\| \cdot \mathbf{\Phi} = 0 \qquad (2.1)$$

Questo ponendo $\omega^2 = \lambda$, dividendo ogni equazione per la propria massa, e indicando con $\mathbf{I}$ la matrice unitaria, si può impostare nella forma più conveniente:

$$\left\| \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{K} - \lambda \cdot \mathbf{I} \right\| \cdot \mathbf{\Phi} = 0 \qquad (2.2)$$

L’espressione (2.2) è un sistema omogeneo avente come incognite le componenti $\left(\Phi_{j_1}, \Phi_{j_2}, .., \Phi_{j_i}, .., \Phi_{j_n}\right)$ del vettore $\mathbf{\Phi}$. Esso ammette soluzioni solamente se il determinante dei coefficienti è nullo.

Quindi occorre che risulti nullo il determinante della matrice moltiplicativa del vettore $\mathbf{\Phi}$

$$\left|\mathbf{M}^{-1}\cdot\mathbf{K}-\lambda\cdot\mathbf{I}\right|=0 \qquad (2.3)$$

questo è il determinante caratteristico della matrice quadra $n\times n$ $\left\|\mathbf{M}^{-1}\cdot\mathbf{K}\right\|$, che, uguagliato a zero, determina l'equazione caratteristica che fornisce le *n soluzioni proprie* $\lambda_1,\lambda_2...,\lambda_i,..\lambda_n$, le cui radici quadre rappresentano le oscillazioni proprie (modi) del sistema oscillante.

Consideriamo così la matrice fattore del vettore $\mathbf{\Phi}$

$$\left\|\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M}\right\|=\begin{Vmatrix}18000 & -22000 & 13000\\ -22500 & 40500 & -21600\\ 13500 & -21600 & 45000\end{Vmatrix}-\omega^2\cdot\begin{Vmatrix}50 & 0 & 0\\ 0 & 45 & 0\\ 0 & 0 & 45\end{Vmatrix}$$

$$\left\|\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M}\right\|=\begin{Vmatrix}18000 & -22000 & 13000\\ -22500 & 40500 & -21600\\ 13500 & -21600 & 45000\end{Vmatrix}-\omega^2\begin{Vmatrix}50\\ 45\\ 45\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{Vmatrix}$$

Ponendo $\omega^2=\lambda$, dividendo ciascuna equazione della (2.1) uguagliata a zero per la rispettiva massa, si ottiene il sistema omogeneo nella forma (2.2), il cui determinante uguagliato a zero è:

$$\left|\mathbf{M}^{-1}\cdot\mathbf{K}-\lambda\cdot\mathbf{I}\right|=\begin{vmatrix}360-\lambda & -450 & 270\\ -500 & 900-\lambda & -480\\ 300 & -480 & 1000-\lambda\end{vmatrix}=0 \qquad (2.4)$$

Si ottiene l'equazione caratteristica:

$$(360-\lambda)\cdot(900-\lambda)\cdot(1000-\lambda)+450\cdot480\cdot300+500\cdot480\cdot270-300(900-\lambda)\cdot270-500\cdot450\cdot(1000-\lambda)+$$
$$-480\cdot480\cdot(360-\lambda)=0$$

da cui si ottiene l'equazione di terzo grado:

$$-\lambda^3+2260\cdot\lambda^2-1047600\cdot\lambda+72756000=0 \qquad (2.5)$$

l'equazione ammette tre soluzioni proprie reali e distinte:

$$\begin{cases}\lambda_1=84{,}1618\\ \lambda_2=523{,}0382\\ \lambda_3=1652{,}800\end{cases} \qquad (2.6)$$

da cui si ricavano i modi di vibrare $\omega_j=\sqrt{\lambda_j}$. Ordinandoli dalla frequenza più bassa alla più alta si ha:

$$\begin{cases}\omega_1=9.16\\ \omega_2=22.8 \quad s^{-1}\\ \omega_3=40.65\end{cases} \qquad (2.7)$$

dalle pulsazioni si ottengono i periodi $T=\frac{2\pi}{\omega}$ sostituendo le (2.7) si ha:

$$\begin{cases}T_1=0.69 \ \ s\\ T_2=0.27 \ \ s\\ T_3=0.154 \ \ s\end{cases} \qquad (2.8)$$

3° - Determinazione degli autovalori, componenti del autovettore $\mathbf{\Phi}$

Il sistema omogeneo 3×3 (2.2) ammette autovalori quando si sostituisce al parametro λ ognuna delle autosoluzioni λ_j $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ determinate, che rendono nullo il determinante dei coefficienti delle incognite. Queste sono le componenti Φ_{ji} del vettore $\mathbf{\Phi}_j$ del modo j-esimo di vibrazione (di pulsazione ω_j), che costituiscono la distribuzione delle intensità relative del modo considerato su ciascun piano i-esomo.

Così sostituendo al parametro λ il valore proprio $\lambda_1 = 84.1618$ si ottiene il sistema omogeneo a 3 equazioni a 3 incognite:

$$\left| \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{K} - \lambda_1 \cdot \mathbf{I} \right| \cdot \mathbf{\Phi}_1 = \begin{vmatrix} 360 - 84.1618 & -450 & 270 \\ -500 & 900 - 84.1618 & -480 \\ 300 & -480 & 1000 - 84.1618 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{12} \\ \Phi_{13} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Esso ammette autovalori in quanto il valore di λ_1 sostituito rende nullo il determinante dei coefficienti. Gli autovalori si ottengono fissando arbitrariamente il valore di una incognita, ad esempio $\Phi_{13} = 1$, e ricavando dalle *3-1* equazioni indipendenti le restanti incognite Φ_{11}, Φ_{12}.

$$\begin{cases} 275.8382 \cdot \Phi_{11} - 450 \cdot \Phi_{12} + 270 = 0 \\ -500 \cdot \Phi_{11} + 815.8382 \cdot \Phi_{12} - 480 = 0 \end{cases} \qquad \text{notare: } \begin{cases} 1^\circ \text{ indice si riferisce al modo di vibrazione} \\ 2^\circ \text{ indice si riferisce al piano} \end{cases}$$

I valori ottenuti si **normalizzano rispetto al valore massimo**, dividendo per questo tutti i valori determinati; così il valore massimo ha il valore 1 e una frazione di questo gli altri. Si ottiene:

$\Phi_{11} = 1$, $\Phi_{12} = 0.58$, $\Phi_{13} = 0.05$

Lo stesso procedimento si esegue per determinare gli autovalori, componenti rispettivi del vettore $\mathbf{\Phi}_2$ del secondo modo di vibrazione e $\mathbf{\Phi}_3$ del terzo modo.

Si ottiene:

$$\mathbf{\Phi}_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0.58 \\ 0.05 \end{Vmatrix} \quad (3.1) \qquad \mathbf{\Phi}_2 = \begin{Vmatrix} -0.63 \\ 0.45 \\ 1 \end{Vmatrix} \quad (3.2) \qquad \mathbf{\Phi}_3 \begin{Vmatrix} 0.55 \\ -1 \\ 0.99 \end{Vmatrix} \quad (3.3)$$

4° - Determinazione del fattore di partecipazione γ_j

Le oscillazioni libere del sistema a *n* gradi di libertà sono quei particolari modi di vibrare con cui i vari orizzontammenti non oscillano indipendentemente l'uno dall'altro, ma contemporaneamente con un periodo *T* bene definito, come se fossero elementi appartenenti ad una stessa verga elastica vincolata alla base. Esse costituiscono i *modi* principali del sistema. L'importanza di esse è che, una qualunque deformazione, assunta per effetto della forzante, può essere descritta come combinazione lineare dei modi principali di vibrare.

I modi principali non partecipano con la stessa intensità nella combinazione che determina la deformazione effettiva e le relative spinte. Il modo principale a più basa pulsazione (periodo più alto) ha un peso maggiore delle altre vibrazioni, la cui influenza diminuisce all'aumentare della frequenza (al diminuire del periodo). Per questo si definisce un coefficiente di partecipazione modale γ_j che tiene conto dell'influenza del modo j-esimo, di pulsazione ω_j, alla determinazione effettiva dello spostamento e alla spinta sismica in una determinata direzione $\mathbf{R}$.

Il fattore di partecipazione modale γ_j è espresso dalla relazione:

$$\gamma_j = \frac{\mathbf{\Phi}_j^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{R}}{\mathbf{M}_j^*} \qquad (4.1)$$

con

$$\widetilde{\mathbf{M}}_j = \mathbf{\Phi}_j^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{\Phi}_j \qquad (4.2)$$

ove

$\mathbf{\Phi}_j$ è l'autovettore relativo al modo j-esimo di pulsazione ω_j, rappresentato dalla matrice colonna dei suoi componenti $\Phi_{j1}, \Phi_{j2}, .., \Phi_{j3}, .., \Phi_{jn}$ relativi ai singoli piani;

$\mathbf{\Phi}_j^T$ è la matrice trasposta di $\mathbf{\Phi}_j$ composta dalla riga dei suoi componenti;

M matrice diagonale delle masse;

R è il vettore direzionale di influenza del terremoto. Nel caso che si supponga che il sisma agisca nella stessa direzione dei gradi di libertà, il vettore **R** è un vettore colonna composto da tutti 1.

Il fattore di partecipazione modale γ_j si pone come termine moltiplicativo nelle formule di determinazione delle spinte sismiche sui piani, relative al modo j-esimo di pulsazione ω_j

4°.1 - Determinazione dell'espressione $\mathrm{M}_{\mathbf{j}}^*$ nei tre modi

Dai valori delle componenti ottenute per i tre vettori $\mathbf{\Phi}_1, \mathbf{\Phi}_2, \mathbf{\Phi}_3$ riportate in (3.1), (3.2), (3.3) si ricava per ogni modo il valore numerico di $\mathrm{M}_{\mathbf{j}}^*$; (si noti che si ottiene come risultato uno scalare)

3°.1.1- Primo modo

$$\text{autovettore } \mathbf{\Phi}_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0.58 \\ 0.05 \end{Vmatrix}$$

$$\mathrm{M}_1^* = \mathbf{\Phi}_1^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{\Phi}_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0.58 & 0.05 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 45 & 0 \\ 0 & 0 & 45 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ 0.58 \\ 0.05 \end{Vmatrix}$$

$$\mathrm{M}_1^* = \begin{Vmatrix} 1 & 0.58 & 0.05 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 50 & 26.1 & 2.25 \end{Vmatrix}$$

$$\mathrm{M}_1^* = 50 + 0.58 \cdot 26.1 + 0.05 \cdot 2.25$$

$$\mathrm{M}_1^* = 65.25$$

4°.1.2- Secondo modo

$$\text{autovettore } \mathbf{\Phi}_2 = \begin{Vmatrix} -0.63 \\ 0.452 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

$$\mathrm{M}_2^* = \mathbf{\Phi}_2^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{\Phi}_2 = \begin{Vmatrix} -0.63 & 0.452 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 45 & 0 \\ 0 & 0 & 45 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -0.63 \\ 0.452 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

$$\mathrm{M}_2^* = \begin{Vmatrix} -0.63 & 0.452 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -31.5 & 20.25 & 45 \end{Vmatrix}$$

$$\mathrm{M}_2^* = 74.1$$

4°.1.3- Terzo modo

$$\text{autovettore } \mathbf{\Phi}_3 = \begin{Vmatrix} 0,55 \\ -1 \\ 0.99 \end{Vmatrix}$$

$$\mathrm{M}_3^* = \mathbf{\Phi}_3^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{\Phi}_3 = \begin{Vmatrix} 0.55 & -1 & 0.99 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 45 & 0 \\ 0 & 0 & 45 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0.55 \\ -1 \\ 0.99 \end{Vmatrix}$$

$$\mathrm{M}_3^* = \begin{Vmatrix} 0.55 & -1 & 0.99 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 27.5 & -45 & 44.55 \end{Vmatrix}$$

$$\mathrm{M}_3^* = 104$$

Riassumendo: $M_1^* = 65.25$ $M_2^* = 74.1$ $M_3^* = 104$ (4.3)

4°.2 - Determinazione dell'espressione $\mathbf{\Phi}_j^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{R}$ *nei tre modi*

Il vettore $\mathbf{R}$ è rappresentato da una matrice colonna composto da tutti 1, considerando che il sisma agisca nella stessa direzione dei gradi di libertà. Per i tre modi si ha:

4°.2.1- Primo modo

$$\text{autovettore } \mathbf{\Phi}_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0.58 \\ 0.05 \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi}_1^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{R} = \begin{Vmatrix} 1 & 0.58 & 0.05 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 45 & 0 \\ 0 & 0 & 45 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi}_1^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{R} = \begin{Vmatrix} 1 & 0.58 & 0.05 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 50 & 45 & 45 \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi}_1^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{R} = 78.35$$

4°.2.2- Secondo modo

$$\text{autovettore } \mathbf{\Phi}_2 = \begin{Vmatrix} -0.63 \\ 0.452 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi}_2^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{R} = \begin{Vmatrix} -0.63 & 0.452 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 45 & 0 \\ 0 & 0 & 45 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi}_2^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{R} = \begin{Vmatrix} -0.63 & 0.452 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 50 & 45 & 45 \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi}_2^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{R} = 33.75$$

4°.2.3- Terzo modo

$$\text{autovettore } \mathbf{\Phi}_3 = \begin{Vmatrix} 0,55 \\ -1 \\ 0.99 \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi}_3^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{R} = \begin{Vmatrix} 0.55 & -1 & 0.99 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 45 & 0 \\ 0 & 0 & 45 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi}_3^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{R} = \begin{Vmatrix} 0.55 & -1 & 0.99 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 50 & 45 & 45 \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi}_3^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{R} = 27.05$$

Riassumendo:

$\mathbf{\Phi}_1^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{R} = 78.35$ $\mathbf{\Phi}_2^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{R} = 33.75$ $\mathbf{\Phi}_3^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{R} = 27.05$ (4.4)

Sostituendo le espressioni (4.3) e (4.4) nella (4.1) si ottengono i coefficiente di partecipazione nei tre modi:

$$\gamma_1 = \frac{\mathbf{\Phi}_1^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{R}}{M_1^*} = \frac{78.35}{65.25} = 1.2 \qquad \gamma_2 = \frac{\mathbf{\Phi}_2^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{R}}{M_2^*} = \frac{33.75}{74.1} \qquad \gamma_3 = \frac{\mathbf{\Phi}_3^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{R}}{M_3^*} = \frac{27.05}{104}$$

$$\gamma_1 = 1.2 \qquad \gamma_2 = 0.44 \qquad \gamma_3 = 0.25 \tag{4.5}$$

5° - Determinazione delle masse modali partecipanti $\tilde{\mathbf{M}}_j$

Come si è detto i modi di vibrazione non partecipano con la stessa efficacia alla deformazione o alla spinta sismica: il modo a minore frequenza ha maggiore influenza rispetto alle altre, interessando una più grande massa partecipante all'oscillazione.

Per determinare il contributo del "modo" all'azione sismica complessiva ci si riferisce alla *massa partecipante* $\tilde{\mathbf{M}}_j$ alla vibrazione di quel "modo", o meglio alla sua % rispetto alla massa totale.

La massa partecipante è data dalla espressione

$$\tilde{\mathbf{M}}_j = \gamma_j^2 \cdot \mathbf{M}_j^* \qquad \text{oppure} \qquad \tilde{\mathbf{M}}_j = \frac{\left(\mathbf{\Phi}_j^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{R}\right)}{\mathbf{\Phi}_j^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{\Phi}} \tag{5.1}$$

per i tre modi si sono già determinati i seguenti valori:

$$\mathbf{M}_j^* = \begin{Bmatrix} 65.25 \\ 74.1 \\ 104 \end{Bmatrix} \times 10^3\,\text{kg} \qquad \gamma_j = \begin{Bmatrix} 1.2 \\ 0.44 \\ 0.25 \end{Bmatrix}$$

5.1 - Primo modo

$$\tilde{M}_1 = 1.2^2 \cdot 65.25$$

$$\tilde{M}_1 = 93.96 \times 10^3\,\text{kg}$$

5.2 - Secondo modo

$$\tilde{M}_2 = 0.44^2 \cdot 74.1$$

$$\tilde{M}_2 = 14.3 \times 10^3\,\text{kg}$$

5.3 - Terzo modo

$$\tilde{M}_3 = 0.25^2 \cdot 104$$

$$\tilde{M}_3 = 6.5 \times 10^3\,\text{kg}$$

Massa totale partecipante:

$$\tilde{M}_{tot} = \tilde{M}_1 + \tilde{M}_2 + \tilde{M}_3 = (93.96 + 14.3 + 6.5) \times 10^3\,\text{kg}$$

$$\tilde{M}_{tot} = 114.76 \times 10^3\,\text{kg}$$

Massa % partecipante dei tre modi:

$$\tilde{M}\% = \frac{\tilde{M}_j}{\tilde{M}_{tot}} \cdot 100$$

$$\tilde{M}_1\% = \frac{93.96}{114.76} \cdot 100 = 81.87\%$$

$$\tilde{M}_2\% = \frac{14.3}{114.76} \cdot 100 = 12.46\% \tag{5.2}$$

$$\tilde{M}_1\% = \frac{6.5}{114.76} \cdot 100 = 5.66\%$$

Esaminati i valori percentuali ottenuti per le masse partecipanti, nessuna di essi è inferiore al 5%.

6° - Determinazione delle pseudo-accelerazioni dei tre modi

Volendo completare il semplice esercizio proposto, incentrato per sommi capi sul procedimento di calcolo modale, supponiamo di aver già determinato i parametri riguardanti la pericolosità sismica del sito, a_g, F_0, T_C^* in funzione delle coordinate geografiche e del periodo di ritorno T_R riferito ad uno stato limite S.L.U; di avere già calcolati i tre periodi T_B, T_C, T_D che separano i quattro rami dello spettro in accelerazione, in funzione di T_C^*. Inoltre sia stato determinato fattore S, che tiene conto della categoria di sottosuolo (con il parametro S_S) e delle condizioni topografiche (con il parametro S_T). Supponiamo inoltre, considerato il tipo di costruzione, di avere già determinato il fattore di struttura q.

*Per una più puntuale determinazione dei su citati parametri analizza l'esercizio di "Analisi lineare statica" del file "**Semplice esercizio sull'analisi lineare statica**" in preparazione.*

Siano rilevati i seguenti parametri:

nella **tabella 1** dell'allegato **B,** in corrispondenza del codice di identificazione **ID** si siano rilevati: $F_0 = 2.4$ e l'accelerazione espressa in $\frac{g}{10}$: $a_g = 2.3$

L'accelerazione del suolo in m/s^2 è $a_g = 2.3 \cdot \frac{9.8}{10} = 2.25\ m/s^2$

Siano:

$a_g = 2.25$ m/s^2

$F_0 = 2.4$

$S = 1.25$

$T_B = 0.15$ s

$T_C = 0.5$ s

$T_D = 2{,}0$ s

$q = 5.88$

I periodi propri calcolati per i tre modi sono:

$T_1 = 0.68$ s $\quad T_2 = 0.27$ s $\quad T_3 = 0.154$ s

Risulta:

Primo modo

$T_C < T_1 < T_D$

$$S_{d1}(T_1) = a_g \cdot S \cdot F_0 \cdot \frac{1}{q} \cdot \frac{T_C}{T_1}$$

$$S_{d1}(0.68) = 2.25 \cdot 1.25 \cdot 2.4 \cdot \frac{1}{5.88} \cdot \frac{0.5}{0.68}$$

$$S_{d1}(0.68) = 0.844\ m/s^2 \qquad (6.1)$$

Secondo modo

$T_B < T_2 < T_C$

$$S_{d2}(T_2) = a_g \cdot S \cdot F_0 \cdot \frac{1}{q} \cdot$$

$$S_{d2}(0.27) = 2.25 \cdot 1.25 \cdot 2.4 \cdot \frac{1}{5.88}$$

$$S_{d2}(0.27) = 1.15\ m/s^2 \qquad (6.2)$$

Terzo modo

$T_B < T_3 < T_C$

$$S_{d3}(T_3) = a_g \cdot S \cdot F_0 \cdot \frac{1}{q} \cdot$$

$$S_{d3}(0.154) = 2.25 \cdot 1.25 \cdot 2.4 \cdot \frac{1}{5.88}$$

$$S_{d3}(0.154) = 1.15\ m/s^2 \qquad (6.3)$$

7° - Determinazione delle forze modali F_{ji}

Si vuole ora determinare, per ogni modo di vibrazione e su ogni orizontamento della struttura, la spinta sismica. Questa è una forza d'inerzia (massa $\times$ accelerazione), nella quale occorre

considerare l'entità della componente di piano dell'autovettore $\mathbf{\Phi}_j$ e il coefficiente γ_j di partecipazione modale.
La distribuzione della spinta sismica sui diversi piani si ottiene ponendo come termine moltiplicativo la componente di piano Φ_{ji} dell'autovettore $\mathbf{\Phi}_j$ del modo j-esimo (l'indice "j" si riferisce al modo e "i" si riferisce al piano).

L'influenza del modo alla spinta sismica è ottenuta ponendo come termine moltiplicativo il coefficiente γ_j di partecipazione modale.

L'accelerazione è data dall'ordinata dello spettro di progetto $S_{dj}(T_j)$ riferita al modo j-esimo di periodo naturale T_j.

$$F_{ji} = \mathrm{M}_i \cdot \Phi_{ji} \cdot \gamma_j \cdot S_{dj}(T_j) \qquad (7.1)$$

5.1 - Primo modo $T_1 = 0.68$ s

$\mathrm{M}_1 = 50 \times 10^3$ kg $\quad \mathbf{\Phi}_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0.58 \\ 0.05 \end{Vmatrix} \quad \gamma_1 = 1.2 \quad S_{d1}(0.68) = 0.844\ m/s^2$

Si ottiene:

Spinta terzo piano	$F_{13} = 50 \cdot 1 \cdot 1.2 \cdot 0.844$	$F_{13} = 50.64 \times 10^3\ kg$
Spinta secondo piano	$F_{12} = 45 \cdot 0.58 \cdot 1.2 \cdot 0.844$	$F_{13} = 26.43 \times 10^3\ kg$
Spinta primo piano	$F_{11} = 45 \cdot 0.05 \cdot 1.2 \cdot 0.844$	$F_{13} = 2.27 \times 10^3\ kg$
Taglio alla base		$V_{tot} = 79.34 \times 10^3\ kg$ (7.2)

5.2 - Secondo modo $T_2 = 0.27$ s

$\mathrm{M}_2 = 45 \times 10^3$ kg $\quad \mathbf{\Phi}_2 = \begin{Vmatrix} -0.63 \\ 0.452 \\ 1 \end{Vmatrix} \quad \gamma_2 = 0.44 \quad S_{d2}(0.27) = 1.15\ m/s^2$

Si ottiene:

Spinta terzo piano	$F_{23} = -50 \cdot 0.63 \cdot 0.44 \cdot 1.15$	$F_{23} = -15.94 \times 10^3\ kg$
Spinta secondo piano	$F_{22} = 45 \cdot 0.452 \cdot 0.44 \cdot 1.15$	$F_{22} = 10.29 \times 10^3\ kg$
Spinta primo piano	$F_{21} = 45 \cdot 1 \cdot 0.44 \cdot 1.15$	$F_{21} = 22.77 \times 10^3\ kg$
Taglio alla base		$V_{2_{tot}} = 17.12 \times 10^3\ kg$ (7.3)

5.3 - Terzo modo $T_3 = 0.154$ s

$\mathrm{M}_2 = 45 \times 10^3$ kg $\quad \mathbf{\Phi}_3 = \begin{Vmatrix} 0{,}55 \\ -1 \\ 0.99 \end{Vmatrix} \quad \gamma_3 = 0.25 \quad S_{d3}(0.154) = 1.15\ m/s^2$

Si ottiene:

Spinta terzo piano $F_{33} = -50 \cdot 0.55 \cdot 0.25 \cdot 1.15$ $F_{33} = 7.9 \times 10^3\ kg$

Spinta secondo piano $F_{32} = -45 \cdot 1 \cdot 0.25 \cdot 1.15$ $F_{32} = -12.93 \times 10^3\ kg$

Spinta primo piano $F_{31} = 45 \cdot 0.99 \cdot 0.25 \cdot 1.15$ $F_{13} = 12.8 \times 10^3\ kg$

Taglio alla base $V_{3_{tot}} = 7.77 \times 10^3\ kg$ (7.4)

Spinte sismiche di piano $\times\ 10^3$ kg

Piani	Modi di vibrazione		
	Modo 1	Modo 2	Modo 3
3° piano	50.64	- 15.94	7.90
2° piano	26.43	10.29	- 12.93
1° piano	2.27	22.77	12.80
Taglio alla base	79.34	17.12	7.77

8° - Combinazione degli effetti relativi ai singoli modi

Si consideri, come esempio di combinazione degli effetti, il valore progettuale da assumere per il taglio V alla base a cui contribuiscono i singoli modi.

Si rammenta che nel DM 2008 (punto 7.3.3.1) per la combinazione degli effetti relativi ai singoli modi è utilizzata una combinazione quadratica completa C.Q.C (Complete Quadratic Combination) degli effetti relativi a ciascun modo, indicata dalla espressione:

$$E = \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} \rho_{ij} E_i \cdot E_j \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (8.1)$$

dove:

i indice del modo i-esimo;

j indice del modo j-esimo;

E_i effetto relativo al modo i-esimo;

E_j effetto relativo al modo j-esimo;

m numero di modi significativi presi in considerazione;

ρ_{ij} coefficiente di correlazione tra il modo i-esimo e il modo j-esimo, calcolato con l'espressione:

$$\rho_{ij} = \frac{8\xi^2 \cdot \beta_{ij}^{3/2}}{\left(1+\beta_{ij}\right) \cdot \left[\left(1-\beta_{ij}\right)^2 + 4\xi^2 \cdot \beta_{ij}\right]} \qquad (8.2)$$

β_{ij} è il rapporto tra l'inverso dei periodi di ciascuna coppia i-j di modi: $\beta_{ij} = \frac{T_j}{T_i}$; ossia è il rapporto tra la pulsazione del modo i-esimo e il modo j-esimo.

Nel caso i esame gli effetti da combinare, ciascuno a meno del fattore $\times\ 10^3$, sono i tre tagli:

$V_1 = 79.34$ $V_2 = 17.12$ $V_3 = 7.77$

Con la combinazione quadratica completa C.Q.C, il taglio da porre a progetto è fornito dalla espressione :

$$V = \left(\sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} \rho_{ij} V_i \cdot V_j \right)^{\frac{1}{2}} \tag{8.3}$$

$T_1 = 0.68$ $\quad T_2 = 0.27$ $\quad T_3 = 0.154$ $\quad \xi = 0.05$

si ottiene:

$\beta_{11} = \dfrac{T_1}{T_1} = 1$ $\quad \beta_{12} = \dfrac{T_2}{T_1} = 0.397058$ … ecc. vedere tabella

si calcolano i parametri ρ_{ij}. Così per esempio:

$\ldots \rho_{12} = \dfrac{8 \cdot 0.05^2 \cdot 0.397058^2}{(1+0.397058) \cdot \left[(1-0.397058)^2 + 4 \cdot 0.05^2 \cdot 1 + 0.397058^2\right]}$ ….. ecc. vedere tabella

Modi	Periodo s	Taglio alla base $\times 10^3$ kg	β_{ij}		ρ_{ij}	
Modo 1	0.68	79.34	β_{11}	1.000000	ρ_{11}	1.000000
Modo 2	0.27	17.12	β_{12}	0.397059	ρ_{12}	0.009746
Modo 3	0.154	7.77	β_{13}	0.226471	ρ_{13}	0.002926
			β_{21}	2.518519	ρ_{21}	0.009746
			β_{22}	1.000000	ρ_{22}	1.000000
			β_{23}	0.570370	ρ_{23}	0.028831
			β_{31}	4.415584	ρ_{31}	0.002926
			β_{32}	1.753247	ρ_{32}	0.028831
			β_{33}	1.000000	ρ_{33}	1.000000

Sviluppando l'espressione (8.3) si ha:

$$V = \sum_{j}^{3} \left(\rho_{1j} \cdot V_1 \cdot V_j + \rho_{2j} \cdot V_2 \cdot V_j + \rho_{31j} \cdot V_3 \cdot V_j + \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$V = \begin{pmatrix} \rho_{11} \cdot V_1 \cdot V_1 + \rho_{21} \cdot V_2 \cdot V_1 + \rho_{31} \cdot V_3 \cdot V_1 + \rho_{12} \cdot V_1 \cdot V_2 + \rho_{2j} \cdot V_2 \cdot V_2 + \rho_{32} \cdot V_3 \cdot V_{j2} + \\ \rho_{13} \cdot V_1 \cdot V_3 + \rho_{23} \cdot V_2 \cdot V_j + \rho_{33} \cdot V_3 \cdot V_3 \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}}$$

sostituendo i valori riportati in tabella si ottiene:

$$\mathrm{V} = 81.768 \times 10^3 \ \mathrm{kg}$$