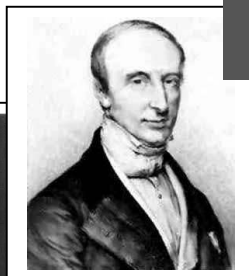
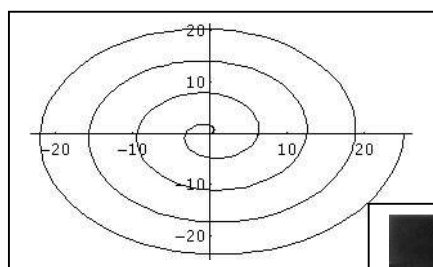


Storia del concetto di Funzione



A cura di:

Graziella FAVA
Cristina GHEZZI
Lorenzo TANZINI
Barbara TARGI

Dalle origini a Eulero

Introduzione

La realtà ci offre di continuo esempi di quantità variabili, in costante movimento e soggette a perenni trasformazioni. Se dunque la Matematica deve essere, anche, un mezzo potente ed un aiuto prezioso a coloro che si occupano di studiare la natura, dovrà necessariamente farne parte un gruppo di discipline volte alla considerazione di enti, pensati non come di immutabile ma come di essenzialmente mutevoli o variabili. A questa parte della matematica si assegna il nome di Analisi matematica ed è quindi proprio a questo che è legata la nascita del concetto di funzione.

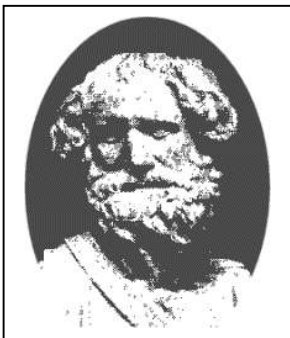
La nozione quindi di dipendenza di una variabile da un'altra è quindi antica come la Matematica stessa. Tracce di tali relazioni si trovano:

- **Tabelle astronomiche babilonesi**
- **Documenti del tempo di Tolomeo**

In questi documenti si trovano esplicitate relazioni tra il tempo e le posizioni dei pianeti nel nostro sistema solare.

Gli antichi **greci** studiavano le relazioni che intercorrevano tra quantità geometriche, evitando l'uso di ogni espressione algebrica.

Particolare interesse mostrarono i greci per quelle che noi oggi chiamiamo curve algebriche ma solo per quelle di secondo grado, cioè circonferenza, parabola, ellisse e iperbole, tutte curve descrivibili come luoghi geometrici e costruibili con riga e compasso.

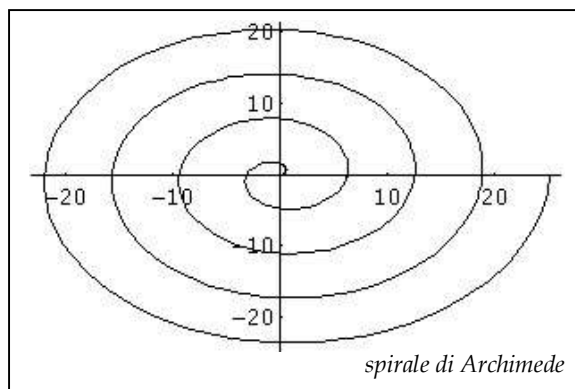


In particolare osserviamo la figura di **Archimede** (287-212 a.C.), che aveva addirittura già intuito i concetti di infinitesimo e di integrale definito *metodo di esaustione*.

La matematica greca è stata talvolta descritta come una matematica statica, con scarso interesse per la nozione di quantità variabile.

Ma Archimede, nel suo studio sulla spirale ($r = a\vartheta$ espressa in coordinate polari), sembra aver trovato la tangente ad una curva mediante considerazioni cinematiche.

Immaginando un punto sulla spirale come soggetto ad un duplice moto - un moto radiale uniforme di allontanamento dalla origine delle coordinate ed un moto circolare attorno all'origine - sembra abbia trovato (mediante il parallelogrammo delle velocità) la direzione del moto (e pertanto la direzione della tangente alla curva) calcolando la risultante dei due moti componenti.



Questo sembra costituire il primo caso in cui si sia trovata la tangente ad una curva diversa dalla circonferenza.

XVII secolo

Occorre aspettare il XVII secolo perché gli studiosi ricomincino a prestare attenzione al concetto di funzione. Questo scarso interesse era stato dovuto a :

- **Mancanza di prerequisiti algebrici**

Ancora poca chiarezza sulla continuità dei reali e nessun sviluppo della notazione simbolica;

- **Mancanza di motivazioni**

Mancavano esempi in cui utilizzare la definizione di funzione.

Tra il 1450 e il 1650 numerosi avvenimenti contribuirono a creare le giuste condizioni per il successivo sviluppo del concetto di funzione:

- ✓ **Studi sui numeri reali e complessi** (Bombelli, Stifel ed altri)
- ✓ **La creazione dell'algebra simbolica** (Viète, Cartesio ed altri)
- ✓ **L'unione tra algebra e geometria** (Fermat, Cartesio ed altri)
- ✓ **Lo studio dei moti** (Keplero, Galileo ed altri)

Ed è proprio allo studio dei moti che è legata la prima vera intuizione del concetto di funzione.

E' infatti Cartesio (1596-1650) ad affermare per la prima volta in modo chiaro in *La Geométrie* (1637) che:

“un’equazione in x e y è un mezzo per introdurre una dipendenza tra quantità variabili, in modo tale da poter calcolare i valori di una, in corrispondenza di dati valori dell’altra”

Il concetto di funzione, come legge che esprime la variazione di una grandezza rispetto ad un’altra (in genere il tempo) nasce però dallo studio del **PROBLEMA DEL MOTO DEI CORPI**.

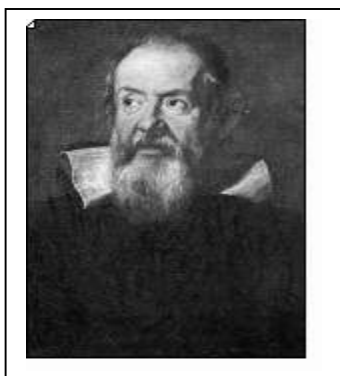
La legge di **Keplero** sul moto ellittico dei pianeti è soltanto approssimata, sarebbe stata esatta qualora in cielo ci fossero soltanto il Sole ed un pianeta. L’idea che altri pianeti disturbino il moto ellittico di ciascuno di essi e che il Sole disturbi il moto ellittico della luna intorno alla Terra, aveva aperto il problema di migliorare il calcolo delle posizioni dei pianeti e la necessità di determinare con maggiore accuratezza latitudine e longitudine.

Gli scienziati del Seicento si trovano di fronte anche il problema di spiegare i moti terrestri. Secondo la teoria eliocentrica la terra era dotata di un moto di rotazione attorno al suo asse ed ad uno di rivoluzione attorno al sole.

Perché quindi tutti i moti sulla terra sembravano aver luogo come se la Terra fosse ferma?

Questi problemi attirarono l’attenzione di moltissimi studiosi compresi Galileo e successivamente Newton.

Erano necessari nuovi principi del moto per rendere conto di questi fenomeni Terrestri. Ed è proprio dallo studio del moto che la matematica ricavò un concetto fondamentale che rimase nelle ricerche dei successivi duecento anni: **il concetto di funzione o di relazione tra variabili**.



Nell’opera di Galileo GALILEI (1564-1642) *Due nuove scienze* si trova ripetutamente questa nozione.

Galileo parla di relazione tra grandezze, esprime le relazioni funzionali verbalmente e con il linguaggio delle proporzioni.

Esempio:

“Se un mobile scende, a partire dalla quiete, con moto uniformemente accelerato, gli spazi percorsi da esso in tempi qualsiasi... stanno tra loro come i quadrati dei tempi”

Poiché il simbolismo si stava allora estendendo, l'enunciato di Galileo sugli spazi descritti da un corpo che cade venne presto scritto nella forma $s = kt^2$ e quello sui tempi di discesa nella forma $t = kl$.

La maggior parte delle funzioni introdotte durante il XVII secolo furono studiate come curve prima che il concetto di funzione venisse reso pianamente esplicito.

Così, **Evangelista TORRICELLI** (1608-1647), un allievo di Galileo, in una lettera del 1644 descrisse le sue ricerche sulla curva che noi rappresenteremmo mediante la funzione $y = ae^{-cx}$, con $x \geq 0$.

La definizione più esplicita del concetto di funzione nel XVII secolo venne data da **James Gregori** nella sua *Vera circuli et hyperbolae Quadratura* (1667).

Egli definì una funzione come una quantità ottenuta da altre quantità mediante una successione di operazioni algebriche o con qualsiasi altra operazione immaginabile.



Fin dalle prime origine delle sue ricerche sul calcolo infinitesimale, cioè a partire dal 1655, **Isaac NEWTON** (1643-1727) usò il termine “fluente” per indicare una qualsiasi relazione tra variabili.

Lavorando con le funzioni, **Johann BERNOULLI** (1667-1705) parla a partire dal 1697 di una quantità formata in maniera qualsiasi, da variabili e da costanti, con le parole in maniera qualsiasi egli intendeva riferirsi sia alle espressioni algebriche che a quelle trascendenti.

Bernoulli adottò nel 1698 la frase leibiniziana “**funzione di x** ” per indicare questa quantità.

Nella sua Historia (1714) **Leibniz** adopera la parola funzione per denotare quantità che dipendono da una variabile.

L'approccio di Bernoulli venne adottato ed ampliato da **Eulero** (1707-1783) (a cui si deve la notazione $f(x)$ per indicare un'arbitraria funzione di x).

“Una funzione di una quantità variabile è un'espressione analitica composta in un modo qualsiasi mediante quella quantità variabile e numeri e quantità costanti”

Per la prima volta con Eulero una funzione venne definita in modo esplicito come un'espressione analitica.

Il concetto di Funzione nel '700

Il concetto di funzione e le più semplici funzioni algebriche e trascendenti vennero introdotte e usate durante il XVII secolo.

Quando *Leibniz, Jakob e Johann Bernoulli, De L'Hôpital, Huygens e Varignon* affrontavano problemi quali il moto del pendolo e il moto lungo traiettorie curvilinee, essi non usavano soltanto le funzioni già note, ma anche forme più complicate di funzioni elementari. Come conseguenza di queste ricerche e dei lavori generali sul calcolo infinitesimale, le funzioni elementari vennero conosciute a fondo e sviluppate praticamente nel modo in cui le adoperiamo oggi.

Strettamente legato ai Bernoulli, in quanto studente a Basilea di Johann e poi collaboratore e amico dei suoi figli Nicolaus e Daniel, fu **Leonard EULER** (1707-1783), nato a Basilea, sicuramente il matematico più originale e fecondo del secolo, tanto da essere definito "*l'Incarnazione dell'Analisi*".

Leonard EULER (1707-1783)



Eulero aveva usato la lettera "*e*" più di una dozzina di volte per rappresentare la base del sistema dei logaritmi naturali o neperiani. Il concetto che sta dietro a questo numero era noto fin dall'invenzione dei logaritmi, avvenuta più di un secolo prima; tuttavia non era stata ancora introdotta nell'uso comune nessuna notazione conven-

zionale per indicarlo. Tale simbolo apparve per la prima volta in un'opera stampata nella "*Meccanica*" di Eulero, pubblicata nel 1736, nella quale la meccanica newtoniana veniva presentata per la prima volta in forma analitica.

Si può affermare che Eulero fece per l'analisi infinitesimale di Newton e Leibniz ciò che Euclide aveva fatto per la geometria di Eudosso, o ciò che Viète aveva fatto per l'algebra di

Al-Kuwarizmi e Cardano. Eulero trattò il calcolo differenziale e il metodo delle flussioni come parti di una branca più generale della matematica che da allora è nota con il nome di “*Analisi*” e che riguarda lo studio dei procedimenti infiniti.

La *Introductio in Analysin infinitorum* di Eulero può essere considerato come la chiave di volta dell’analisi.

Da allora in poi il concetto di “funzione” diventò il concetto fondamentale dell’Analisi, e su questo si sviluppò tutta una serie di disquisizioni.

Egli esprime il concetto di dipendenza funzionale tra quantità variabili con le seguenti parole:

“Una funzione di quantità variabili è un’espressione analitica composta in modo qualunque da quelle quantità e da numeri o quantità costanti.”

È questa la definizione che si legge in apertura del primo volume dell’Introductio. Qui è già del tutto assente ogni riferimento fisico al movimento dei corpi e il concetto di funzione viene espresso in termini puramente formali come combinazione di quantità (variabili e costanti) e di segni d’operazione.

Con il termine “**espressione analitica**” si intende, per Eulero, un’espressione composta da grandezze simboliche e numeri mediante **operazioni algebriche** (addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, elevamento a potenza, estrazione di radice, “*alle quali bisogna aggiungere ancora la risoluzione delle equazioni*”), oppure **trascendenti**, quali l’esponenziale e il logaritmo “*e innumerevoli altre che ci fornisce il calcolo integrale*”.

A questa distinzione è correlata, per Eulero, quella tra **funzioni algebriche** e **trascendenti**: le prime sono ottenibili mediante un numero finito di operazioni elementari (le equazioni algebriche sono il linea di principio risolubili algebricamente, è opinione di Eulero), mentre per le seconde egli ritiene senz’altro che si possano sviluppare in serie infinite (o comunque mediante un numero infinito di operazioni elementari) senza porsi il problema però né della dimostrazione né della legittimità di tali estensioni.

Di fatto, la trattazione rigorosamente analitica delle funzioni trigonometriche fu codificata in larga misura nell’Introductio, in cui appunto al concetto di funzione viene data un’importanza primaria.

Per Eulero la possibilità di sviluppare in serie tutte le funzioni era confermata dalla propria esperienza e dall'esperienza di tutti i suoi contemporanei. Ed era in effetti vero allora che tutte le funzioni date da espressioni analitiche potevano essere sviluppate in serie.

Così, nel capitolo IV dell'Introductio, egli considera come la maniera più generale di esprimere una funzione sia una serie infinita del tipo:

$$A+Bz+Cz^2+Dz^3+\dots \quad (1)$$

“Se qualcuno ne dubita – scrive Eulero – il dubbio sarà messo da parte dallo sviluppo di ciascuna funzione”. In ogni caso, non essendo di fatto in grado di dimostrare la sviluppabilità di una funzione qualunque $f(z)$ in serie di potenze ascendenti di z , Eulero lascia aperta la possibilità di considerare esponenti qualunque per la z nello sviluppo (1), possibilità che egli esprime nei termini seguenti:

“Affinché questa spiegazione valga nella maniera più estesa, oltre alle potenze di z che hanno esponenti interi positivi si debbono ammettere anche potenze ad esponente qualunque. Così non vi sarà più alcun dubbio che ogni funzione della stessa z si possa in questo modo trasformare in una espressione infinita, denotando con $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ numeri qualunque.”

Dunque, una funzione qualunque di z è esprimibile nella somma (infinita o no):

$$Az^\alpha+Bz^\beta+Cz^\gamma+\dots$$

ed è proprio questa la proprietà che Eulero ha in mente e utilizza negli sviluppi delle funzioni in serie, o prodotti infiniti, o in frazioni continue, frequenti nell'Introductio.

È il caso, ad esempio, della trascendente elementare $\log x$, di cui Eulero dà lo sviluppo:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

Tuttavia, dal nostro punto di vista, si può rilevare l'inadeguatezza delle classificazione euleriana di funzioni algebriche e trascendenti. Infatti, il carattere algebrico o trascendente di una funzione non si lascia rivelare dal particolare tipo di “espressione analitica” impiegata

nella definizione: così serie infinite di potenze crescenti nell'incognita x possono definire funzioni sia **algebriche**, come:

$$y = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 4} \cdot \frac{x^6}{6} - \dots = \sqrt{1+x^2} \quad \text{per} \quad |x| \leq 1$$

che **trascendenti**, come:

$$y = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \dots = \log(1+x^2) \quad \text{per} \quad |x| \leq 1$$

La polemica sulle corde vibranti

La discussione intorno al concetto di funzione diventa centrale verso la metà del '700 in una questione di carattere fisico-matematico, quella di studiare le vibrazioni di una corda in un piano. Intorno alla soluzione di questo problema, si alimentò una lunga e vivace polemica

tra i più grandi matematici del secolo, inizialmente **D'Alembert** e **Eulero**, e poi **Daniel Bernoulli** e **J.L.Lagrange**.

La discussione si accese intorno a un lavoro di D'Alembert (1717-1783) del 1747, che rappresenta il primo tentativo coronato da successo di integrare le equazioni differenziali alle derivate parziali che si ottengono descrivendo matematicamente le infinite forme assunte da una corda tesa



D'Alembert

posta in vibrazione in un piano. Era questo un problema già parzialmente affrontato da Johann BERNOULLI nel 1727.



Egli si era limitato a considerare una “forma approssimata”, nel senso che, invece di una corda continua, aveva preso in esame il comportamento di n masse uguali, disposte alla stessa distanza tra loro e congiunte da un filo pensato privo di peso, flessibile e inestensibile. Bernoulli aveva ottenuto per lo spostamento y_k della massa k -esima l’equazione alle differenze finite:

$$\frac{d^2 y_k}{dt^2} = a^2 (y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1})$$

dove a^2 dipende dalla tensione della corda (pensata costante anche durante le vibrazioni), dalla massa totale degli n corpi e dalla loro distanza reciproca.

Bernoulli risolve l’equazione e passa poi a trattare il caso di una corda continua, mostrando che la corda ad ogni istante t assume una forma sinusoidale, la cui equazione egli ottiene integrando l’equazione differenziale

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -ky \quad (2)$$

un risultato, questo, che era già stato reso noto qualche tempo prima da Taylor.

Quando D’Alembert comincia ad interessarsi della questione, il suo obiettivo è di far vedere che una corda in vibrazione assume infinite altre forme oltre a quella sinusoidale.

Introducendo un sistema di riferimento cartesiano e considerando al posto degli y_k una funzione $y=y(t, x)$, continua al variare con continuità di x da 0 a l (lunghezza della corda), D’Alembert sostiene, al posto dell’equazione (2), la seguente:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (3)$$

che egli integra nel caso $a^2=1$, facendo uso di tecniche oggi divenute usuali.

L’anno successivo, Eulero intervenne sulla questione. Egli considera infatti la stessa equazione (3) studiata da D’Alembert e sottolinea l’intento di ricercare la massima generalità possibile della soluzione “*affinché la figura iniziale della corda possa essere tracciata arbitrariamente*”. Essa può essere data infatti da una curva “*sia regolare contenuta in una certa*

equazione, sia irregolare o meccanica”, ed egli mostra, ed egli mostra come costruire geometricamente a partire da una tale curva la soluzione al tempo t , che scrive come:

$$y = \frac{1}{2}f(t+x) + \frac{1}{2}f(t-x)$$

senza però soffermarsi sulla discussione delle condizioni iniziali. Tuttavia è proprio sul carattere della funzione:

$$f(x)=y(0, x)$$

che descrive la posizione iniziale della corda, che le posizioni di D’Alembert e Eulero differiscono sostanzialmente.

L’oggetto del contendere è essenzialmente il concetto di funzione cui ci si riconduce immediatamente quando si tenta di precisare la natura degli oggetti matematici “soluzione” dell’equazione differenziale (3).

“Non si può, mi sembra, esprimere analiticamente y in maniera più generale che supponendola una funzione di t e di x – scrive D’Alembert – Ma con questa supposizione si trova la soluzione del problema solo nel caso in cui le diverse figure della corda vibrante possono essere comprese in una stessa equazione.”

Conclusione questa che è coerente con le idee allora dominanti in analisi sulla continuità delle curve, idee che lo stesso Eulero aveva proprio in quel periodo trattato nella *Introductio*.

Per Eulero si possono descrivere meccanicamente diverse linee curve mediante il movimento continuo di un punto, che fa vedere la curva nel suo complesso. Tuttavia, nel secondo volume della *Introductio*, le linee curve vengono da Eulero considerate principalmente come il risultato di funzioni, essendo questa maniera di considerarle più analitica, più generale e adatta al calcolo.

Dopo aver introdotto un sistema di riferimento nel piano, egli scrive:

“Una funzione qualunque di x darà una certa linea retta o curva, da cui segue che, reciprocamente, si potranno mettere in relazione le linee curve con le funzioni.

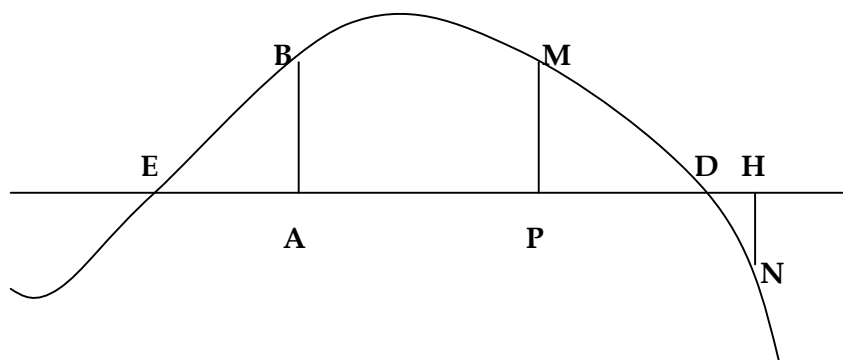
Di conseguenza, la natura di una linea curva sarà determinata da una funzione di $x(\dots)$. da questa concezione delle linee curve discende naturalmente la loro divisione in continue e in discontinue o miste.

La linea curva continua è quella la cui natura è espressa da una sola funzione determinata da x

Ma se la linea curva è composta da differenti parti BM , MD , DN , ... determinate da più funzioni di x di modo che, una parte BM essendo il risultato di una funzione, un'altra, MD , quello di una seconda funzione, noi chiamiamo queste specie di linee curve discontinue, o miste e irregolari, giacché esse non sono formate secondo una legge costante e sono composte di porzioni di differenti curve continue.

In geometria si ha a che fare principalmente con curve continue e nel seguito si mostrerà che le curve, che sono descritte meccanicamente da un movimento uniforme secondo una certa legge costante, possono essere espresse da un'unica funzione e di conseguenza sono curve continue."

Eulero illustra così il proprio argomento:



Questa classificazione delle curve operata da Eulero rimase standard per un lungo periodo e si ritrova ancora all'inizio dell'800.

Dietro la vaga terminologia dell'epoca (oltre a quelle viste, si parlava di curve "totalmente discontinue", "tracciate con un libero movimento della mano", "che obbediscono alla legge di continuità", "meccaniche", "algebriche", ecc.).

Si riconoscono, dal nostro punto di vista, due tipi di curve: quelle differenziabili (che sono le curve "continue" secondo Eulero) e quelle continue (le "discontinue" o "miste" nella terminologia euleriana) mentre non vengono prese in esame le curve che oggi sono dette "discontinue".

La polemica sulle corde vibranti finì così per fornire occasione di discussione sul concetto di funzione e sulle funzioni ammissibili in analisi, da cui dipendeva la generalità della soluzione trovata.

Come osservò H. Burkhardt, D'Alembert e Eulero usando il termine "*funzione*", intendono cose diverse: il primo giunge alla conclusione che "*per non andare contro le regole dell'analisi*" la soluzione è sensata quando y sia espresso analiticamente da x e t ; Eulero, al contrario, non richiede alcuna "legge di continuità" per la curva e dunque alcuna espressione analitica per la y .



Nel 1753 si inserisce nella discussione il figlio di Johann Bernoulli. **Daniel BERNOULLI** (1700-1782): il suo approccio è caratterizzato dalle sue precedenti ricerche fisiche di acustica e proprio sulla base di motivazioni fisiche egli asserisce che il movimento di una corda vibrante si può in generale rappresentare con l'equazione (4), nella quale la velocità iniziale è nulla:

$$y = a \sin x \cos t + \beta \sin 2x \cos 2t + \gamma \sin 3x \cos 3t + \dots$$

D'altra parte Bernoulli non argomentava in maniera matematicamente coerente le sue idee, e proprio da questo versante vennero le critiche di Eulero e di D'Alembert.

Eulero sottolinea l'importanza delle osservazioni di Bernoulli sulla natura fisica del problema, ma dichiara inaccettabile matematicamente la conclusione che la (4) possa rappresentare una funzione arbitraria; inoltre, osserva Eulero, una funzione data da una serie trigonometrica è periodica, e nel caso che la y non abbia questa proprietà non si può certo rappresentarla con una tale serie.

"Ma forse - scrive Eulero - si potrebbe rispondere che l'equazione (4), a causa dell'infinità dei coefficienti indeterminati, è così generale che include tutte le possibili curve, e si deve riconoscere che, se questo fosse vero, il metodo del Signor Bernoulli fornirebbe una soluzione completa."

Si fa così strada un aspetto delle contraddizioni tra vecchia e nuova teoria delle funzioni, ed Eulero è il protagonista di questa trasformazione. Infatti, nella concezione classica, che si trova ancora in Eulero, una funzione è pensata associata alla totalità del

dominio su cui “esiste”, mentre la distinzione (euleriana!) in funzioni continue e discontinue già prelude all’idea di associare ai diversi “tratti” di una funzione “discontinua” intervalli distinti, indipendentemente dalla forma (algebraica) della funzione. Questo è un passo decisivo, se si considera che qui è anticipata in nuce l’idea oggi usuale di “dominio” della funzione.

Eulero non coglie dunque tutte le implicazioni presenti nella sua concezione delle funzioni discontinue ma rimane ancorata alla sua originaria impostazione algebrica.

La replica di Bernoulli si sofferma in particolare proprio sulla possibilità di operare sulle infinite costanti $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ presenti nella (4) per determinare la curva soluzione.

Egli tuttavia non mostra come si possano concretamente determinare i coefficienti della serie, e sarà proprio questa l’obiezione che gli rivolgerà Eulero.

Anche D’Alembert si oppone alla soluzione proposta da Bernoulli facendo proprio l’argomento di Eulero sulla rappresentabilità di funzioni arbitrarie mediante una serie di seni e, di più, nega la possibilità di rappresentare mediante una tale serie una qualunque funzione periodica.

- Mutamenti nel concetto di Funzione -

Uno degli esiti più interessanti della polemica sulle corde vibranti fu dunque quello di centrare l’attenzione dei matematici sulla definizione euleriana di funzione, allora “standard”, e in particolare di funzione continua e discontinua, e di cercare di comprendere, rispetto a quella, quale fosse la natura degli oggetti matematici ottenuti dall’integrazione di equazioni differenziali alle derivate parziali.

Il contributo più interessante venne nel 1787 da L.F. ARBOGAST e dalla distinzione che fece tra funzioni discontinue e funzioni discontigue.

Le funzioni arbitrarie che compaiono nell’integrazione delle equazioni differenziali sono, per Arbogast, di entrambi i tipi: per esempio – dice Arbogast – nella equazione delle corde vibranti si può pensare ad un “salto” nei valori di $\frac{\partial^2 y}{dx^2}$, purché lo stesso salto avvenga

per i valori di $\frac{\partial^2 y}{dt^2}$.

La distinzione di Arbogast tra curve “discontinue” e “discontigue” tende a distinguere tra curve discontinue e curve continue nel senso moderno, anche se definite in diversi intervalli da diverse dipendenze funzionali. Inoltre, trattando delle discontinuità, Arbogast sembra lasciare intravedere una definizione puramente nominale di funzione, anche se egli si affretta a precisare che ha in mente “*curve tracciate a caso dal libero movimento della mano*”.

Le precisazioni di Arbogast alla definizione di Eulero, e l’introduzione di un nuovo concetto di discontinuità più vicino al senso moderno, si accompagnarono a un diffuso criticismo verso il concetto classico, ma ripreso da Eulero (1748), di funzione come espressione analitica composta di variabili e costanti.

Nelle *Institutiones calculi differentialis* (1755) lo stesso Eulero aveva dato una definizione assai generale di funzione (anche se, in pratica, si era limitato alle funzioni analitiche). Secondo Eulero:

“se delle quantità dipendono da altre in modo tale che dalle mutazioni di queste anche le prime subiscono delle variazioni, esse si usano chiamare funzioni di queste. Questa denominazione ha un’estensione molto ampia e comprende in sé tutti i modi coi quali una quantità si può determinare per mezzo di altre. Se dunque x rappresenta una quantità variabile, allora tutte le quantità che dipendono da x in modo qualunque o possono determinarsi per mezzo di essa, sono chiamate funzioni di essa.”

Né sembra immotivato concludere che la grande generalità di questa definizione sia stata suggerita ad Eulero proprio dalla vicenda delle corde vibranti: se gli oggetti matematici che risolvono l’equazione (3) sono funzioni di x e t , allora non è certamente il caso, per Eulero, di pensare per essi a una qualche sorta di “esprimibilità analitica”: e se nel suo trattato egli si limita a queste ultime, è perché a queste si riducono le funzioni più usuali. Il che tuttavia non implica il limitarsi a priori ad esse come ai soli oggetti denominabili “funzioni”.

Il primo che sembra aver colto la generalità di questa concezione di Eulero è un matematico non professionista.

Si tratta di **M.A. CONDORCET** (1743-1794), segretario dell'Accademia delle Scienze di Parigi, e forse più noto come uomo politico.

Condorcet fu autore di un *“Traité du calcul intégral”* pubblicato a Parigi nel 1765 e di una seconda opera (con lo stesso titolo) rimasta incompiuta. In questa seconda, Condorcet dà la seguente definizione di funzione:

“Suppongo di avere un certo numero di quantità x, y, z, \dots, F e che per ogni valore determinato di x, y, z, \dots, F abbia uno o più valori determinati che corrispondono ad essi. Io dico allora che F è una funzione di x, y, z, \dots .”

Infine, so che, allorché x, y, z, \dots saranno determinati, lo sarà anche F ; anche se non conoscerò né la maniera di esprimere F mediante x, y, z, \dots , né la forma dell'equazione tra F e x, y, z, \dots , io saprò che F è funzione di x, y, z, \dots .”

Questo è ciò che Condorcet intende per funzione “analitica”: una funzione di natura del tutto arbitraria, dove il termine “analitica” indica che lo studio di simili quantità avviene nel contesto dell'analisi. Condorcet distingue inoltre tre diversi tipi di funzioni:

1. funzioni di cui si conosce la forma (in altre parole funzioni esplicite);
2. funzioni introdotte da equazioni tra F e x, y, z, \dots (funzioni implicite);
3. funzioni che non sono date che mediante certe condizioni (per esempio equazioni differenziali).

Tuttavia lo studio concreto delle funzioni è da Condorcet ricondotto alla serie di Taylor, che viene assunta come fondamento del calcolo differenziale, e la determinazione dei coefficienti della serie porta Condorcet al concetto di **“funzione differenziale”** (l'analogo delle “funzioni derivate” di Lagrange).

Tra coloro che ebbero per le mani i fogli inediti di questo trattato di Condorcet vi fu **S.F. LACROIX** (1765-1843).

Dopo aver richiamato alcune definizioni classiche, Lacroix scrive:

“Infine, delle nuove idee, portate dallo sviluppo dell'analisi, hanno dato luogo alla seguente definizione di funzione. Ogni quantità il cui valore dipenda

da una o più altre quantità è detta funzione di queste ultime sia che si sappia sia che si ignori attraverso quali operazioni occorra passare per risalire da queste alla prima.”

Una definizione che si richiama apertamente a quelle di Eulero e Condorcet. Occorre però sottolineare l'aspetto nominale di queste definizioni, nel senso che poi in pratica le funzioni studiate erano sostanzialmente quelle algebriche e le trascendenti elementari.

Il tentativo più coerente di stabilire una teoria delle funzioni (e, nel tempo stesso, di fondare in maniera inequivoca il calcolo infinitesimale) fu operato da Lagrange con un trattato che in un certo senso rappresenta in modo emblematico lo stato dell'analisi e dei suoi fondamenti alla fine del '700. Così Lagrange, nella sua *Théorie des fonctions analytiques* (1797), definisce una funzione di una o più variabili come qualsiasi espressione utile per il calcolo in cui tali variabili entrino in una maniera qualsiasi. Nelle "*Leçons sur le calcul des fonctions*" (1806) dice che le funzioni rappresentano operazioni diverse che devono essere effettuate su quantità note per ottenere i valori di quantità incognite, e che queste ultime sono propriamente soltanto il risultato ultimo del calcolo. In altre parole, una funzione è una combinazione di operazioni.

Il concetto di Funzione nel XIX secolo

*“A Parigi, nel 1900, al congresso dei matematici,
non ho avuto esitazioni a definire l’Ottocento il
secolo della teoria delle funzioni”*

Vito VOLTERRA

1777	<i>GAUSS</i>		1855
	1781	<i>BOLZANO</i>	1848
		1789	1857
		<i>CAUCHY</i>	
		1802 ABEL 1829	
		1805	1859
		<i>DIRICHLET</i>	

Dal punto di vista tecnico, la creazione più originale del XIX secolo fu la **teoria delle funzioni di variabile complessa**. Questa disciplina viene spesso citata come “teoria delle funzioni”, anche se impropriamente.

Questa nuova branca della matematica dominò il XIX secolo quasi come le estensioni dirette del calcolo infinitesimale dominarono il XVIII secolo. La teoria delle funzioni, uno dei rami più fertili della matematica, è stata chiamata la gioia matematica del secolo. Essa è stata anche acclamata come una delle teorie più armoniose di tutte le scienze astratte.

Nuovi punti di vista nell’analisi.

Intorno al 1800 i matematici incominciarono a preoccuparsi dell’imprecisione dei concetti e delle dimostrazioni di vaste branche dell’analisi. **Lo stesso concetto di funzione non era chiaro**. La controversia sulla rappresentazione delle funzioni mediante serie trigonometriche aveva introdotto ulteriore confusione e i concetti fondamentali di **derivata** e **integrale** non erano mai stati definiti correttamente.

ABEL, in una lettera del 1826 al Professor Christoffer Hansteen, lamentava:

*“la tremenda oscurità che senza alcun dubbio si trova nell’analisi.
(...) quel che è peggio, essa non è mai stata trattata rigorosamente.”*



Numerosi matematici decisero di portare un po' d'ordine in tutto questo caos. La scelta fu quella di ricostruire l'analisi sulla base di concetti puramente aritmetici.

È da osservare che le origini di questo movimento (spesso definito **Movimento Critico**) coincidono con la creazione della geometria non euclidea.

GAUSS già dal 1799 aveva espresso i suoi dubbi sulla "verità" della geometria euclidea e aveva deciso poi, nel 1817, che la verità risiedeva soltanto nell'aritmetica. Inoltre, nel corso delle prime ricerche sulla geometria non euclidea compiute dallo stesso Gauss e da altri, erano state notate delle falle nella costruzione euclidea.

È probabile che entrambi questi fattori abbiano generato sfiducia nella geometria e abbiano accelerato la decisione di fondare l'analisi su concetti aritmetici.

L'analisi rigorosa inizia con l'opera di **BOLZANO, CAUCHY, ABEL e DIRICHLET**, e fu poi proseguita da Weierstrass.

Carl Friedrich Gauss



Gauss era di origini estremamente modeste: il padre passava da un mestiere all'altro, a seconda di dove gli si presentavano le occasioni di guadagno: fu muratore, giardiniere, macellaio. La madre, prima del matrimonio, aveva lavorato come domestica, ed era praticamente analfabeta, ma incoraggiò il figlio negli studi e fu molto orgogliosa dei suoi successi.

Egli si fece subito notare, fin dalla scuola elementare, per la sua straordinaria predisposizione alla matematica.

Le sue straordinarie doti furono notate da persone di alto rango, fra cui il Duca Ferdinando di Braunschweig. Grazie all'appoggio finanziario di quest'ultimo, Gauss poté proseguire gli studi in prestigiosi collegi della città, e quindi, nel 1795, iscriversi all'Università di Göttingen. Allora Gauss non aveva ancora deciso se dedicarsi alla matematica oppure alla filologia.

La definitiva scelta a favore della prima avvenne il 30 marzo 1796, quando egli fece una storica scoperta: scoprì per primo la possibilità di costruire, con riga e compasso, un poligono regolare con 17 lati (*ettadecagono*).

Fu questa la prima annotazione di Gauss sul suo diario scientifico: ad essa ne seguirono ben 146, concentrate in sole 19 pagine. **L'ultima reca la data del 9 luglio 1814**. Tra i primi risultati riportati vale la pena di ricordare quello del 10 luglio 1796: "*ogni numero intero è somma di non più di tre numeri triangolari*".

Più tardi Gauss definì la Matematica come la regina delle scienze, e l'Aritmetica (o **teoria dei numeri**) come la regina della Matematica.

Il diario ci permette di rintracciare lo sviluppo del suo genio, dato che alcuni dei suoi pensieri più originali non furono mai pubblicati durante la sua vita. Il diario rimase nascosto fra le carte di famiglia fino al 1898, quando fu rinvenuto fra le cose in possesso di un suo nipote che viveva a Hamelin. Il contenuto del diario fu pubblicato nel 1901 a cura del matematico Felix KLEIN, in un volume celebrativo del 150° anniversario della fondazione della Società Scientifica di Göttingen, ed il diario stesso fu poi depositato presso gli archivi gaussiani conservati principalmente a Göttingen e Braunschweig.

Per brevi periodi Gauss lasciò Göttingen per l'Università di Helmstädt, dove ricevette il dottorato nel 1798. La relativa dissertazione, scritta in latino e pubblicata a Helmstädt nel 1799, si intitolava "*Demonstratio nova Theorematis omnem Functionem algebraicam rationalem integram unius Variabilis in Factores reales primi vel secundi Gradus resolvi posse*" (Nuova dimostrazione del teorema che ogni funzione algebrica razionale intera a una variabile può essere risolta in fattori reali di primo o secondo grado).

Questo teorema, che Gauss successivamente chiamò **Teorema Fondamentale dell'Algebra**, era essenzialmente identico a quello noto come "Teorema di d'Alembert"; Gauss però dimostrò come tutte le dimostrazioni precedentemente tentate, comprese quelle di Eulero e Lagrange, fossero inadeguate.

La dissertazione di dottorato di Gauss dimostrava che ogni equazione polinomiale $f(x) = 0$ ha almeno una radice, sia che i coefficienti siano reali o immaginari.

La dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra presentata da Gauss nella sua tesi di dottorato era basata in parte su considerazioni geometriche. Molti anni dopo, nel 1816,

Gauss ne pubblicò due nuove dimostrazioni, e un'altra ancora nel 1850, cercando di dimostrarlo con metodi puramente algebrici.

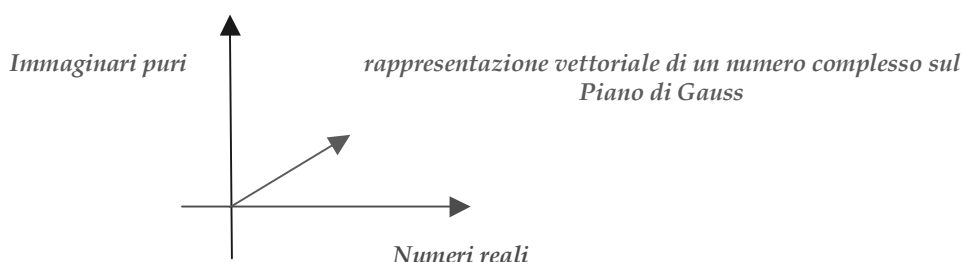
Oggi generalmente si ritiene che il teorema fondamentale dell'algebra dipenda essenzialmente da considerazioni topologiche.

La molteplicità degli interessi di Gauss, nonché la sopraggiunta passione per l'astronomia, non lo distolsero comunque dal dare altri importanti contributi alla matematica.

La rappresentazione grafica dei numeri complessi

La rappresentazione grafica dei numeri complessi era già stata scoperta nel 1797 da **Caspar WESSEL** (1745-1818) e pubblicata nel 1798 agli atti dell'Accademia Danese, ma il lavoro di Wessel rimase praticamente sconosciuto, tanto che ancora oggi l'interpretazione geometrica dei numeri complessi come punti del piano viene chiamata **Piano di Gauss**, anche se Gauss pubblicò le sue ricerche solo successivamente.

Era già noto che i numeri reali potevano essere rappresentati come punti di una retta. Qualcuno era addirittura giunto a suggerire la possibilità di rappresentare i numeri immaginari puri con una retta perpendicolare all'asse dei numeri reali, ma nessuno, prima di Wessel e Gauss aveva fatto l'ovvio passo successivo di concepire la parte reale a e la parte immaginaria bi del numero complesso $a + ib$ come coordinate ortogonali dei punti di un piano. L'aver effettuato questo passo diede ai matematici maggiore confidenza con i numeri "immaginari":



questi infatti potevano ora essere visualizzati nel senso che ogni punto del piano corrispondeva ad un numero complesso e viceversa. La grande maggioranza dei matematici abbandonò quindi le vecchie idee sulla non-esistenza dei numeri immaginari.

Avendo completato i suoi studi sui numeri complessi e la loro **rappresentazione geometrica**, Gauss pensò di estendere al campo complesso la teoria delle funzioni di una variabile, che **Lagrange** aveva sviluppato per il campo reale. Gauss fu dunque il vero iniziatore dell'**analisi complessa**, in quanti intuì un teorema di importanza fondamentale in questo campo ancora inesplorato:

Se nel piano complesso (o di Gauss) tracciamo una curva chiusa semplice e se una funzione $f(z)$ nella variabile complessa $z = x + iy$ è analitica (ossia è derivabile) in ogni punto della curva e all'interno della curva stessa, l'integrale di linea di $f(x)$ lungo la curva è zero.

Gli appunti e gli scritti inediti di Gauss rimasero incombenti sui matematici della prima metà del secolo XIX: ogni volta che un'importante scoperta veniva annunciata da un matematico, spesso si scopriva che Gauss ne aveva già avuta l'idea ma non l'aveva pubblicata. Uno degli esempi più notevoli di questa situazione è l'invenzione delle **funzioni ellittiche**, nella quale furono coinvolti quattro matematici di primo piano.

Legendre aveva passato una quarantina d'anni a studiare gli integrali ellittici quasi da solo, riuscendo a sviluppare moltissime formule, alcune delle quali mostravano analogie con le relazioni esistenti tra funzioni trigonometriche inverse (già in parte conosciute anche da Eulero).

Infatti, l'integrale ellittico

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1 + K^2 x^2)(1 - x^2)}}$$

include

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

come caso particolare quando $K = 0$.

Se:

$$u = \int_0^v \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

allora $u = \arcsin v$. Qui u è espressa come funzione della variabile indipendente v (x è una sorta di variabile "fittizia", usata ai fini dell'integrazione).

Una cosa che Legendre non aveva mai notato, ma che invece Gauss, Abel e Jacobi videro bene, era che invertendo la relazione funzionale tra u e v , si otteneva una funzione $v = f(u)$, più utile ed elegante.

Questa funzione, indicata con $v = snu$ (“senamplitudine di u ”), e altre funzioni definite in maniera simile, sono note come **Funzioni Ellittiche**.

La proprietà più notevole di queste nuove funzioni trascendenti superiori era data dal fatto che, nella teoria delle variabili complesse, esse presentano una doppia periodicità. Esistono, cioè, due numeri complessi m e n tali che $v = f(u) = f(u + m) = f(u + n)$.

Mentre le funzioni trigonometriche hanno soltanto un periodo reale (2π) e la funzione e^x ha solo un periodo immaginario ($2\pi i$), le funzioni ellittiche hanno due periodi distinti.

Gauss viene talvolta descritto come l’ultimo matematico in grado di abbracciare l’intero campo di questa scienza. Tale considerazione è inevitabilmente inesatta, ma serve comunque a mettere in rilievo l’ampia gamma di interessi da lui manifestata.

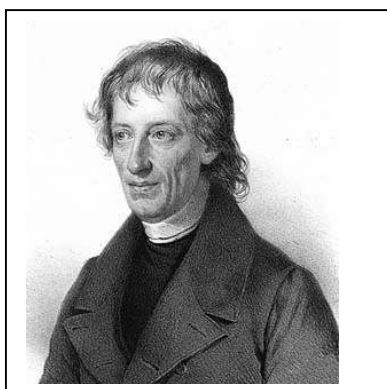
Dato che non pubblicava mai subito le sue scoperte, preferendo aspettare che fossero mature (“*pauca sed matura*” era il suo motto), Gauss si sforzò di essere onesto verso gli altri studiosi che magari pubblicavano risultati a lui già noti, ma talvolta era poco compiacente verso le ricerche altrui, specialmente verso quelle di **Cauchy**. Quest’ultimo era, tra l’altro, il matematico che più gli si avvicinava per l’importanza dei risultati raggiunti, ma non venne citato neppure una volta da Gauss.

Gauss e Cauchy morirono a distanza di due anni l’uno dall’altro. Ad entrambi erano stati generosamente tributati onori di ogni genere, così come era avvenuto precedentemente nei casi di Lagrange, Carnot e Laplace. Lagrange e Carnot avevano ricevuto il titolo di conte, e a Laplace l’imperatore aveva conferito il titolo di marchese. Cauchy, in riconoscimento della sua fedeltà monarchica, era stato nominato barone da Carlo X. Gauss non si fregiò mai di titoli nobiliari, ma i posteri lo salutarono unanimemente come **il Principe dei Matematici**.



L’effigie di Gauss compariva sulle banconote da 10 marchi tedeschi circolanti in Germania fino all’introduzione della moneta unica europea.

Bernhard Bolzano



Bernhard BOLZANO era un monaco boemo al di fuori dalle principali correnti del pensiero scientifico dell'epoca. Nel 1817 dimostrò, in un lavoro che fu dimenticato, in termini **puramente analitici**, un teorema già noto ai matematici, che anzi aveva avuto le sue prime formulazioni già nel '500:

Se una funzione reale di variabile reale, continua in un intervallo $[\alpha, \beta]$, assume valori di segno opposto nei due punti α e β , allora esiste almeno una radice reale dell'equazione $f(x) = 0$ compresa tra α e β .

Il riferimento geometrico "naturale" di questo teorema è evidente: una curva continua non può passare da una parte all'altra dell'asse x senza tagliarlo almeno in un punto. Pertanto, questa proposizione era da sempre stata ritenuta VERA.

Bolzano non ne nega la verità, ma afferma che, per poterla accettare, è **necessaria una dimostrazione rigorosa** (\cong condotta in termini analitici, senza l'appoggio dell'evidenza geometrica).

Sia gli argomenti, che le motivazioni che adduce al proprio modo di ragionare sono del tutto inusuali per l'epoca. Bolzano è consapevole della novità del suo punto di vista, quindi si augura che questo venga fatto proprio dai matematici più influenti e che quindi possa diventare corrente.

La memoria redatta da Bolzano, affidata per la pubblicazione agli atti della società reale boema delle Scienze, fu probabilmente letta da Cauchy. Afferma Bolzano:

"non si può obiettare assolutamente nulla contro la correttezza né contro l'evidenza" della corrispondente proposizione geometrica. Il punto è che "è del tutto chiaro che qui c'è un errore intollerabile contro il buon metodo, errore che consiste nel voler dedurre le verità delle matematiche

pure (aritmetica, algebra o analisi) *da considerazioni che appartengono a una parte applicata soltanto, cioè la geometria*".

Da questa premessa, nasce quindi l'esigenza di dover chiarire cosa si intenda con "dimostrazione matematica".

BOLZANO → Le dimostrazioni non devono essere semplici procedure di "fabbricazione di evidenze, ma piuttosto dei fondamenti", cioè "occorre esporre i fondamenti oggettivi posseduti dalla verità da dimostrare".

Altro argomento innovativo di Bolzano è contro le dimostrazioni basate sul concetto di continuità di una funzione in cui siano fatti intervenire i concetti di *tempo* e *movimento*:

I concetti di tempo e movimento sono del tutto estranei alle matematiche generali, così come il concetto di spazio.

Il loro uso è al più legittimo a scopo esemplificativo e come abuso di linguaggio, ma non saranno accettati esempi al posto di dimostrazioni e la sostanza di una dimostrazione non si baserà mai su espressioni del linguaggio usate impropriamente e sulle immagini secondarie che esse evocano.

È l'enunciazione di un programma.

Weierstrass e i suoi allievi si atterrano a questi criteri.

Bolzano, in totale coerenza con le proprie precedenti affermazioni, dà questa definizione di continuità:

una funzione $f(x)$ è continua per tutti i valori di x all'interno o all'esterno di certi limiti se, x essendo uno di questi valori qualunque, la differenza $f(x + \omega) - f(x)$ può essere resa più piccola di ogni grandezza data se si prende ω arbitrariamente piccolo.

È vero che una funzione continua non assume un certo valore senza aver prima assunto tutti i valori che "lo precedono", ad esempio $f(x + n\Delta x)$ può assumere tutti i valori

compresi tra $f(x)$ e $f(x + \Delta x)$ quando si prenda arbitrariamente n tra 0 e 1 compresi, ma questo “non può essere considerato come la spiegazione del concetto di continuità”; è piuttosto un **teorema sulla continuità**”.

Il Cours d'analyse di Cauchy



Le principali opere di Cauchy sui fondamenti dell'analisi sono il *Cours d'Analyse algébrique* (1820), il *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal* (1823) e le *Leçons sur le calcul différentiel* (1829).

In realtà il rigore conseguito da Cauchy in queste opere è insufficiente rispetto agli standard moderni.

Egli si serve di frasi come:

“si avvicina indefinitamente”,

“piccolo quanto si vuole”,

“gli ultimi rapporti degli incrementi infinitamente piccoli”,

“una variabile si avvicina al suo limite”.

Paragonando tuttavia il *Cours* di Cauchy con le opere di Lagrange (*Théorie des fonctions analytiques* su tutte), ci si rende conto di quanto sia grande la differenza fra la matematica del Settecento e quella dell'Ottocento. Lagrange in particolare era puramente formale e operava soltanto con espressioni simboliche, mentre mancavano del tutto i concetti base di limite e di continuità.

Cauchy afferma molto esplicitamente nell'introduzione al *Cours* che il suo obiettivo è quello di rendere rigorosa l'analisi osservando, tra l'altro, che il libero uso per tutte le funzioni delle proprietà che valgono per le funzioni algebriche e l'uso delle serie divergenti non sono giustificati. Cauchy era convinto, e lo afferma per esempio nel *Résumé*, di aver introdotto nell'analisi il rigore definitivo.

Cauchy mise per iscritto e pubblicò il corso delle lezioni di analisi matematica tenute all'École Polytechnique. La sua concezione dell'analisi e del rigore non differiva molto da

quella di Bolzano, ma il suo volume trovò nel mondo matematico un'accoglienza ben più calorosa nel mondo matematico rispetto al pamphlet di Bolzano.

Il volume di Cauchy diventò il manifesto della *nuova* analisi, un libro che

“deve essere letto da ogni analista che ami il rigore nelle ricerche matematiche”

(Abel)

Afferma Cauchy nell'introduzione al *Course d'Analyse*:

“Quanto ai metodi, ho cercato di dar loro tutto il rigore che si esige in geometria, in modo da non ricorrere mai ad argomenti tratti dalla generalità dell'algebra.

Bisogna (...) osservare che essi tendono a far attribuire alle formule algebriche un'estensione indefinita, mentre in realtà la maggior parte di queste formule sussiste unicamente sotto certe condizioni e per certi valori delle quantità in esse contenute.

Determinando queste condizioni e questi valori e fissando in modo preciso il senso delle notazioni di cui mi servo, faccio sparire ogni incertezza (...)”

Cauchy concorda con Lagrange sulla necessità di fondare l'analisi in modo rigoroso, non limitandosi a giustificare i metodi usati sulla base del successo delle applicazioni in geometria o in fisica. Diversamente da Lagrange, però, non individua nell'algebra i fondamenti dell'analisi.

Lo strumento che Cauchy elabora per condurre a termine la sua opera di revisione critica è la **TEORIA DEI LIMITI**.

Nell'apertura del *Course d'analyse*, egli definisce infatti, a partire dal concetto di limite, la continuità delle funzioni, la derivata e l'integrale.

“Allorché i valori successivamente assunti da una stessa variabile si avvicinano indefinitamente a un valore fissato, si da differirne alla fine tanto poco quanto si vorrà, quest'ultima quantità è chiamata il limite di tutte le altre.”

Questo concetto, quindi, anche se da sempre più o meno presente nello spirito di ogni matematico, viene finalmente isolato e posto a fondamento del calcolo infinitesimale. Possiamo anche vedere l'esempio presentato da Cauchy per chiarire il concetto: *“così, per*

esempio, un numero irrazionale è il limite delle diverse frazioni che ne forniscono valori sempre più approssimati”.

Vengono poi presentati le usuali operazioni di calcolo (somma, prodotto, ...), l'esponenziale, il logaritmo e le funzioni trigonometriche. È nel primo capitolo che si trova la definizione di funzione di una (o più) variabile reale:

“allorché delle quantità variabili sono legate tra loro in modo tale che, dato il valore di una, si possa ricavare il valore di tutte le altre, queste, espresse per mezzo della variabile indipendente, sono chiamate funzioni di questa variabile.”

Analogamente vengono definite le funzioni di più variabili indipendenti, e viene operata una distinzione tra funzioni definite esplicitamente e funzioni implicite, caso che si presenta *“quando si danno solo le relazioni tra le funzioni e la variabile, vale a dire le equazioni alle quali soddisfano queste quantità, senza che tali equazioni siano risolte algebricamente”*. Dopo aver definito, sempre attraverso i limiti, gli infinitesimi di primo ordine e degli ordini successivi, Cauchy fornisce anche la definizione di continuità di una funzione:

“sia $f(x)$ una funzione della variabile x , e supponiamo che, per ogni valore intermedio di x entro due limiti dati, la funzione ammetta sempre un valore finito. Se, partendo da un valore di x compreso entro questi due limiti, si attribuisce alla variabile x un incremento infinitesimo α , la funzione stessa riceverà per incremento la differenza $f(x+\alpha) - f(x)$, che dipenderà al tempo stesso dalla nuova variabile α e dal valore di x .

Ciò posto, la funzione $f(x)$ sarà, entro i due limiti assegnati alla variabile x , funzione continua di questa variabile se, per ogni valore di x compreso tra questi due limiti, il valore numerico della differenza $f(x+\alpha) - f(x)$ decrescerà indefinitamente insieme a quello di α .”

Cauchy riformula poi lo stesso concetto in termini di infinitesimi:

“la funzione $f(x)$ resterà continua rispetto a x tra i due limiti dati se, entro questi limiti, un incremento infinitesimo della variabile produce sempre un incremento infinitesimo della funzione stessa.”

Osservazioni:

–come in Lagrange, la definizione di funzione data da Cauchy è svincolata dall'esprimibilità della variabile dipendente;

–la continuità intesa da Cauchy comprende anche funzioni con punti angolosi, dunque funzioni non sempre derivabili nel loro dominio di definizione;

–come in Bolzano, è chiaramente espressa l'idea che, quando si voglia affermare qualcosa sulla continuità di una funzione, questa vada sempre considerata "entro due limiti dati";

–le definizioni di funzione continua date da Cauchy e Bolzano sono incredibilmente simili, considerato anche che, all'epoca, il loro era un modo del tutto nuovo di studiare la continuità, con forse questa differenza:

○ Bolzano sembra muoversi consapevolmente verso una distinzione tra continuità e derivabilità, arrivando anche a considerare (già nel 1830) una funzione continua in ogni suo punto, ma in nessun punto derivabile, della quale un primo esempio comparirà solo nelle lezioni di Weierstrass, e negli anni Settanta dell'Ottocento;

○ Cauchy sembra essere ancora legato all'analisi classica, e gli esempi che produce sono di funzioni continue tutte derivabili ($a+x$, $a-x$, ax , $\sin x$, $\cos x$, $\log x$, a^x , ...), e come funzione discontinua dà l'esempio di $\frac{a}{x}$ per $x=0$.

Da affermazioni fatte anche successivamente, Cauchy sembra essere convinto che le funzioni continue siano sempre derivabili, e cessino di esserlo solo nei punti di discontinuità. Una consapevolezza piena della novità teorica insita nella sua definizione di continuità, rispetto alla tradizione di Lagrange e di Euler, Cauchy la esprimerà solo in uno scritto molto più tardo:

"Nelle opere di Euler e di Lagrange, una funzione è chiamata continua o discontinua secondoché i diversi valori di essa, corrispondenti a diversi valori della variabile, sono o non sono soggetti a una medesima legge, sono o non sono forniti da una sola e medesima equazione.

È in questi termini che la continuità delle funzioni trovasi definita da questi illustri geometri (...).

Tuttavia, siffatta definizione è lontana dall'offrire una precisione matematica, poiché, se i diversi valori di una funzione corrispondenti ai diversi valori di una funzione corrispondenti ai

diversi valori d'una variabile dipendono da due o più equazioni distinte, nulla impedirà di diminuire il numero di queste equazioni, e anche di sostituirvi un'unica equazione la cui decomposizione fornirebbe tutte le altre. (...)

Se si considera la definizione di Euler e di Lagrange come applicabile ad ogni specie di funzioni, siano esse algebriche o trascendenti, un semplice cambiamento di notazione basterà sovente per trasformare una funzione continua in funzione discontinua, e reciprocamente. (...)

Dunque, il carattere di continuità nelle funzioni, considerato dal punto di vista dal quale dapprima si misero i geometri, è un carattere vago e indeterminato. Ma l'indeterminazione cesserà se alla definizione di Euler si sostituisce quella da me data nel capitolo 2 dell'Analyse algébrique."

Cauchy, 1844.

Nello stesso capitolo del *Course d'Analyse*, Cauchy dedica lunghe pagine allo studio dei "valori singolari delle funzioni in alcuni casi particolari". Egli stesso dice che "si tratta di una delle questioni più importanti e più delicate dell'analisi", studiare cioè i limiti di alcune funzioni per $x \rightarrow \pm\infty$ e $x \rightarrow 0$, il che lo porta ad individuare le cosiddette forme indeterminate del tipo $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 0^0 , ∞^0 , 1^∞ .

Nel corso di questa ricerca, Cauchy enuncia e dimostra teoremi divenuti poi classici:

1° Teorema. *Se, per valori crescenti di x , la differenza $f(x+1) - f(x)$ converge verso un certo limite k , la frazione $\frac{f(x)}{x}$ convergerà anch'essa verso lo stesso limite.*

2° Teorema. *Se, essendo la funzione $f(x)$ positiva per valori molto grandi di x , il rapporto $\frac{f(x+1)}{f(x)}$ converge verso il limite k , al crescere indefinitamente di x l'espressione $[f(x)]^{\frac{1}{x}}$ convergerà anch'essa verso lo stesso limite.*

I due teoremi valgono anche quando $f(x)$ è definita solo per valori interi di x , e dunque possono essere riformulati in termini di successioni, cosa di cui Cauchy si servirà successivamente per enunciare criteri di convergenza per le serie.

Queste occupano il sesto capitolo del *Cours*. Qui Cauchy definisce **convergente** una serie “se per valori sempre crescenti di n , la somma s_n si avvicina indefinitamente ad un certo limite s ” che sarà detto la **somma** della serie.

Al contrario, se al crescere di n , “ s_n non si avvicina ad alcun limite fissato, la serie sarà **divergente**, e non avrà più somma”.

Cauchy enuncia poi la celebre condizione necessaria e sufficiente per la convergenza (la “**condizione di Cauchy**”), ed il seguente teorema:

(1) Allorché i diversi termini della serie $\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n \right]$ sono delle funzioni di una stessa variabile x , continue rispetto a questa variabile nell'intorno di un valore particolare per il quale la serie è convergente, anche la somma s della serie, nell'intorno di questo valore particolare, è funzione continua di x .

Cauchy non nomina esplicitamente Fourier, ma con questi risultati ne mette in discussione l'intero approccio: le funzioni seno e coseno che compaiono nelle serie di Fourier sono funzioni continue. Secondo il precedente teorema di Cauchy, le serie di Fourier di funzioni discontinue non sono convergenti alle funzioni date.

Omettiamo in questa sede, ovviamente, la dimostrazione di Cauchy, ma questo teorema tornerà quando si analizzerà l'opera di Abel.

Tra i limiti notevoli e le forme indeterminate che Cauchy passa in rassegna nel suo *Course d'analyse*, compare in particolare quella del tipo $\frac{0}{0}$:

“allorché i due termini d'una frazione sono delle quantità infinitesime i cui valori numerici decrescono indefinitamente con quello della variabile α , il valore singolare che assume questa frazione per $\alpha = 0$ è talvolta finito, talvolta nullo o infinito (...)

Tra le frazioni i cui due termini convergono a zero insieme alla variabile si deve porre la seguente:

$$\frac{f(x + \alpha) - f(x)}{\alpha}$$

tutte le volte che si attribuisce alla variabile x un valore nel cui intorno la funzione $f(x)$ si mantiene continua.”

Come esempi, propone le funzioni $f(x) = x^2$ e $f(x) = \frac{a}{x}$, per le quali i limiti di cui sopra sono rispettivamente $2x$ e $\frac{-a}{x^2}$.

Dopo aver dimostrato, col metodo ancora oggi usato, che

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$

Cauchy aggiunge: *“essendo la ricerca dei limiti verso cui convergono i rapporti*

$$\frac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha} \text{ e } \frac{f(\alpha) - f(0)}{\alpha}$$

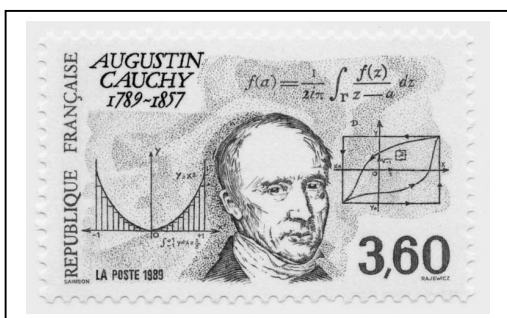
uno dei principali oggetti del calcolo infinitesimale, noi non vi indugeremo oltre.”

Questo è l'unico accenno al CONCETTO DI DERIVATA che si trova nel *Course*.

La nozione di continuità fu esplorata per tutto il XIX secolo e i matematici impararono molte cose su di essa, scoprendo anche risultati che li sbalordirono. Darboux diede un esempio di funzione che, quando x passava da a a b , assumeva tutti i valori compresi fra due valori dati, ma che tuttavia non era continua, cosicché una delle proprietà basilari delle funzioni continue non è sufficiente per assicurare la continuità:

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

essa passa per tutti i valori compresi tra quello assunto per un valore negativo di x e quello assunto per un valore positivo di x , tuttavia non è continua per $x = 0$.



Cauchy era diverso da Gauss, pubblicava subito qualsiasi risultato una volta che l'aveva raggiunto, forse per questo la principale caratteristica della matematica del XIX secolo, **il rigore**, viene attribuita a Cauchy piuttosto che a Gauss, nonostante l'alto livello di precisione che questi si era prefisso.

*Può darsi che in questo fatto un ruolo importante sia stato rivestito dalla tradizione pedagogica dell' École Polytechnique: infatti, Cauchy amava l'insegnamento e vi era in lui chiarezza e sistematicità pedagogica, caratteristiche meno presenti in Gauss che, invece, odiava l'insegnamento. In una lettera del 1810 indirizzata al suo amico **Bessel**, Gauss così scriveva: "Quest'inverno faccio due serie di corsi a tre studenti, dei quali uno ha una preparazione mediocre, l'altro più che mediocre, e il terzo manca totalmente sia di preparazione che di capacità. Questi sono i mesi morti della preparazione del matematico."*

Gauss aveva annotato qua e là nel suo diario , tenendoli nascosti, parecchi teoremi sulle variabili complesse, ma fu Cauchy che continuò a riempire le pagine del *Journal* dell'École Polytechnique e dei *Comptes Rendus* dell'Académie con memorie sempre più lunghe. Queste toccavano gli argomenti più svariati, ma la maggior parte riguardavano particolarmente la teoria delle funzioni di una variabile complessa.

Nel XVIII secolo si erano presentati qualche volta, in relazione alla fisica di Eulero e di D'Alembert, problemi contenenti variabili complesse. Ora, problemi del genere erano diventati parte della matematica pura.

Dal momento che, per la rappresentazione figurativa della sola variabile indipendente si richiedono due dimensioni (vd. Piano di Gauss), per rappresentare graficamente una funzione complessa di variabile complessa $w = f(z)$.

⇒ una teoria che tratti di variabili complesse comporta necessariamente un grado di astrazione e di complessità superiore a quello dello studio delle funzioni di una variabile reale. Ad esempio, non è facile trasportare definizioni e regole di differenziazione dal caso reale a quello complesso, e la derivata in quest'ultimo caso non viene più rappresentata come pendenza o coefficiente angolare della retta tangente ad una curva.

Senza il supporto di un riferimento visivo, si sente maggiormente l'esigenza di definizioni più precise e accurate dei concetti.

Uno dei contributi di Cauchy al calcolo infinitesimale consistette appunto nel dare soddisfazione a questa esigenza di rigore, per quanto riguardava sia le variabili reali, sia le variabili complesse.

Niels Henrik Abel



Nacque in una famiglia numerosa: suo padre era pastore del piccolo villaggio di Findö in Norvegia. Quando aveva sedici anni, il suo insegnante gli fece leggere le opere classiche della matematica. Durante queste letture, Abel osservò che Eulero aveva dimostrato il Teorema del binomio soltanto per potenze razionali, ed egli colmò la lacuna, dando una dimostrazione che valeva per il caso generale.

Abel aveva diciotto anni quando il padre morì e gran parte del carico della famiglia ricadde sulle sue spalle.

Nell'ottobre del 1826 Abel si trovava a Parigi, tappa del suo viaggio di studio in Europa. Era venuto a contatto con matematici del calibro di **Legendre**, **Cauchy**, **Hachette**, **Saigey**, **Lejeune-Dirichlet** e, in una lettera al suo antico professore esprime le proprie sensazioni:

Lejeune-Dirichlet è un matematico assai acuto. (...) Legendre è un uomo assai affabile, ma sfortunatamente "vecchio come le pietre".

Cauchy è matto e con lui non c'è niente da fare, benché sia in questo momento il matematico che sa come bisogna fare della matematica. I suoi lavori sono eccellenti, ma scrive in modo molto confuso. (...)

Ciascuno lavora per conto suo senza occuparsi di quello che fanno gli altri, tutti vogliono insegnare e nessuno vuole imparare. L'egoismo più assoluto regna ovunque.

Parigi all'inizio del 1800 era la città più scientificamente vivace d'Europa e il quadro che Abel ne fa è per noi fonte di notizie sugli uomini e le idee che la animavano.

Abel era estraneo allo spirito "politecnico", alle applicazioni fisiche, i suoi temi di ricerca appartenevano al dominio della pura analisi. Il suo riferimento naturale era nell'opera di Cauchy, il quale da tempo era impegnato in un lavoro di revisione critica dei principi dell'analisi, pubblicato nel "Course d'analyse" (1821), le lezioni da lui tenute all'École Polytechnique. Da esse Abel aveva fatto propria l'esigenza di un nuovo rigore nell'analisi.

Voglio dedicarmi con tutte le mie forze a fare un po' più di chiarezza nella prodigiosa oscurità che innegabilmente si trova oggi in analisi.

(...)

Essa manca a tal punto di un piano e di una struttura che è assolutamente stupefacente che possa essere studiata da tanta gente, e il peggio è che non è fatta per nulla con rigore. Non ci sono che pochissime proposizioni, nell'analisi superiore, che siano dimostrate con indiscutibile rigore.

(...)

A mio parere questo deriva dal fatto che le funzioni di cui l'analisi si è occupata finora possono, nella maggioranza dei casi, essere espresse per mezzo di potenze. Non appena ne intervengono altre (...) allora le cose non tornano più e da conclusioni false derivano una serie di proposizioni scorrette, ad esse concatenate. (...)

Finché si usa un metodo generale, la cosa va ancora bene; ma ho dovuto essere estremamente attento, perché una volta ammesse delle proposizioni senza dimostrazione rigorosa (vale a dire senza dimostrazione) esse si sono così fortemente radicate in me, che sono continuamente tentato di servirmene senza considerarle più da vicino.

Questa lettera di Abel esprime un disagio provato dai matematici all'inizio del secolo XIX verso i fondamenti della loro stessa scienza, di cui cominciavano ad avvertire sempre più chiaramente la precarietà. Gli argomenti di Abel e l'esigenza di rigore in matematica che egli esplicita cominciano ad essere sempre più diffusi all'epoca e comuni a molti matematici.

Ma **come** e **perché** il modo di fare matematica (e dunque i criteri di rigore matematico accettati) si è rivelato inadeguato agli occhi dei matematici all'inizio del secolo XIX, come abbiamo visto per Abel?

Abel sottolinea un fattore importante: nella pratica matematica **si va incontro a guai e paradossi se si tiene fermo il punto di vista fino ad allora accettato.**

Indichiamo alcuni altri fattori:

- la questione, all'epoca irrisolta, del calcolo infinitesimale che, a dispetto dei notevoli risultati prodotti, rimane problematico nei suoi principi;

- il fatto che le nuove ricerche (ad es. Fourier) hanno mostrato con chiarezza che neppure i *concetti fondamentali*, come quello di **funzione**, sembrano adeguatamente definiti. Ad esempio:

○ che cosa avviene di una funzione somma di una serie infinita di funzioni? Se queste sono tutte continue in un punto x_0 , lo sarà anche la somma e sotto quali condizioni?

Ma soprattutto:

○ che cosa si intende, al di là del riferimento grafico intuitivo, parlando di continuità?

Questi sono problemi che si presentano quando si affrontino (come nel caso di Fourier) fenomeni concreti e non solo questioni astratte di rigore.

⇒ è **dalla pratica** che vengono precise indicazioni di questioni aperte, che risultano insoddisfacenti nella loro attuale formulazione.

Altri due fattori entrano in gioco:

1. *di natura "filosofica"*. Implicito nella metafisica dell'analisi di Lagrange, sarà messo in luce con chiarezza da Bolzano: l'analisi non deve andare a ricercare nelle altre scienze, e neppure in altre branche della stessa matematica (fisica o geometria) il fondamento dei propri principi e dei propri criteri di rigore. E' questa la via che porterà (cinquanta anni dopo) alla cosiddetta **arimetizzazione** dell'analisi, cioè alla costituzione dell'analisi sul fondamento fornito dall'aritmetica dei numeri naturali.

A questa tendenza si accompagnerà una progressiva specializzazione e divisione del lavoro anche all'interno della matematica.



SEMPRE PIU' RARI SARANNO GLI UOMINI IN GRADO DI DOMINARE INTERAMENTE I DIVERSI CAMPI DELLA MATEMATICA.

2. *più strettamente legato alla questione del rigore*. Ha motivazioni più esterne alla matematica vera e propria: dall'inizio del secolo, la gran parte dei matematici è impegnata nell'attività di insegnamento nelle grandi scuole.

E', cioè, impegnata di fatto in un lavoro di **riorganizzazione** delle teorie matematiche in funzione didattica.

Si tratta quindi di ISOLARE i principi fondamentali delle teorie (nell'analisi i concetti di FUNZIONE, continuità, derivata, ecc...) e da essi far DISCENDERE i teoremi secondo una organizzazione deduttiva che mostri chiaramente come le varie proposizioni siano tra loro connesse



STESURA DI UNA GRAN QUANTITA' DI MANUALI PER STUDENTI.

Da Cauchy in poi, nell'Ottocento, i passi decisivi verso la concezione del rigore e l'organizzazione delle teorie divenute dominanti sono stati originati da questioni didattiche.

- DEDEKIND testimonia il disagio provato nello spiegare, nei suoi corsi di analisi al Politecnico di Zurigo, cosa fosse la continuità dei numeri reali;
- WEIERSTRASS nel corso delle sue lezioni presentò le definizioni oggi usuali di numeri reali, continuità, limite, derivata, ...

Nel 1821, quando aveva 19 anni, Abel aveva presentato la dimostrazione di uno dei più famosi teoremi della matematica: l'impossibilità di soluzione della equazione generale di 5° grado.

Ciò nonostante, quando nel 1826, cinque anni dopo, si trovò a Parigi, non era ancora riuscito ad ottenere un incarico universitario adeguato alle sue capacità. A quell'epoca, diversamente dal secolo precedente, lo sbocco naturale di un buon matematico era l'insegnamento universitario. A tal fine Abel lasciò a Cauchy una sua memoria, in modo che questi la potesse esaminare.

In una lettera ad un amico, Abel scrive: *“Ogni principiante trova grande difficoltà a farsi notare qui. Ho appena terminato un ampio trattato su una certa classe di funzioni trascendenti, ma il Sig. Cauchy non si è neanche degnato di dargli un'occhiata.”*

Cauchy in realtà smarrì questa memoria, che fu ritrovata solo l'anno dopo la morte di Abel, avvenuta nel 1829 per tubercolosi, e pubblicata nel 1841. Legendre descrisse il manoscritto come un "monumento più duraturo del bronzo".

Esso conteneva una importante generalizzazione delle ricerche di Legendre sugli **Integrali Ellittici**, che abbiamo esaminato nel paragrafo relativo a Gauss.

È difficile stabilire chi sia stato il primo a fare la scoperta della doppia periodicità:

- le ricerche di Abel furono pubblicate nel 1827-28;
- il trattato di Jacobi "*Fundamenta novae theoriae functionem ellipticarum*" nel 1829, anno della morte di Abel.

Sembra però che Gauss sia stato il primo in assoluto ad aver fatto tale scoperta, rimasta ignorata tra le sue carte per circa 25 anni, prima che Abel e Jacobi la rifacessero per proprio conto.

La memoria di Abel, che andò smarrita per parecchi anni, conteneva il concetto di qualcosa di ancor più generale delle funzioni ellittiche. Se si sostituisce l'integrale ellittico con

$$u = \int_0^v \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}$$

dove $P(x)$ è un polinomio il cui grado può essere superiore al quarto, e se si inverte anche qui la relazione funzionale tra u e v così da ottenere $v = f(u)$, questa funzione è un caso particolare di quella che oggi è nota come "**funzione abeliana**".

Fu, però, Jacobi che nel 1832 dimostrò per primo che l'inversione può essere effettuata non solo nel caso di un'unica variabile, ma anche quando si hanno funzioni di più variabili.

Curiosità: Jacobi rimase tanto colpito dalla semplicità raggiunta mediante una semplice inversione degli integrali ellittici, che dava il seguente consiglio a chiunque gli chiedesse il segreto del successo in matematica: "*Devi sempre invertire!*".

Abel fu il primo ad avanzare delle riserve sul teorema di Cauchy che abbiamo prima indicato come teorema (1). In una nota che compare in un suo articolo del 1826 egli osserva:

Mi sembra che questo teorema ammetta delle eccezioni. Per esempio la serie $\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \dots$ è discontinua per tutti i valori $(2m+1)\pi$ di x , m essendo un numero intero. Ci sono, come si sa, diverse serie di questo tipo.

Quella citata da Abel era una delle serie proposte da Fourier come esempi dei suoi sviluppi in serie trigonometriche.

Con ogni probabilità, Abel aveva trovato a Berlino, nella Biblioteca di Crelle, la *Théorie* di Fourier ed il *Cours* di Cauchy. Ed è proprio dopo la lettura del *Cours* che Abel vede le serie di Fourier come effettivi controesempi del teorema di Cauchy, proprio sulla base della definizione di continuità data dallo stesso Cauchy.

Sulla delicata questione del comportamento di serie di funzioni continue, Abel enunciò, nello stesso articolo, due teoremi.

Nel primo afferma che “se la serie $f(\alpha) = v_0 + v_1\alpha + v_2\alpha^2 + \dots + v_m\alpha^m + \dots$ è convergente per un certo valore δ di α , e, per valori decrescenti di β , la funzione $f(\alpha - \beta)$ si avvicina indefinitamente al limite $f(\alpha)$, allorché α è minore o uguale a δ ”.

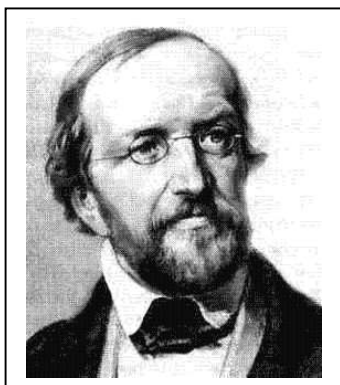
Passando poi a considerare, al posto delle v_n , delle funzioni $v_n(x)$, Abel enuncia il seguente teorema:

Sia $v_0 + v_1\delta + v_2\delta^2 + \dots$ una serie convergente, in cui v_0, v_1, v_2, \dots sono delle funzioni continue di una stessa variabile x entro i limiti $x = a$ e $x = b$; la serie $f(x) = v_0 + v_1\alpha + v_2\alpha^2 + \dots$, dove $\alpha < \delta$, sarà convergente e funzione continua di x entro gli stessi limiti.

Analogamente alla dimostrazione di Cauchy, anche quella di Abel contiene un'ipotesi illecita. Abel colse dunque nel segno, denunciando con un controesempio l'inesattezza del teorema di Cauchy sulle serie di funzioni continue, ma si trovò in difficoltà nello scoprire dove fosse il punto responsabile dell'errore nella dimostrazione. Abel si limitò ad osservare, con le cautele proprie di un giovane agli inizi rispetto ad un matematico dei più autorevoli, che gli sembrava che il teorema ammettesse “eccezioni”, curioso modo di dire che un teorema è falso e richiede, eventualmente, ipotesi aggiuntive.

D'altra parte lo stesso Abel riconosce che il *Cours* di Cauchy era la sua guida teorica, e quindi sono di Cauchy le tecniche di cui Abel fa uso, così come le stesse definizioni di continuità e di convergenza delle serie.

Il concetto di funzione di Dirichlet.



Johann Peter Gustav Lejeune DIRICHLET è descritto come un uomo di poche parole, riservato, quasi timido che, tuttavia, seppe instaurare buoni rapporti con i colleghi, soprattutto JACOBI. Ottimo insegnante, lasciava ai propri studenti la libertà più completa nel seguire i propri interessi matematici. È diventata celebre la sua affermazione “*Un matematico può essere soltanto democratico*”.

Al suo nome sono legati ben 25 concetti matematici. Il suo metodo consisteva – come disse MINKOWSKI – “*nel riunire in un minimo di cieche formule un massimo di veggente pensiero*”.

Nel 1837 Dirichlet pubblicò un articolo nel primo numero della rivista “*Repertorium der Physik*” nel quale egli riprendeva sostanzialmente risultati già esposti in precedenti memorie, con l’aggiunta però della definizione di alcuni concetti fondamentali di cui faceva uso, tra cui quello di continuità di una funzione in un intervallo.

Propose intanto una definizione molto ampia di funzione: “*se una variabile y ha una relazione con una variabile x tale che, ogni qual volta venga assegnato un valore numerico alla x , esiste una regola in base alla quale viene determinato un valore univoco di y , si dice che y è una funzione della variabile indipendente x .*”

Questa definizione presenta una affinità con l’idea moderna di corrispondenza tra due insiemi di numeri, anche se a quel tempo i concetti di “insieme” e di “numero reale” non erano ancora entrati stabilmente nel campo della matematica.

Si pensi di indicare con a e b due valori fissati e con x una grandezza variabile, che possa assumere tutti i valori compresi tra a e b . Ora, ad ogni x corrisponda un unico y finito e tale che, mentre x percorre con continuità l’intervallo da a a b , $y = f(x)$ vari in maniera del tutto simile; allora y si dice funzione continua di x in quest’intervallo. Per ciò, non è affatto necessario che y sia dipendente da x secondo la stessa legge nell’intero intervallo; neppure occorre pensare a una dipendenza esprimibile attraverso operazioni matematiche.

Rappresentata geometricamente, cioè pensate la x e la y come ascisse e ordinate, una funzione continua appare come una curva connessa di cui ad ogni valore dell'ascissa compreso tra a e b corrisponde un solo punto.

Questa definizione non impone un'unica legge per le varie parti della curva; questa si può pensare composta dalle più diverse parti o disegnata del tutto arbitrariamente. Ne segue che una simile funzione si deve considerare completamente determinata su un intervallo quando o è data graficamente per l'intero intervallo oppure, matematicamente, quando è sottoposta per le varie parti dell'intervallo, a leggi valide in esse. Anche quando si sia determinata una funzione per una parte dell'intervallo, rimane del tutto arbitraria la maniera in cui prolungare la funzione nella parte restante dell'intervallo.

Hankel (1839-1873) presenta, arbitrariamente e andando oltre le intenzioni dello stesso Dirichlet, la definizione di Dirichlet in questa forma:

“questa definizione, puramente nominale, cui in seguito assocerò il nome di Dirichlet, poiché essa sta a fondamento del suo lavoro sulle serie di Fourier, che hanno mostrato l'indifendibilità del precedente concetto senza ombra di dubbio, non basta affatto alle esigenze dell'analisi, poiché funzioni di questo tipo non possiedono proprietà generali e perciò vengono meno tutte le relazioni fra i valori delle funzioni corrispondenti ai diversi valori dell'argomento.”



grande confusione su cosa si debba intendere come funzione (chi la definisce 'alla Euler', chi 'alla Dirichlet', chi dice che una dipendenza funzionale è data secondo una legge, chi non dà alcuna definizione).

Tutti tuttavia traggono dai loro concetti conseguenze che non sono affatto contenute in essi.

Hankel.

C'era dunque bisogno di dare una definizione di funzione che consentisse di stabilire una teoria e un calcolo con le funzioni che fosse coerente con la definizione data, non troppo generale e tuttavia in grado di individuare la vasta classe di oggetti matematicamente interessanti che si hanno in vista. La presenza di punti di discontinuità, anche in numero infinito, nelle funzioni di variabile reale impose la ricerca di altri mezzi di indagine e si scoprì che tali punti si potevano più facilmente aggirare (anziché oltrepassare) considerando variabili complesse piuttosto che reali. Lo stesso Weierstrass osserva che la funzione di Dirichlet permetteva “di fare poche cose” a causa della sua troppo grande generalità, e veniva utilizzata perché si trasportavano “tacitamente le proprietà che possiedono tutte le funzioni considerate a queste funzioni generali”.

L'aspetto chiave della definizione di Dirichlet è l'aggettivo "continua" che accompagna il termine funzione: ciò che Dirichlet vuole chiarire è che una funzione continua si può dare o arbitrariamente con un grafico (la sua idea di curva continua è largamente intuitiva) oppure con una formula matematica, non necessariamente la stessa in ogni parte dell'intervallo. Dirichlet era in realtà lontano da quello che oggi viene chiamato il "concetto di Dirichlet di funzione". Dopo aver osservato che per la funzione si possono dare punti isolati di discontinuità, egli aggiunge:

la curva la cui ascissa è β e la cui ordinata è $f(\beta)$ consiste di più pezzi, la cui connessione è interrotta nei punti dell'asse delle ascisse che corrispondono a quei valori particolari di β , e per ognuna di tali ascisse corrispondono di fatto due ordinate, di cui l'una appartiene alla porzione di curva che termina in quel punto e l'altra alla porzione che vi comincia. Nel seguito sarà necessario distinguere questi due valori di $f(\beta)$ e li indicheremo con $f(\beta-0)$ e $f(\beta+0)$. Dove si presenta una soluzione di continuità e dunque la funzione ha propriamente due valori la serie, che per propria natura assume per ogni x un valore univoco, rappresenta la semisomma di questi valori:

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)].$$

Dirichlet, 1837.

Per sottolineare la natura assolutamente arbitraria della regola di corrispondenza nella propria definizione di funzione, Dirichlet propose una funzione molto "irregolare":

$$f(x) = \begin{cases} c & \text{se } x \text{ razionale} \\ d & \text{se } x \text{ irrazionale} \end{cases}$$

Questa funzione, nota come **Funzione di Dirichlet**, è così patologica che non esiste alcun valore di x per il quale essa sia continua.

La serie di Fourier



L'analisi era stata concepita da Newton e Leibniz come una disciplina matematica concernente grandezze continue, quali lunghezze, aree, velocità e accelerazioni, mentre la teoria dei numeri aveva evidentemente come proprio campo di studio quello rappresentato dall'insieme discreto dei numeri naturali.

Bolzano, però, aveva tentato di dimostrare con procedimenti puramente aritmetici proposizioni che sembravano dipendere dalle proprietà di funzioni continue.

Il XIX secolo fu un periodo in cui vennero stabilite correlazioni fra branche diverse della matematica: l'**aritmetizzazione della matematica** (espressione coniata da Klein nel 1895) era un aspetto di questa tendenza generale.

Termine essenziale dell'analisi è, naturalmente, quello di "funzione": fu specialmente in relazione ai tentativi volti a chiarificare questo termine che si affermò la tendenza all'aritmetizzazione. Già nel secolo precedente si erano manifestate differenze di opinione sulla rappresentazione delle funzioni (D'Alembert e Eulero avevano presentato soluzioni del problema della corda vibrante usando funzioni arbitrarie, mentre Bernoulli aveva trovato una soluzione espressa mediante una serie infinita di funzioni trigonometriche). Si pensava che la soluzione di Bernoulli, implicando funzioni periodiche, fosse meno generale.

J.B.J. FOURIER nel 1824 dimostrò che ciò non era vero. Fourier è oggi famoso soprattutto per la sua *Théorie analytique de la chaleur* (1822). Quest'opera (definita da Lord Kelvin "un grande poema matematico"), sviluppava sistematicamente alcune idee e intuizioni che gli avevano fatto vincere dieci anni prima un premio bandito dall'Académie. La commissione del premio era composta da LAGRANGE, LAPLACE e LEGENDRE, e criticarono il saggio di Fourier per lo scarso rigore delle argomentazioni. In linea con le tenenze del secolo XIX, gli sforzi successivi di Fourier furono volti a chiarificare e rendere rigorose le sue idee.

Il contributo principale di Fourier all'"età del rigore" consistette nell'idea, divenuta in seguito un concetto fondamentale della matematica, che **qualsiasi** funzione $y = f(x)$ può venire rappresentata mediante una serie di questa forma:

$$y = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx + \dots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots + b_n \sin nx + \dots$$

dove:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

espressione nota oggi come **Serie di Fourier**. Una tale rappresentazione di una funzione mediante una serie offre la possibilità di studiare tipi di funzioni considerevolmente generali.

Anche se in molti punti non esiste la derivata o la funzione non è continua, la funzione potrà sempre essere sviluppabile in una serie di Fourier.



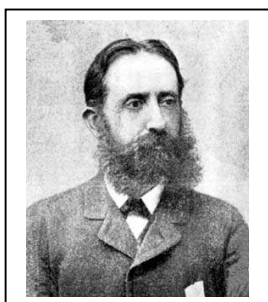
Le funzioni non dovevano più necessariamente presentare quella forma regolare alla quale i matematici erano stati abituati fino ad allora.

Dirichlet diede anche la prima dimostrazione rigorosa della convergenza della serie di Fourier per una funzione soggetta a certe restrizioni, note come **condizioni di Dirichlet**. Una serie di Fourier non sempre converge verso il valore di una funzione dalla quale essa è derivata, ma Dirichlet dimostrò il seguente teorema:

“Se $f(x)$ è periodica di periodo 2π , e se per $-\pi < x < \pi$ la funzione $f(x)$ ha un numero finito di valori massimi e minimi e presenta un numero finito di punti di discontinuità, e se l'integrale $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$ è finito, la serie di Fourier converge verso $f(x)$ in tutti i punti in cui $f(x)$ è continua, e nei punti di discontinuità converge verso la media aritmetica dei limiti a destra e a sinistra della funzione”.

Un altro utile teorema è quello noto come **Criterio di Dirichlet**:

“Se i termini della serie $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n + \dots$ sono tali che i b sono positivi e tendono monotonamente verso il valore zero, e se esiste un numero M tale che $|a_1 + a_2 + \dots + a_m| < M$ per tutti i valori di m , la serie è convergente”.



Se Abel, nella prima metà dell'Ottocento, si era recato a Parigi per incontrare i maggiori matematici della sua epoca, nel 1864 **Felice CASORATI** (1835-1890), giovane professore di analisi dell'Università di Pavia, si recò a Berlino per incontrare gli uomini che allora costituivano il punto di riferimento dei matematici europei.

Gli appunti da lui presi durante le conversazioni con Kronecker e Weierstrass forniscono una rassegna efficace delle questioni allora all'ordine del giorno e anticipano risultati che saranno pubblicati solo molto più tardi. Il punto di vista comune era che occorresse introdurre **un maggior rigore in analisi**. Di fronte ad una straordinaria ricchezza di risultati, infatti, ci si iniziava a render conto che anche le nozioni apparentemente più sicure e i teoremi fondamentali dell'analisi mancavano di una base rigorosa.

La stessa nozione di continuità appariva incerta.

La convinzione che lentamente e con polemiche e opposizioni si andò affermando fu che il rigore desiderato si poteva raggiungere solo a patto di abbandonare il rigore intuitivo dell'evidenza geometrica, da sempre riferimento naturale degli argomenti di analisi e di considerare il concetto di numero naturale come il fondamento su cui ricostruire l'edificio dell'analisi.

Va osservato, comunque, che i mutamenti negli standard di rigore, così come la tendenza alla generalizzazione e l'introduzione di nuovi concetti, trovano motivazione nelle necessità, sul terreno concreto della pratica matematica. Questi sono i temi che si intrecciano nei discorsi di Casorati con Kronecker e Weierstrass, e che il matematico italiano annota così come gli vengono esposti, trattandosi di ricerche in corso. Questo, ad esempio, è il resoconto del primo incontro con Kronecker:

“la continuità è ancora un'idea confusa, afferma Kronecker, che definisce in iscuola come continua una funzione reale $\phi(x)$ d'una variabile x quando, fissata una quantità δ piccola quanto si vuole, si possa rendere

$$\phi(x) - \phi(x') < \delta$$

e questa disuguaglianza sussista poi ponendo in luogo di x' qualunque altro valore che più di esso si accosti a x .”

N.B. questa è la stessa definizione data da Riemann nella sua tesi di laurea, e da Weierstrass nelle sue lezioni.

Casorati chiede a Kronecker se la derivabilità sia condizione necessaria per la continuità, ovvero se sia necessario, perché una funzione sia continua, che $\lim_{x' \rightarrow x} \frac{\phi(x) - \phi(x')}{x - x'}$ sia finito.

“a questa domanda Kronecker convenne meco l’opinione che la continuità in certo modo esiste anche quando sia $\lim \frac{\phi(x+k) - \phi(x)}{k^{1/2}}$ o $\lim \frac{\phi(x+k) - \phi(x)}{k^{1/3}}$ ecc. finito, aggiungendo che potrebbesi dichiarare continua una funzione ogni qualvolta $\lim \frac{\phi(x+k) - \phi(x)}{f(k)}$ fosse finito e dove $f(k)$ è una certa funzione che s’annulla con k . Però resterebbe ancora da decidersi qual funzione dovrebbe prendersi per $f(k)$.”

La questione del rigore, molto sentita nelle dimostrazioni, rimanda in realtà alla **definizione rigorosa** dei concetti con cui si opera, principalmente proprio quello di funzione. L’esigenza che emerge dai dialoghi di Kronecker è quella di liberare l’analisi dal costante riferimento alla geometria; in particolare il concetto di funzione $f(x)$ da quello intuitivo di curva piana, che risulta inessenziale quando si pensi a una funzione definita puramente come modo di associare valori della variabile y a valori della variabile x .

Gli argomenti trattati nei discorsi berlinesi di Casorati diventarono di pubblico dominio nel mondo matematico qualche anno più tardi, con le pubblicazioni dei lavori di Weierstrass, Heine, Dedekind e Cantor.

Il concetto di Funzione dal 1850 ai giorni nostri

Il XIX secolo fu il periodo in cui vennero stabilite correlazioni fra le diverse branche della matematica: *“l’aritmetizzazione della matematica”*, espressione coniata da Klein nel 1895, era un aspetto di questa tendenza generale. La tendenza principale che caratterizza questo periodo fu centrata principalmente sul tentativo di chiarire il termine essenziale dell’analisi, che naturalmente è quello di *“funzione”*.

I matematici del 1700 avevano nel complesso creduto che una funzione dovesse avere ovunque la stessa espressione analitica. Durante l’ultima parte del secolo, soprattutto come conseguenza della controversia sul problema delle corde vibranti, Eulero e Lagrange accettarono funzioni che posseggono espressioni diverse in domini distinti servendosi del termine *“continua”* dove valeva la stessa espressione, e *“discontinua”* nei punti in cui l’espressione cambiava forma. Pur essendo costretti a rivedere il loro concetto di funzione, Eulero, D’Alembert e Lagrange non arrivano a una definizione ampiamente accettata, né risolsero il problema di determinare le funzioni che possono essere rappresentate mediante serie trigonometriche. La definizione che caratterizza gli studi di questo secolo è attribuita ad **Eulero** e risale al 1748:

«Una funzione di una quantità variabile è un’ espressione analitica composta, in qualsivoglia maniera, di questa stessa quantità e di numeri, o di quantità costanti.

Così ogni espressione analitica che oltre alla variabile z conterrà delle quantità costanti, è una funzione di z .

Una funzione di variabile è dunque anche una quantità variabile.»

Nel XIX secolo l’opera di Fourier ampliò ancora il problema di che cosa sia una funzione. Da un lato, egli insisteva sul fatto che le funzioni non devono essere necessariamente rappresentate da espressioni analitiche, dall’altro lato, invece, egli appoggiava l’opinione secondo cui una funzione deve poter essere rappresentabile mediante un’espressione analitica, anche se questa espressione era una serie di Fourier. In ogni caso le funzioni non erano soltanto algebriche o, al più, loro estensioni. Questa idea è ben espressa dalla definizione di **Fourier** del 1821:

«In generale, la funzione $f(x)$ rappresenta una successione di valori o di ordinate, di cui ciascuna è arbitraria.

Noi non supponiamo che queste ordinate siano soggette a una legge comune; esse si succedono l'un l'altra in maniera qualsiasi...»

Solo con **Dirichlet** (1805-1859) assistiamo alla netta separazione tra concetto di funzione e rappresentazione analitica, in soldoni:

« y è una funzione di una variabile x , definita nell'intervallo $a < x < b$, se per ogni valore della variabile x in questo intervallo le corrisponde un valore definito della variabile y .

Inoltre è irrilevante il modo in cui tale relazione viene stabilita.»

Fino alla metà del secolo, il concetto di funzione era completamente vago. Alcuni la definivano nel senso di Eulero, altri richiedevano che y variasse con x secondo una qualche legge, ma non spiegavano quale legge avessero in mente, alcuni usavano la definizione di Dirichlet, e altri ancora non davano nessuna definizione.

L'anno decisivo per l'analisi fu il 1872 .

In quell'anno, infatti, furono dati decisivi contributi all'*aritmetizzazione dell'analisi* da parte di ben quattro matematici, uno francese e gli altri tedeschi:

- ✓ **H.C.R Meray** (1835-1911), originario della Borgogna;
- ✓ **Karl Weierstrass** (1815 - 1897), docente dell'università di Berlino;
- ✓ **Georg Cantor** (1845-1918), anch'egli di Halle;
- ✓ **J.W.R. Dedekind** (1831-1916) di Braunschweig.

Costoro in un certo senso rappresentavano il culmine di mezzo secolo di ricerche sulla *natura della funzione e del numero*, cominciate nel 1822 con la teoria del calore di Fourier e con un tentativo, effettuato nello stesso anno da Martin Ohm (1792-1872), di ridurre tutta l'analisi all'aritmetica.

In questo intervallo di cinquanta anni si erano manifestate due principali cause di insoddisfazione. Una era data dalla *manca di fiducia nelle operazioni effettuate su serie*

infinite: non era neppure chiaro se una serie infinita di funzioni – di potenze, di seni o coseni, per esempio- convergesse sempre verso la funzione dalla quale era derivata.

Una seconda causa di turbamento era motivata dalla *mancaanza di una definizione precisa dell'espressione "numero reale"* che è al centro del programma di aritmetizzazione.

Bolzano, sin dal 1817, aveva preso coscienza dell'esigenza di rigore nel campo dell'analisi ma esso ebbe influenza minore di quella di Cauchy, le cui ricerche analitiche erano ancora sovraccariche di intuizione geometrica. Persino il concetto di funzione continua non differenziabile, elaborato da Bolzano verso il 1830, era stato trascurato dai matematici venuti dopo di lui. L'esempio di una funzione di questo tipo, fornito da Weierstrass nel corso delle sue lezioni universitarie del 1861, e pubblicate poi in una memoria presentata all'accademia di Berlino nel 1872, fu generalmente accolto come il primo del genere.

Nel frattempo Riemann aveva dato un esempio di una funzione $f(x)$ discontinua in un numero infinito di punti di un intervallo, della quale, tuttavia, esiste l'integrale che definisce la funzione continua $F(x)$ che negli infiniti punti in questione non possiede derivata. La funzione di Riemann è in un certo senso meno patologica di quelle di Bolzano e di Weierstrass; nondimeno essa metteva in evidenza l'esigenza che il concetto di integrale ricevesse una definizione più accurata di quella datagli da Cauchy, il quale, guidato in gran parte dalla sua sensibilità geometrica lo aveva identificato con l'area sottesa a una curva.

Un matematico di grande intuizione di questo secolo fu **Hermann Hankel** (1839-1873), allievo di Riemann e docente di matematica a Lipsia.

Egli nel 1867 pubblica il libro *"Teorie dei sistemi di numeri complessi"*, ove sostiene che:



"La condizione per costruire un aritmetica universale è una matematica puramente concettuale, sganciata da ogni intuizione".

Come prevedeva Hankel, la completa aritmetizzazione dell'analisi diventò possibile solo quando i matematici si resero conto che i numeri reali andavano concepiti come "strutture concettuali" invece che come grandezze intuitive ereditate dalla geometria euclidea. La concezione di Hankel non era del tutto nuova. Già da una generazione, gli

algebristi, specialmente in Inghilterra avevano sviluppato un'aritmetica universale e molteplici algebre, ma non se ne erano riconosciute su larga scala le implicazioni per quanto riguardava l'analisi. All'inizio del 1830 Bolzano aveva fatto un tentativo per sviluppare una teoria dei numeri reali come limiti di successioni di numeri razionali, ma questo tentativo passò inosservato e fu pubblicato solo nel 1862. Sir William Hamilton (1805- 1865) aveva, forse, avvertito un'esigenza analoga, ma il suo ricorso al concetto di tempo anziché di spazio era un semplice cambiamento di linguaggio, ma non la struttura logica, rispetto al consueto riferimento geometrico. Il vero punto cruciale della questione fu affrontato per la prima volta efficacemente dai matematici all'inizio citati, i quali pubblicarono i loro risultati proprio nel 1872.

H.C.R. MERÉY fu tempestivo nel pubblicare le proprie idee. Infatti, fin dal 1869 aveva pubblicato un articolo in cui richiamava l'attenzione su un serio vizio di ragionamento logico, di cui si erano resi colpevoli i matematici da Cauchy in poi. Si trattava essenzialmente di una "*petitio principii*", consistente nel definire il limite di una successione come un numero reale e, poi, nel definire, a sua volta, un numero reale come il limite di una successione di numeri razionali. Si ricorderà che Bolzano e Cauchy avevano tentato di dimostrare che una successione che converge all'interno di se stessa, ossia una successione in cui la differenza tra S_{n+p} e S_n (per un numero intero p dato e per un numero n sufficientemente grande) è minore di qualsiasi grandezza assegnata ε , converge anche rispetto ai rapporti esterni con un numero reale S , limite della successione.

Mérey, nel suo "*Nuovo sommario di analisi infinitesimale*", del 1872, tagliò il nodo gordiano della questione eliminando il riferimento alla condizione esterna di convergenza, ossia al numero reale S . Usando soltanto il criterio di Bolzano-Cauchy, dove n , p , ε sono numeri razionali, è possibile definire la convergenza senza far riferimento ai numeri irrazionali. In senso lato, egli considerava come convergente una successione che determinasse o un numero razionale come limite, oppure un numero fittizio come limite fittizio. Questi numeri fittizi, come egli dimostrò, potevano venire ordinati, ed essi erano sostanzialmente quelli che oggi sono noti come numeri irrazionali. Mérey lasciò abbastanza nel vago la questione se la sua sequenza convergente fosse o no il numero. Se lo era, come sembrava implicito, allora la sua teoria è equivalente a quella sviluppata da Weierstrass in quel periodo.



Karl Weierstrass (1815-1897) crebbe in una famiglia di religione cattolica, devota ma di spirito liberale, dovuto forse al fatto che il padre si era convertito al cattolicesimo dal protestantesimo. Karl era il maggiore di quattro figli, di cui nessuno si sposò, forse a causa dell'atteggiamento autoritario del padre. Karl possedeva poi almeno un altro lato eccentrico nel carattere: odiava la musica. A scuola si dimostrò così brillante che il padre insistette perché si preparasse a una carriera di funzionario statale studiando diritto all'Università di Bonn: qui, egli divenne esperto più nel bere e nel tirare di scherma che non nel diritto e nella matematica, e abbandonò gli studi senza conseguire alcun titolo. In seguito a Munster si preparò per insegnare nelle scuole secondarie, e fu preso sotto la protezione del suo insegnante **Cristoph Gudermann** (1798-1851). Quest'ultimo era particolarmente interessato alle funzioni ellittiche e iperboliche, campo nel quale il suo nome viene ancor oggi ricordato in connessione con la funzione gudermanniana. Per l'ulteriore sviluppo della matematica, furono certamente più importanti di questo piccolo contributo il tempo e l'ispirazione che l'insegnante diede al proprio allievo, destinato a diventare il più grande insegnante di matematica della metà del XIX secolo. Gudermann aveva instillato nel giovane Weierstrass la consapevolezza di quale utile strumento di indagine fosse la rappresentazione di una funzione mediante serie di potenze. Fu in relazione a questo concetto che Weierstrass produsse la sua opera maggiore, procedendo sulla via aperta da Abel.

Weierstrass conseguì l'abilitazione all'insegnamento nelle scuole molto tardi, e per circa 12 anni insegnò nella scuola secondaria. Nel 1854, scrisse un articolo sulle funzioni abeliane, pubblicato sul *Journal* di Crelle, che gli procurò una tale fama che più tardi gli fu offerta la cattedra di matematica all'Università di Berlino. L'opera di Weierstrass nella rigorizzazione dell'analisi migliorò quelle precedenti di Bolzano, Abel, Cauchy. Anche lui cercò di evitare l'intuizione e di basarsi su concetti puramente aritmetici. L'opera di Weierstrass divenne nota nel 1859, quando inizia a tenere le lezioni all'università di Berlino.

Innanzitutto, Weierstrass trovò nelle le opere di Cauchy e Bolzano, alcune espressioni che non gli andavano piuttosto a genio come l'asserzione *“una variabile si avvicina a un limite”*, che, secondo lui, suggerisce infelicitemente le idee di tempo e di moto. Egli interpreta, così, una **variabile** semplicemente come una lettera **che sta per un qualsiasi insieme di valori che possono essere attribuiti**, cosicché il moto viene eliminato. Inoltre, definisce una *variabile continua come una variabile tale che, se x_0 è uno qualsiasi dei valori che le possono essere attribuiti e δ è un qualsiasi numero positivo, esistono altri valori della variabile compresi nell'intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$* . Per eliminare la vaghezza della frase *“diventa e rimane minore*

di qualunque quantità data”, Weierstrass diede la definizione di funzione continua secondo cui:

“Una funzione $f(x)$ è continua per $x=x_0$ se, dato un qualunque numero positivo ε , esiste un δ tale che, per tutti gli x tali che $|x-x_0| < \delta$ si ha $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$.”

Uno dei più importanti contributi di Weierstrass nel campo dell’analisi è noto col nome di *prolungamento analitico*. Weierstrass aveva mostrato che la rappresentazione, mediante una serie infinita di potenze di una funzione $f(x)$ nelle vicinanze di un punto P_1 del piano complesso, converge in tutti i punti che si trovano all’interno di un cerchio C_1 il cui centro è P_1 e che passa per il punto di singolarità più vicino. Se ora si stende la medesima funzione ad un secondo punto P_2 , diverso da P_1 , ma che si trova sempre all’interno del cerchio C_1 , la serie che la rappresenta sarà convergente all’interno di un cerchio C_2 che ha P_2 come centro e che passa per il punto singolare più vicino a P_2 . Questo ultimo cerchio può comprendere punti che si trovano al di fuori di C_1 . Si ottiene così un’estensione dell’area del piano entro la quale la funzione $f(x)$ risulta definita analiticamente da una serie di potenze.

Tale procedimento può venire continuato determinando altri cerchi. Weierstrass definì, pertanto, una *funzione analitica* come *una serie di potenze accompagnata da tutte quelle che sono ottenibili da essa mediante prolungamento analitico*.

Per quel che concerne l’aritmetizzazione dell’analisi, Weierstrass si sforzò di separare il calcolo dalla geometria, e di basarlo solo sul concetto di numero. Come Mèrey, anch’egli si rese conto che per fare ciò era necessario dare una definizione di numero irrazionale che fosse indipendente dal concetto di limite, dal momento che quest’ultimo sino ad allora aveva presupposto il primo. Per correggere l’errore logico di Cauchy, Weierstrass risolse la questione dell’esistenza del limite di una successione convergente facendo della successione stessa il numero o il limite.

In maniera esemplificativa, Weierstrass capì che il numero $\frac{1}{3}$ non è il limite della serie

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots + \frac{3}{10^n} + \dots$$

ma, è la successione associata a questa serie. In realtà nella teoria di Weierstrass, i numeri irrazionali vengono più generalmente definiti come *aggregati* di numeri razionali, anche più limitatamente come *successioni ordinate* di numeri razionali.

Weierstrass non pubblicò le proprie idee circa l'aritmetizzazione dell'analisi, ma esse furono pubblicate dai suoi allievi come Heine e Lindemann.

Nel 1871 *George Cantor* aveva iniziato un terzo programma di aritmetizzazione, simile a quello di Mèrey e Weierstrass. Heine suggerì alcune semplificazioni che portò al noto sviluppo di Heine - Cantor, pubblicato sul Journal di Crelle nel 1872. Quest'ultimo era analogo a quello di Mèrey nel senso che le successioni convergenti che non convergevano verso nessun numero razionale venivano considerate come definienti numeri irrazionali.

Un metodo totalmente diverso di affrontare lo stesso problema fu presentato nello stesso anno da *Dedekind* nel libro '*La continuità e i numeri irrazionali*'. Dedekind aveva rivolto la sua attenzione al problema dei numeri irrazionali sin dal 1858, in un corso universitario sul calcolo infinitesimale. Egli si chiese in che cosa una grandezza geometrica continua si distinguesse dai numeri razionali.

Galileo e Leibniz avevano ritenuto che la "continuità" dei punti di una linea fosse dovuta alla loro densità, ossia al fatto che tra due punti qualsiasi esiste sempre un terzo punto.



Tuttavia, anche i numeri razionali hanno questa proprietà ma non formano un continuo. Riflettendo sul problema, Dedekind giunse alla conclusione che l'essenza della continuità di un segmento non è dovuta ad una vaga compattezza dei suoi punti, ma a una proprietà esattamente contraria, ossia alla peculiare natura della divisione di un segmento in due parti mediante un punto giacente sul segmento stesso. In qualsiasi divisione dei punti del segmento in due classi, tale che ciascun punto appartenga ad una e ad una sola classe, v'è uno ed un solo punto che determina la divisione. Come scrisse lo stesso Dedekind, "*con questa osservazione banale si è svelato il segreto della continuità*". L'osservazione può essere stata banale ma il suo autore sembra avesse qualche scrupolo a proposito di essa, giacché esitò alcuni anni prima di pubblicarla.

Dedekind si rese conto che il campo dei numeri razionali può essere esteso sino a formare un continuo di numeri reali, se si ammette quello che oggi è noto come l'assioma di Cantor -Dedekind, secondo il quale i punti di una retta possono essere messi in

corrispondenza biunivoca coi numeri reali. Espresso in termini aritmetici, ciò equivale a dire che, per ogni divisione dei numeri razionali in due classi A e B tale che ogni numero della prima classe A sia minore di ogni numero della seconda classe B , v'è un numero reale e soltanto uno, che produce questa 'Schitt' o *sezione di Dedekind*.

Se A ha un numero massimo o se B contiene un numero minimo tale sezione definisce un numero razionale; ma se A non ha nessun numero massimo e B nessun numero minimo, allora la 'sezione' definisce un numero irrazionale. Dedekind sottolineava il fatto che, in tal modo, era possibile dimostrare rigorosamente i teoremi fondamentali concernenti i limiti senza fare ricorso alla geometria. Era stata la geometria a indicare la strada per giungere ad una adeguata definizione del concetto di continuità, ma alla fine essa veniva esclusa dalla definizione aritmetica di tale concetto. La sezione di Dedekind nel sistema dei numeri razionali, oppure una costruzione equivalente del concetto di numero reale, aveva così sostituito la grandezza geometrica come spina dorsale dell'analisi. Le definizioni di numero reale sono costruzioni concettuali basate su numeri razionali, anziché qualcosa imposto alla matematica dall'esterno. Tra queste definizioni quella di Dedekind fu una delle più famose.

Il XIX secolo sposta, dunque, l'attenzione sul concetto di numero, in quanto l'analisi sfruttava numeri reali, ossia irrazionali. Nel tentativo di fornire una definizione di numero reale si arriva alla scoperta dei numeri trascendenti e alla distinzione tra numero algebrico e numero trascendente.



Nello studio dei numeri reali una figura di particolare rilievo è costituita da *Cantor*.

Egli diede un grosso contributo per quel che riguarda la definizione di numero reale ma di gran lunga più importanti e originali furono i suoi risultati intorno al termine "*infinito*". Di infinito se ne era parlato già nell'antica Grecia, ma solo raramente (Galileo e Bolzano) si era parlato degli infiniti elementi di un insieme (numeri naturali, punti di un segmento). Cantor riconobbe la proprietà degli insiemi infiniti, ossia di essere simili a una loro parte, ma si rese anche conto che non tutti gli insiemi infiniti erano simili. Partendo da ciò Cantor arriva a formulare la *Teoria degli Insiemi* come disciplina matematica a se stante, una branca che verso la metà del ventesimo secolo doveva avere profondi effetti sull'insegnamento della matematica.

Lo sviluppo della teoria degli insiemi sposta l'attenzione dal concetto di funzione visto dal punto di vista operativo - algoritmico agli aspetti più affini alla nozione insiemistica,

portando Dedekind, nel 1888, a formulare una definizione di funzione completamente svincolata dal concetto di numero:

“ Per una rappresentazione φ di un sistema S si intende una legge la quale faccia corrispondere ad ogni elemento s di S un oggetto determinato ”

Il XIX secolo , più di qualsiasi altro periodo merita di essere chiamato età dell'oro della matematica. Questo fu anche, a eccezione dell'antica Grecia, il periodo più rivoluzionario della storia della matematica.

Nel 1829 fu scoperto un nuovo mondo nel campo della geometria dal matematico russo Lobacevskij, nel 1874 il campo dell'analisi rimane sorpreso e sconvolto di fronte alla matematica dell'infinito introdotta da Cantor, un tedesco nato in Russia. La Francia non è più il centro indiscusso della matematica anche se fu spettatrice di una carriera meteora come quella di Galois. La matematica assume un carattere del tutto internazionale. In Inghilterra si assiste a uno sviluppo dell'algebra sorprendente e, grazie a Boole, ripongono le basi della logica formale e di un nuovo tipo di algebra, l'algebra booleana, ossia l'algebra degli insiemi o algebra della logica. Si assiste anche allo sviluppo di alcuni concetti strutturali tra cui la nozione di gruppo, di anello e di ideale.

La matematica è stata spesso paragonata a un albero, poiché cresce e si sviluppa al di sopra del terreno attraverso una struttura sempre più diffusa e ramificata, mentre al tempo stesso affonda le sue radici sempre più profondamente e ampiamente in cerca di un solido fondamento. Questa duplice crescita fu particolarmente caratteristica dello sviluppo dell'analisi nel XIX secolo: infatti la rapida estensione della teoria delle funzioni fu accompagnata dalla rigorosa aritmetizzazione di questa branca della matematica nel periodo da Bolzano a Weierstrass. Nel campo dell'algebra il XIX secolo è da ricordare per i più nuovi sviluppi che per l'attenzione rivolta al problema dei fondamenti: gli sforzi di Peacock per fornire una solida base all'algebra appaiono esigui se confrontati con il rigore introdotto dall'analisi da Bolzano. Durante gli ultimi anni del secolo, però, furono fatti parecchi sforzi per fornire all'algebra radici più solide.

Il sistema dei numeri complessi viene definito in termini di numeri reali, i quali vengono concepiti come classi di numeri razionali, che a loro volta vengono rappresentati come coppie ordinate di numeri interi. Ma che cosa sono in definitiva i numeri interi? Non contento di lasciare in uno stato vago i concetti fondamentali dell'aritmetica, e di conseguenza dell'algebra, il logico tedesco **F.L.G. Frege**(1848-1925) pervenne alla sua

famosa *definizione di numero cardinale*. I concetti su cui era basata la sua definizione deriva della teoria degli insiemi di Boole e di Cantor.

L'Italia aveva partecipato meno attivamente della Francia, della Germania e dell'Inghilterra allo sviluppo dell'algebra astratta ma negli ultimi anni del XIX secolo vi furono alcuni matematici italiani che si interessarono alla logica matematica.

Il più noto era **Giuseppe Peano** (Cuneo, 1858 - Torino, 1932), il cui nome è ancor oggi ricordato in relazione ai cosiddetti assiomi di Peano, dai quali dipendono molte costruzioni rigorose dell'algebra e dell'analisi. Vale la pena ricordare un contributo di Peano che rappresentò una delle scoperte più inquietanti del tempo.



All'inizio del secolo i matematici avevano riconosciuto l'esistenza di curve e di funzioni di tipo diverso da quello che fino ad allora era stato l'unico ammesso.

Nel 1890 Peano mostrò fino a che punto la matematica potesse sfidare il senso comune, costruendo le curve parametriche $x = f(t)$, $y = g(t)$, dove f e g sono funzioni reali continue nell'intervallo $0 \leq t \leq 1$, i cui punti riempiono completamente il quadrato unitario $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

La curva di Peano ha scosso il mondo matematico tanto che Hilbert definì le curve costruite in modo analogo "**Curve Mostruose**". Lo sconcerto è comprensibile, perché curve come quella di Peano mappano, in modo ricorsivo, con uniforme continuità segmenti in aree del piano.

Il procedimento ricorsivo è definito partendo da un elemento di base come quello definito in figura 1

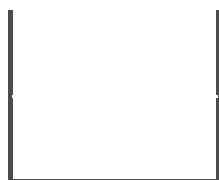


Figura 1- Elemento Base

Nel passo successivo, la figura viene costruita replicando per quattro volte l'elemento base riducendone le dimensioni a un quarto delle originali, mantenendo inalterato l'orientamento delle due copie inferiori e ruotando di 90° gradi a sinistra e a destra le due

copie superiori. Inoltre, effettuano le connessioni come da figura 2 (le connessioni sono evidenziate in nero)

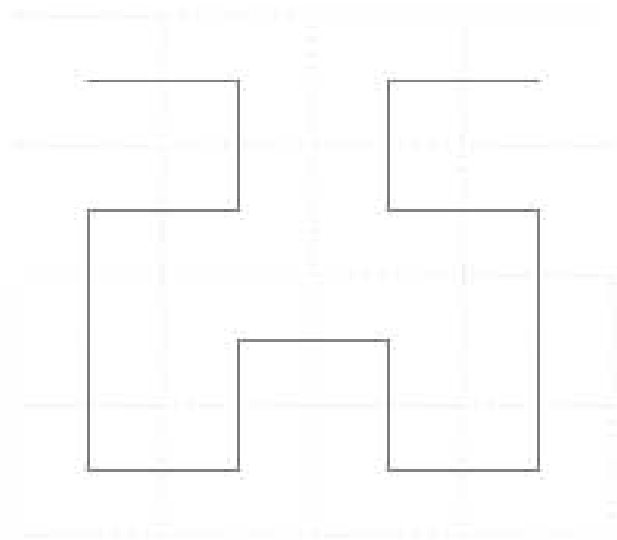


Figura 2 - Seconda Iterazione

(Il lato del quadrato ha dimensione costante pari ad **1**, le figure hanno dimensioni crescenti solo per chiarezza).

La figura 3 illustra il terzo passo dell'iterazione, che consiste nel replicare quattro volte la figura del passo precedente, ridotta di un fattore 4, applicando le operazioni di rotazione e di connessione definite.

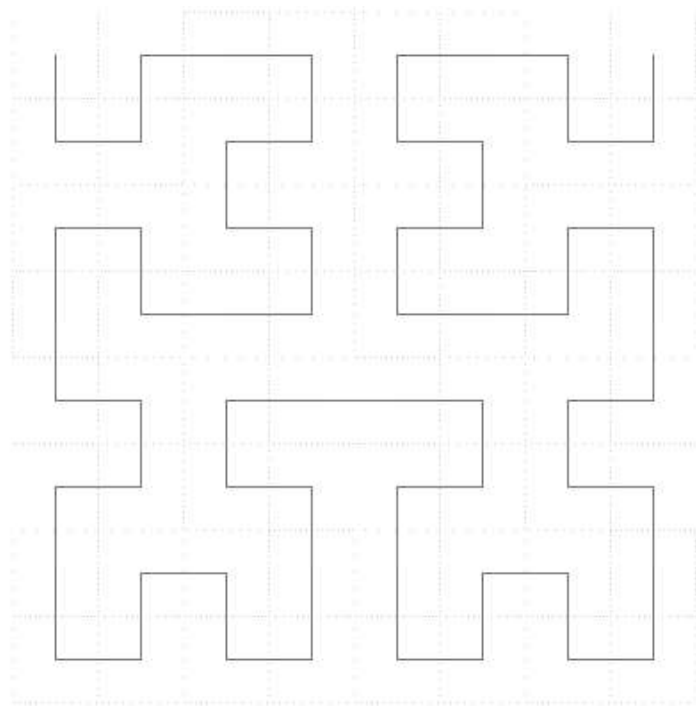


Figura 3 - Terza Iterazione

Iterando all'infinito, si ottiene una "curva limite" che copre interamente l'area a disposizione. Si osservi che ogni iterazione suddivide il quadrato originario in quadrati di dimensioni più piccole, contenenti repliche in scala della curva del passo base. Questa proprietà è tipica delle curve "frattali", di cui possiamo trovare ottimi esempi in natura (i profili delle coste, la struttura dei fiocchi di neve, la geometria del fogliame ...). Definiamo ora formalmente il processo di costruzione per induzione strutturale della curva di Peano. Mostriamo come la curva di Peano è ottenibile come limite di una successione di funzioni convergente.

La curva di Peano è definita ricorsivamente mediante trasformazioni successive di una curva f_1 definita sul segmento $[0,1]$ con valori nel quadrato unitario $Q_0 = [0,1] \times [0,1]$:

$$f_1(t) : [0,1] \rightarrow [0,1] \times [0,1]$$

che descrive, ad esempio, una curva come quella di figura 1.

Supponiamo ora di dividere il quadrato unitario in quattro quadrati di lato $\frac{1}{4}$ Q_{00} , Q_{01} , Q_{10} , Q_{11} , come da figura 4:

Q_{10}	Q_{11}
Q_{00}	Q_{01}

Figura 4 - Suddivisioni del quadrato unitario al secondo passo

Si costruisce la curva f_2 del passo successivo modificando la curva iniziale in modo che mappi $[0, \frac{1}{4}]$ in Q_{00} , $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ in Q_{01} , $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ in Q_{10} e in $[\frac{3}{4}, 1]$ in Q_{11} . Inoltre, occorre modificare la curva tenendo conto delle rotazioni e dei segmenti aggiuntivi di connessione.

In ogni caso, la funzione f_2 sarà definita in modo tale che

$$f_2(t) \in \begin{cases} Q_{00} & t \in [0, \frac{1}{4}] \\ Q_{01} & t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ Q_{10} & t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ Q_{11} & t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

La larghezza degli intervalli quadrati in questo passo ($n=2$) è pari a $\frac{1}{4}$; per induzione strutturale la larghezza degli intervalli quadrati (o "sottoquadrati") al passo successivo ($n=3$) sarà $\frac{1}{8}$ ed al passo n sarà $\frac{1}{2^n}$. In ogni passo si ripete la divisione in quattro intervalli più

piccoli e si applicano le trasformazioni descritte al paragrafo precedente. Al passo n , quindi, si ottiene una funzione che mappa il segmento unitario al quadrato unitario

$$f_n(t) : [0,1] \rightarrow [0,1] \times [0,1]$$

la curva di Peano si ottiene per induzione iterando all'infinito il procedimento esposto.

Peano nel 1903 abbandonò questi studi e pose la sua attenzione all'invenzione di una lingua internazionale da lui chiamata '*lingua internazionale*', il cui vocabolario era ricavato dal latino, dal francese, dall'inglese e dal tedesco. Tale invenzione si rivelò tuttavia molto effimera.

La scoperta che le funzioni continue non posseggono necessariamente derivata, che le funzioni discontinue possono essere integrate, la nuova luce gettata sulle funzioni discontinue dalle ricerche di Dirichlet e di Riemann sulle serie di Fourier e lo studio della varietà e dell'estensione delle discontinuità delle funzioni fecero sì che i matematici si rendessero conto che lo studio rigoroso si estende al di là di quelle usate nel calcolo infinitesimale e nelle branche usuali dell'analisi in cui la condizione richiesta della derivabilità restringe solitamente la classe delle funzioni. Il loro studio fu continuato nel XX secolo e diede origine a una nuova disciplina matematica nota come **Teoria delle funzioni a variabile reale**. Considerando retrospettivamente il XIX secolo, possiamo ammirarlo come un periodo in cui vennero raggiunti risultati senza pari sia nel campo della geometria, sia in quello dell'analisi, sia in quello dell'algebra. Nessun secolo precedente può essere paragonato ad esso dal punto di vista della portata e generalità dei risultati raggiunti, del grado di rigore e di astrazione dei metodi impiegati, e dell'immaginazione nella creazione di nuove teorie matematiche. Nonostante la rapidità dei progressi realizzati e il carattere definitivo delle formulazioni presentate, non si aveva la benché minima sensazione che lo sviluppo della matematica fosse destinato a rallentare. L'età vittoriana trasudava ottimismo, almeno per quanto riguarda la matematica.

Tuttavia, all'inizio del XX secolo, il concetto di funzione non era stato ancor definito rigorosamente e procurava grosse difficoltà ai matematici. A riprova della difficoltà del concetto di funzione vale la pena di ricordare quanto affermato da **H. Lebesgue**, nel 1902:

«Anche se dopo Dirichlet e Riemann, ci si accorda generalmente nel dire che c'è una funzione quando c'è una corrispondenza tra un numero y e dei numeri x_1, x_2, \dots , senza preoccuparsi del procedimento che serve a stabilire tale corrispondenza, molti dei matematici sembrano non considerare vere funzioni che quelle che sono introdotte da corrispondenze analitiche. Si può pensare che forse in tal modo si introduca una restrizione abbastanza arbitraria; tuttavia è certo

che ciò praticamente non restringa il campo delle applicazioni, dato che fino ad oggi sono state effettivamente utilizzate solo le funzioni rappresentabili analiticamente.»

e nel 1927 da **Weyl**:

«Nessuno ha mai saputo spiegare cosa sia una funzione. Ma una funzione f è definita se mediante un mezzo qualsiasi si può associare a un numero a , un numero b ... Si dirà allora che b è il valore della funzione f per il valore a dell'argomento.»

Una delle acquisizioni definitive del XX secolo fu il riconoscimento che la matematica non è una scienza naturale, ma una creazione dell'intelletto umano.

Bertrand Russell scriveva sull' *International Mounthy* del 1901:

“Il XIX secolo, che si vanta di aver inventato la macchina a vapore e la teoria dell'evoluzione, potrebbe a maggior ragione andar fiero della scoperta della matematica pura.”

Tra la fine del XIX e l'inizio del XX secolo si riconosce generalmente, anche da parte dei non matematici, che la matematica è una forma di pensiero assiomatico, in cui a partire da premesse arbitrarie si traggono conclusioni valide. Ciò portò Russell nel 1901 a definire scherzosamente la matematica come la disciplina in cui nessuno sa di cosa si parli né se ciò che dice sia vero. Più tardi egli mise in evidenza la caratteristica essenziale della matematica, ossia la sua struttura logica. A proposito di questo nuovo punto di vista espresse il suo parere diffidente **Henry Poincaré** (1854-1912):

“La logica talvolta genera mostri. Per mezzo secolo abbiamo visto una massa di funzioni bizzarre che appaiono essere forzate a rassomigliare il meno possibile alle oneste funzioni che servono a qualche scopo. Un po' più di continuità, un po' meno di continuità, un po' più di derivate e così via. In effetti dal punto di vista della logica queste strane funzioni sono le più generali; dall'altro lato, quelle che si incontrano senza andarle a cercare e che seguono leggi semplici appaiono come caso particolare che non costituisce più che un angolino. Nei tempi andati, quando si inventava una funzione era per un proposito pratico; oggi le si inventa apposta per rilevare i difetti nei ragionamenti dei nostri padri e non si dedurrà da esse nessun altro risultato oltre a questo.”

Poincaré nacque a Nancy, una città che diede i natali a un numero abbastanza cospicuo di matematici di rilievo del XX secolo. Henry era ambidestro e fisicamente impacciato, al punto che la sua scarsa destrezza fisica diventò leggendaria. Era molto debole di vista, ma, come Eulero e Gauss, possedeva una notevole capacità di esercizi mentali in tutti gli aspetti del pensiero matematico. Uscito dall'École Polytechnique nel 1875, prese una laurea in ingegneria nel 1879 e continuò a svolgere attività presso il Dipartimento delle Miniere per tutto il resto della sua vita. Nel 1879 conseguì anche un dottorato in scienze all'Università di Parigi, dove occupò successivamente diverse cattedre di matematica e di scienze fino alla sua morte, avvenuta nel 1912. La tesi di dottorato di Poincaré verteva sulle equazioni differenziali e trattava non di metodi di risoluzione ma di teoremi di esistenza: questa ricerca lo portò a dare uno di più famosi contributi alla matematica, ossia a definire le proprietà delle funzioni automorfe. Di fatto, egli fu il fondatore della teoria di queste funzioni. Una **funzione automorfa** $f(z)$ della variabile complessa z è una funzione che è analitica, fatta eccezione per i poli, in un dominio D ed è invariante rispetto a un gruppo numerabile infinito di trasformazioni lineari frazionarie

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}$$

Tali funzioni sono generalizzazioni di funzioni trigonometriche ($a=1=d$, $c=0$, $b=2k\pi$) e di funzioni ellittiche. La generalizzazione di Poincaré rivela l'esistenza di una categoria più ampia di funzioni, note come **funzioni Fuchiane zeta**, le quali potevano essere usate per risolvere l'equazione differenziale lineare di secondo ordine con coefficienti algebrici.

Se il XIX secolo propone alcuni casi patologici di funzione, nel XX secolo si accumulano con ritmo sempre crescente paradossi e anomalie. Fra i vari strani casi va ricordata la curva chiusa continua proposta nel 1904 dal matematico svedese **Helge VON KOCH** (1870-1924), che si può definire nel modo seguente.

Partendo da un triangolo equilatero con lati unitari, sezioniamo ciascuno di questi tre segmenti unitari in tre parti, costruiamo un triangolo equilatero sulla parte mediana presa come base e poi cancelliamo la base di ciascuno di questi tre nuovi triangoli equilateri. Ne risulta una figura chiusa delimitata da una linea spezzata che ha una lunghezza totale di quattro unità. Dividendo in tre parti ciascuno dei dodici lati, costruendo dodici triangoli equilateri sulle parti mediane e cancellando le basi, otteniamo una figura chiusa con 48 lati e delimitata da una linea spezzata di lunghezza $16/3$. Continuando questo processo indefinitamente, viene determinata una curva limite arricciata, detta **fiocco di neve**. Essa

non possiede alcuna tangente in alcun punto, ma ha la straordinaria proprietà per cui, dati due punti della curva, la lunghezza dell'arco compreso tra i due punti è infinita.

Nel primo ventennio del XX secolo, gli analisti non sono ancora in grado di produrre una teoria dell'analisi del tutto rigorosa. Nel 1918 Weyl afferma:

“Nel basare l'analisi sul continuo aritmetico i formalisti avevano edificato una casa che in parte essenziale era costruita sulla sabbia.”

Alla fine degli anni '30 si assiste al tentativo di dare una fondazione coerente all'intero edificio della matematica dal suo interno. Ciò costituì l'elemento di rottura più significativo rispetto alla tradizione ottocentesca e quello che più ha contribuito a dare alla nostra scienza il volto che oggi le conosciamo. Questo esito non era di certo prevedibile quando sette giovani matematici francesi (H. Cartan, C. Chevalley, J. Dieudonné, J. Dieudonné, S. Mandelbrojt, R. Pöschel, A. Weil) decisero di celarsi sotto lo pseudonimo di Napoleone III, **Nicolas BOURBAKI**, noto per non aver mai perso una battaglia, con lo scopo più modesto di scrivere una versione aggiornata del “ Corso di Analisi” di E. Goursat, oltre che di prendersi gioco dei matematici parrucconi del tempo, facendo tenere ad un attore adeguatamente istruito conferenze del celebre N. Bourbaki, professore dell'Università de Nancago (contrazione di Nancy e Chicago, dove molti di loro avevano insegnato)! Ben presto, però, pur continuando a permanere a lungo l'aurea di mistero che ne circondava l'autore, il progetto si trasformò in quella della pubblicazione di un'opera, gli *Eléments de mathématique*, che aveva come obiettivo di ricostruire l'intero edificio della matematica a partire da pochi e semplici concetti primitivi. Basati sul metodo assiomatico e organizzati intorno alle strutture fondamentali (d'ordine, topologiche e algebriche) della nostra disciplina, i fascicoli degli Elements hanno continuato a uscire con regolarità fino a qualche anno fa e costituiscono oggi un corpus imponente che copre la totalità delle branche basilari della matematica (teoria degli insiemi, teoria delle funzioni a variabile reale, algebra, topologia generale,...). Nelle pagine dell'opera di Bourbaki, pubblicata nel 1939, si trova la definizione di funzione nota a tutti noi, ossia:

« Siano E ed F due insiemi distinti oppure no, una relazione tra una variabile x di E ed una variabile y di F è detta relazione funzionale in y o relazione funzionale di E verso F , se per ogni x appartenente a E , esiste uno ed un solo y appartenente a F che sia nella relazione considerata con x .

Si dà il nome di funzione all'operazione che associa anche ad ogni elemento x di E , l'elemento y in F che si trova nella relazione data con x ; si dice che y è il valore della funzione per l'elemento x , e che la funzione è determinata dalla relazione funzionale considerata. »

Questa definizione finalmente ha carattere prettamente statico e allontana definitivamente il concetto di funzione dalla sua primitiva dinamicità legata alla corrispondenza tra quantità variabili.

L'obiettivo di una ricostruzione completa e coerente di tutta la matematica non è però stato raggiunto, e ciò essenzialmente per due motivi: anzitutto, la mancanza di un approccio organico e convincente al problema dei fondamenti, che i bourbakisti, seguendo la tradizione francese che fa capo a Poincaré, hanno sistematicamente sottovalutato ed evitato di affrontare in tutta la sua complessità, e in secondo luogo la difficoltà crescente di ricostruire allo stesso livello di dettaglio una disciplina che continuava ad espandersi in maniera stupefacente sottraendosi così ad ogni tentativo di codificazione definitiva. Oggi la pubblicazione degli Elements è cessata, ma il gruppo, sia pure ampiamente rinnovato nei suoi componenti, grazie alla regola ferrea che ne impone l'uscita al compimento del quarantesimo anno di età, esiste sempre e continua a organizzare il Seminaire Boubaki, che dal 1948 si riunisce tre volte all'anno a Parigi e nel corso del quale vengono esposti i più importanti e recenti risultati dei vari campi della matematica.

Il processo di chiarimento del concetto di funzione non sembra però ancora terminato, perché i problemi e le intuizioni che sono implicati hanno varia natura e ricondurli ad un'unica definizione può essere arbitrario e forse scorretto. A riprova di ciò sta anche il fatto che la storia delle funzioni non termina col 1939. Si hanno interessanti ed importanti generalizzazioni in epoca successiva.

L'anno 1945 è fatidico, vengono infatti presentati:

- Le *trasformazioni naturali*, una sorta di trattazione formale del concetto di legge, [Eilenberg e Mac Lane, 1945].

Nasce da questi studi la Teoria delle Categorie, in cui il concetto di funzione (*morfismo*) diviene un *concetto primitivo*;

- I *fasci*, il passaggio dal locale al globale, attribuiti a Leray [Gray, 1979];
- Le *distribuzioni*, Schwartz, Sobolev, cf. [Schwartz, 1950].

Uno studio a parte meritano le definizioni ricorsive e la **classe delle funzioni ricorsive**, introdotta in un caso particolare in [Gödel, 1931] e successivamente ampliata [Kleene, 1936], [Markov, 1962]. Tali funzioni realizzano un'interessante dialettica tra *infinito in potenza* ed *in atto*.

Dalla breve antologia appare chiaro che le varie proposte non sono una sorta di percorso lineare di successivi "miglioramenti" e "precisazioni", ma solo la "traduzione" più o meno formale di idee che traggono origine da attività umane differenti [Mac Lane, 1986].

Tutti i matematici citati si ricollegano ad un unico modello concettuale, di cui finora non si è fornita una caratterizzazione esaustiva.

Nell'attuale prassi didattica si presenta la nozione di funzione attribuita da [Selden & Selden, 1992], a [Bourbaki, 1939], ma forse più correttamente dovuta a [Peano, 1911], o a [Whitehead & Russell, 1910]. Bourbaki più accuratamente definisce il concetto di *applicazione*, distinguendolo da quelli di *funzione*, *corrispondenza*, *grafico*, *relazione*. A tale tipo di definizione ci si riferisce parlando di *definizione insiemistica* o *strutturale* di funzione. Essa rappresenta attualmente un buon compromesso tra le esigenze concettuali di cui si diceva prima e la semplicità di presentazione.

Bibliografia

- [1] C. B. Boyer (1990) *Storia della matematica*, Mondadori, Milano;
- [2] F. Enriquez (1982) *Le matematiche nella storia e nelle culture*, Zanichelli, Bologna;
- [3] M. Kline (1991) *Storia del pensiero matematico II. Dal settecento a oggi*, Einaudi, Torino;
- [4] E.T. Bell (1966) *I grandi matematici*, Sansoni, Milano;
- [5] U. Bottazzini (1990) *Il flauto di Hilbert*, UTET, Torino;
- [6] N. Bourbaki (1963) *Elementi di Storia della Matematica*, Feltrinelli, Milano