SSIS Toscana
Indirizzo F.I.M.

Lo sviluppo del calcolo integrale: dal Teorema dell'inversione alla definizione di integrale

Valentina Arru
Sabrina Biagi
Riccardo Cesari
Annalisa Granata
Barbara Santini

INDICE

Introduzione

Il calcolo integrale ci consente di ottenere la lunghezza di una curva, il volume di un solido, l'area di una superficie. Il calcolo differenziale risolve questioni quali la tangente ad una curva, gli estremi di una funzione, la velocità istantanea di un punto materiale. Non è possibile fissare con precisione le origini del calcolo differenziale; tuttavia può affermarsi con sicurezza che il suo sorgere fu preparato dagli studi che si svilupparono nel secolo XVII intorno ai problemi della tangente ad una curva (Fermat, Cartesio, Torricelli, Roberval, Barrow), della velocità istantanea di un punto materiale (Torricelli, Roberval e dei massimi e minimi delle funzioni Fermat). Il merito di avere fondato il calcolo differenziale con tutta la sua generalità e di averne messa in evidenza la grande importanza, spetta ad Isacco Newton ed a Goffredo Guglielmo Leibniz. Newton elaborò il metodo delle flussioni che è una forma di calcolo differenziale. Rigettando l'idea che le grandezze geometriche siano costituite da parti infinitamente piccole, egli concepì tali grandezze come prodotte da un moto continuo, precisamente le linee come prodotte dal moto continuo di un punto, le superfici dal moto continuo di una linea, e così via . Dette fluenti le grandezze generate, chiamò flussioni le velocità con cui esse vengono formate, ed osservò che, considerando intervalli di tempo uguali, ma piccoli quanto si vuole, le flussioni diventano proporzionali agli accrescimenti corrispondenti delle fluenti. Basandosi sulla considerazione del limite del rapporto di due quantità evanescenti, insegnò a determinare le flussioni, conosciute che siano le fluenti; e questa parte del suo metodo corrisponde al nostro calcolo differenziale. Leibniz, ammesso esplicitamente il principio di continuità, procedette, non per flussioni di linee, ma per differenze di numeri, introducendo le differenze infinitesime dx e dy di due punti vicinissimi di una curva. Ciò che oggi noi chiamiamo derivata non è altro che il rapporto dy / dx di Leibniz, e corrisponde alla flussione di Newton. L'elemento fondamentale del metodo di Leibniz é l'introduzione del concetto di differenziale che è un infinitesimo. Tuttavia che cosa fosse precisamente nel pensiero di Leibniz l'infinitesimo, non è facile comprendere dalla lettura delle sue opere. Sembra che egli ammettesse l'esistenza degli infinitamente piccoli come infinitesimi attuali, ma qualche volta si ha la sensazione che egli considerasse questi infinitesimi semplicemente come quantità finite indefinitamente decrescenti. Comunque sia, l'algoritmo differenziale da lui creato trionfò completamente su quello delle flussioni di Newton; ed a tale trionfo contribuì in larga parte la felice scelta dei simboli, alla quale il Leibniz attribuì grandissima importanza. Nonostante i brillanti risultati ottenuti nell'applicazione dei procedimenti di Leibniz ai più svariati problemi della matematica, restava alla base della teoria una grande incertezza ed oscurità e le menti più acute erano assillate dal desiderio di precisare i principi fondamentali, liberandoli da ogni considerazione metafisica.

1. Evangelista Torricelli

1.1. La vita e le opere

Tra i galileiani della seconda generazione, **Evangelista Torricelli** (*Faenza 1608- Firenze 1647*) è quello che forse ebbe la maggiore notorietà nell'ambito delle diverse comunità scientifiche dell'Europa del XVII secolo. Ciò è dovuto - a differenza di ciò che si potrebbe pensare - non tanto al contributo che diede alla barometria quanto piuttosto all'interesse suscitato tra gli specialisti continentali dalla pubblicazione della sua *Opera Geometrica* (1644), l'unico testo che Torricelli ebbe la gioia di vedere stampato nel corso della sua breve vita. Ciò dipende dal fatto che in questa opera, oltre ad affrontare i temi classici della tradizione galileiana (il moto naturale, quello dei proiettili e delle acque) che lo accrediteranno quale autentico rappresentante e continuatore della scienza del moto *more galilaeano*, Torricelli tenta - facendo ricorso a degli *indivisibili curvi* - di superare alcune aporie contenute nella dottrina degli indivisibili del Cavalieri. Una soluzione che ebbe ampia risonanza europea e che attraverso vari passaggi potrebbe essere giunta fino a Newton.
Le notizie sulla sua infanzia e adolescenza sono rare ed imprecise. Si sa con certezza che nacque a Faenza il 15 ottobre del 1608. Si dispone inoltre di indicazioni sulla sua formazione scientifica grazie al contenuto di una lettera a Galileo dell'11 settembre 1632. In essa Torricelli spiega che, dopo aver studiato da solo per due anni s*otto la disciplina delli padri gesuiti*, fu a diciotto anni scolaro dell'abate Benedetto Castelli.
Nel febbraio di quello stesso anno era stato pubblicato a Firenze il *Dialogo sopra i due Massimi Sistemi del Mondo*. Castelli - che fu, com'è noto, fra i più fedeli discepoli ed amici di Galileo - scrutava con affettuosa premura le reazioni degli ambienti romani al contenuto del libro. Costretto ad assentarsi per alcuni giorni pregò Torricelli di fungergli da segretario. Il giovane *scolaro* ebbe così l'occasione di scrivere a Galileo in risposta ad una sua missiva e di informarlo dell'azione svolta dall'abate per evitare una *precipitosa resoluzione*, e cioè la condanna del libro e del suo autore.
Torricelli, come spiega in questa lettera, fu a Roma fra i primi lettori del *Dialogo*. Ne studiò il contenuto *con quel gusto [...] che abbia avuto uno che, già havendo assai bene praticata tutta la geometria [...] et che havendo studiato Tolomeo et visto quasi ogni cosa del Ticone, del Keplero e del Longomontano , finalmente adheriva, sforzato dalle molte congruenze, al Copernico, et era di professione e di setta galileista.*
E' questa la sola occasione in cui Torricelli si dichiara apertamente seguace della dottrina copernicana. Il matematico fu senza dubbio profondamente scosso dalla sorte riservata al *Dialogo* e dalla condanna di Galileo emessa nel giugno del 1633 dal tribunale del Sant'Uffizio.
Poco sappiamo dell'attività svolta dal giovane Torricelli nel corso degli anni compresi fra il 1632 ed il 1641. E' accertato che seguì Giovanni Ciampoli nelle Marche, ove l'illustre prelato fu inviato come governatore dopo la condanna di Galileo. Ciampoli pagava con l'allontanamento da Roma l'amicizia e l'ammirazione che lo legavano da sempre all'autore del *Dialogo*.
Durante questo lungo periodo, Torricelli fu un attento studioso della teoria del moto, com'è attestato da una lettera di Castelli a Galileo del 2 Marzo 1641. L'abate era stato autorizzato a recarsi presso Galileo, prigioniero nella sua villa d'Arcetri. Nel comunicare la buona nuova al Maestro, egli promette di *portargli un libro, e forsi ancora il secondo libro, fatto da un mio discepolo [...] che ha dimostrato molte proposizioni di quelle De Motu dimostrate già da V.S., ma diversamente superedificando maravigliosamente intorno alla stessa materia[...]*. Il *discepolo* è proprio Evangelista Torricelli tornato a Roma all'inizio del 1641. Il *libro* fu favorevolmente giudicato da Galileo, e Castelli, profondamente colpito dalla cecità e dagli acciacchi che affliggevano l'illustre ospite, temendo che le sue più recenti "speculationi" potessero andar perdute, gli propose di inviare Torricelli a Firenze per facilitarne la redazione. La proposta di Castelli fu immediatamente accettata da Galileo, e due settimane dopo, il 27 aprile 1641, Torricelli

scriveva al prigioniero di Arcetri per ringraziarlo dell'invito e rammaricarsi di non poter partire prima del rientro a Roma dell'abate. L'assenza di Castelli si protrarrà fino all'autunno ed è permesso chiedersi se essa fu la sola causa della mancata partenza di Torricelli.
Si può osservare che nel contesto politico e culturale dell'epoca, occorreva una buona dose di coraggio per andare a raccogliere le idee di colui che i potentissimi inquisitori del Sant'Uffizio volevano far tacere per sempre. Ed, in effetti, Torricelli, pur continuando a scrivere a Galileo, non dà nessuna indicazione precisa sulla data del suo arrivo ed anzi sembra esitare sulla decisione stessa di trasferirsi a Firenze. Galileo se ne duole in una lettera del 27 settembre 1641. Le parole di Galileo hanno un effetto quasi immediato: ai primi di ottobre Torricelli parte per Firenze. Qui redige, sotto la guida del venerando Maestro, la *Quinta giornata* da aggiungersi alle quattro dei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, già pubblicati a Leida, presso gli Elzeviri, nel 1638.
La morte di Galileo il 6 gennaio 1642 interrompe bruscamente l'attività di Torricelli, che decide di ritornare subito a Roma. Sta già per partire, quando Ferdinando II dei Medici gli propone di restare a Firenze col titolo di "*matematico del Granduca di Toscana*" e " *Lettore di matematica*" all'università di Pisa. Questa nomina, immediatamente accettata, segna l'inizio per Torricelli di un periodo di intensa attività, nel corso del quale maturano le soluzioni di numerosi problemi di matematica e di fisica.
L'attività scientifica di Torricelli conobbe una larga diffusione in Francia. Purtroppo le relazioni fra gli scienziati delle due comunità furono rese difficili dalle discussioni sull'anteriorità della scoperta della *quadratura della cicloide* e *dell'esperimento dell'argento vivo*. Torricelli ne fu profondamente addolorato. Convinto che altri (primo tra tutti il professore Roberval) volessero attribuirsi i meriti delle sue scoperte decise di difendersi pubblicando le lettere scambiate con gli scienziati francesi.
Questo progetto non poté essere attuato: colpito ancora giovane da una malattia non nota, Torricelli morì a Firenze nella notte tra il 24 e il 25 ottobre 1647.

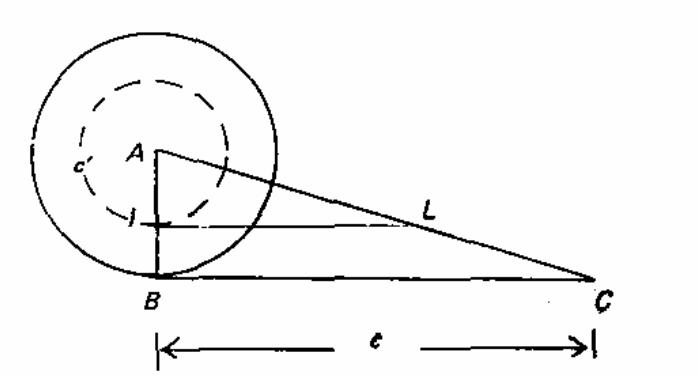
1.2. Torricelli e il metodo degli indivisibili curvi

Torricelli è considerato uno dei principali precursori del **calcolo infinitesimale**, della disciplina che oggi chiamiamo *analisi*, ma che allora era considerata una nascente branca della geometria. E la geometria era per Torricelli la regina delle scienze.
Il **metodo degli indivisibili** proposto da Cavalieri, che aveva trovato in Galileo un interlocutore attento anche se sostanzialmente poco convinto, doveva rivelarsi infatti nella sua importanza grazie a Torricelli.
Così il grande matematico li giudicava, infatti, nelle *Lezioni accademiche* : "*la nuova teoria degli indivisibili va per le mani dei dotti come miracolo di scienza, e per essa ha imparato il mondo che i secoli di Archimede e di Euclide furono gli anni d'infanzia per la scienza della nostra adulta geometria*".
Non solo Torricelli accettò il ricorso agli indivisibili ma ampliò questa nozione, includendovi gli **indivisibili curvilinei** oltre a quelli rettilinei, completò alcuni risultati di Cavalieri e ne aggiunse di nuovi quali, ad esempio, la prima *rettificazione di curve piane* e *le formule per la determinazione di certi baricentri*.
Nelle sue ricerche matematiche Torricelli pervenne ad alcuni teoremi sul calcolo delle aree e dei volumi – *che portano al calcolo di* ***integrali definiti*** - che, non entrati immediatamente nel patrimonio culturale dell'epoca, richiesero tempo e fatica per venire riscoperti dagli analisti stranieri durante la seconda metà del secolo.
Si comprende facilmente che i procedimenti degli indivisibili, usati in modo maldestro, potevano condurre all'assurdo. Esempi di uso errato degli indivisibili vennero proposti al Cavalieri e al Torricelli dagli oppositori del loro metodo e vennero escogitati da loro stessi per prevenire obiezioni o per meglio approfondire la natura del loro procedimento.

Le difficoltà nascevano dal fatto che non c'era una base rigorosa. Tuttavia gli scienziati dell'epoca, abbandonato l'ideale greco del ragionamento chiaro e rigoroso, sostituivano la ragione con l'"*intuizione*" e l'"*istinto*" in molte questioni importanti, col risultato di incoraggiare una fede cieca nel sovrumano potere dei nuovi metodi. Si credeva generalmente che un'esposizione chiara dei risultati del calcolo fosse non soltanto non necessaria ma anche impossibile.
C'è comunque da fare una distinzione tra gli "indivisibili" di Cavalieri e gli "indivisibili" d Torricelli (come di Roberval e poi di Pascal).
L'indivisibile di Cavalieri ha una dimensione di meno del continuo del quale fa parte, per esempio segmento di una superficie piana. Da qui nascono le perplessità dei contemporanei: come può l'insieme di questi segmenti senza spessore generare una superficie piana?
Questo problema fu in parte risolto da Torricelli che concepiva l'indivisibile con le stesse dimensioni del continuo (*ydx*) del quale è parte, quindi con un certo "grado di spessore".

Per vedere l'uso del metodo degli indivisibili fatto da Torricelli mostriamo la sua dimostrazione del teorema (già riportato come *proposizione 1* nell'opera "*Misura del cerchio*" di Archimede): *l'area di un cerchio c è uguale all'area del triangolo rettangolo con un cateto pari al raggio e la base uguale alla misura della circonferenza*.

Prendiamo la circonferenza di lunghezza *c* e raggio *R* e tracciamo il segmento *BC* tangente alla circonferenza e di lunghezza pari a *c*.



Sia *c'* una circonferenza qualsiasi concentrica con *c* ed ad essa interna di raggio ρ. Congiungiamo *A* con *C* e prendiamo la retta *IL* parallela a *BC*. Si vede facilmente che sussiste la relazione:

$$c:c'=R:\rho$$

indipendentemente dalle misure di *c* e *c'*.
Ne segue che

$$c:c'=BC:IL$$

da cui

$$c:BC=c':IL$$

Ma essendo *BC*=*c* per costruzione, sarà

$$c'=IL.$$

Quindi poiché la "totalità" delle circonferenze interne e concentriche *c'* sarà, per così dire, uguale all'area del cerchio *c* e la "totalità" dei segmenti di tipo *IL* fornirà l'area del triangolo *ABC*, dalla (1) si avrà che <u>l'area del cerchio è uguale all'area del triangolo</u> così costruito.
Nella trattazione di questo teorema Torricelli usa ancora un linguaggio molto geometrizzato.

1.3. Il solido iperbolico acutissimo

Torricelli applicò, nella propria opera ***Sulla misura della parabola e del solido iperbolico***, il metodo degli indivisibili curvi per calcolare il volume del cosiddetto *solido iperbolico acutissimo*, figura tridimensionale che potrebbe essere descritta efficacemente come *"un solido di grandezza infinita ma dotato di una sottigliezza tale che per quanto prolungato all'infinito non supera la mole di un piccolo cilindro. Esso è il solido generato dall'iperbola [...]".*

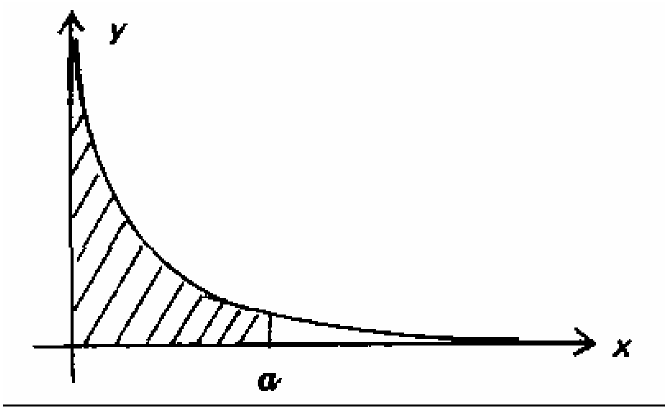
Un risultato di notevole importanza in tale opera fu l'estensione del concetto di integrale a funzioni che sono infinite nei punti di accumulazione nel dominio di integrazione oppure domini di integrazione infinitamente estesi. Purtroppo però il grande matematico morì prima di aver portato a termine il grande lavoro in cui si proponeva di esporre con ordine sistematico le proprie ricerche infinitesimali e l'amico, cui affidò i propri appunti confidando in un'edizione postuma, non fu in grado di orientarsi nella moltitudine di pagine sparse ed enigmatiche dissipando quella che si sarebbe potuta rivelare una fonte preziosa per i contemporanei, in particolare per i matematici inglesi.

Prima di mostrare il suo ragionamento, facciamo delle considerazioni utilizzando la simbologia moderna.

Partiamo da un ramo di iperbole equilatera

$$y = \frac{1}{x} \text{ con } x > 0$$

e calcoliamo l’area tratteggiata

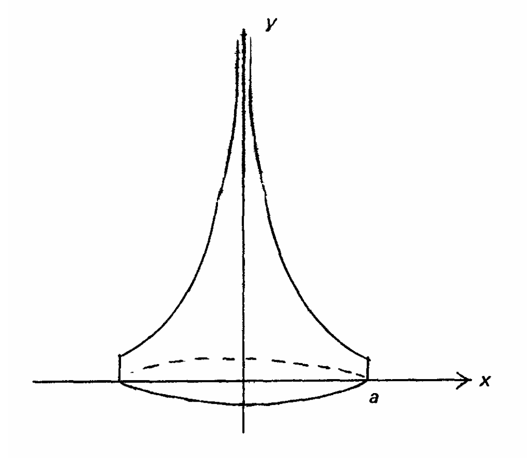


che sappiamo essere uguale a

$$\int_0^a \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} [\log x]_\varepsilon^a = +\infty$$

quindi <u>questa area è infinita</u>.
Facciamo ruotare ora la figura intorno all’asse y di un angolo giro.

Questa area genera quindi quella che Torricelli definisce *solido iperbolico acutissimo*, il cui <u>volume potrebbe sembrare infinito</u>!



Proviamo a calcolare questo volume V. Trattandosi di un volume di rotazione, il calcolo a fette è immediato:

$$V = \int_{\frac{1}{a}}^{+\infty} A(y)dy + \pi a^2 \frac{1}{a}$$

Volume del cilindro di raggio a e altezza 1/a

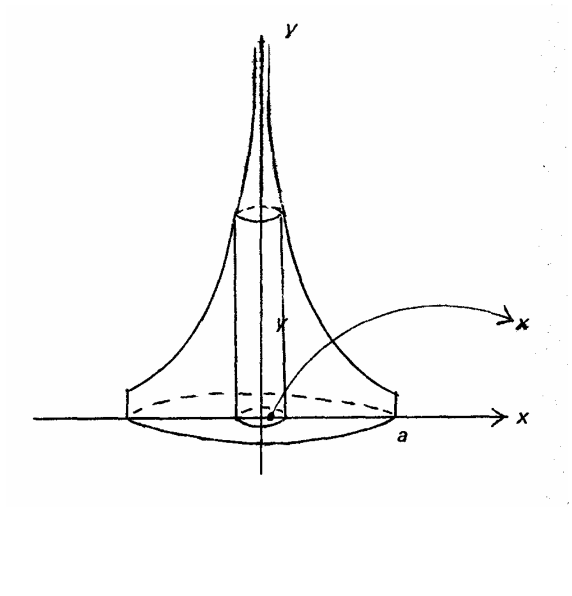
dove $A(y)$ è l'area della sezione del nostro solido a quota $y > \frac{1}{a}$. Risulta perciò

$$V = \int_{\frac{1}{a}}^{+\infty} \pi \frac{1}{y^2} dy + \pi a = 2\pi a .$$

Quindi abbiamo un ***volume finito generato da una superficie di area infinita***.
Questo risultato fu trovato per la prima volta da Torricelli e destò molto interesse e perplessità nella comunità dei matematici del tempo.

OSSERVAZIONE: questa perplessità è da ricercarsi molto probabilmente nel fatto che "istintivamente" si è portati a pensare che il prodotto di due numeri positivi è sempre maggiore di uno dei due numeri, in particolare che se $k > 0$ allora deve essere $k^2 > k$.

Torniamo ora al metodo utilizzato da Torricelli per giungere a questo risultato.
All'interno del solido iperbolico, consideriamo un generico involucro cilindrico, cioè la superficie cilindrica la cui base è un cerchio di raggio x e la cui altezza e $y = \frac{1}{x}$.

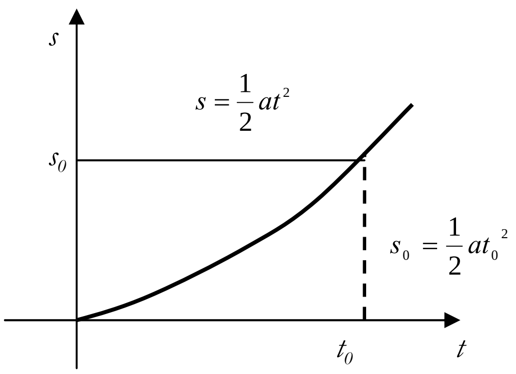


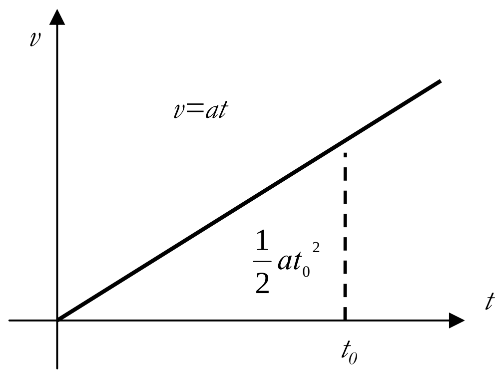
Questo involucro cilindrico è un indivisibile curvo e la "totalità" di questi indivisibili riempie il solido. Ma l'area laterale del cilindro è $2\pi xy = 2\pi$, per cui tutte queste aree ($0 \le x \le a$) sono uguali e pari al doppio dell'area del cerchio di raggio 1. Quindi al posto di tutti questi involucri possiamo prendere *tanti* cerchi *quanti* sono gli involucri cilindrici e disporli gli uni sugli altri ottenendo così un cilindro di altezza a, da cui: il volume del solido iperbolico acutissimo è uguale al volume di questo cilindro, ossia $2\pi a$.

1.4. Torricelli e il legame tra derivazione e integrazione

Un altro merito importante di Torricelli nel campo dell'analisi fu quello di intuire lo stretto legame esistente tra i procedimenti di derivazione e di integrazione. Infatti attraverso riflessioni cinematiche, oltre a pervenire al concetto di integrale indefinito, percepì la stretta relazione esistente tra il problema della quadratura (cioè del calcolo delle aree) e quello delle tangenti.

Il grande matematico partì dagli studi sul moto di Galilei. Nei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* Galileo aveva mostrato che nel moto uniformemente vario con accelerazione costante a la velocità v ed il tempo t sono legati dalla relazione $v = at$, mentre la dipendenza dello spazio percorso s rispetto al tempo è espressa da $s = \frac{1}{2}at^2$.





Di conseguenza in notazione moderna $s(t_0) = \int_0^{t_0} v(x)dx = \frac{1}{2}at_0^2$.

Le ricerche di Galileo furono proseguite da Torricelli nel *De motu gravium* pubblicato nel 1644. Considerando un punto materiale che si muove su una retta con una legge qualsiasi e che costruisce la curva grafica $v = v(t)$, Torricelli constatò che lo spazio percorso tra t_1 e t_2 è misurato dall'area compresa sotto la curva tra il punto con ascissa t_1 e quello con ascissa t_2 e che il coefficiente singolare della retta tangente alla curva di equazione $s = s(t)$ nel suo punto di ascissa t_0 è $v(t_0)$.

Poiché ogni curva può considerarsi come il grafico di un'equazione di moto, le considerazioni di Torricelli rivestono un valore generale. Il matematico molto probabilmente aveva visto tale legame ma non ne aveva capito l'importanza.
E' così verificato il legame tra le operazioni di integrazione e derivazione, noto sotto il nome di *teorema di Torricelli-Barrow* o *teorema fondamentale del calcolo integrale*.

2. Isaac Barrow

2.1. Vita e opere

Nato a Londra nel 1630, studiò a Cambridge dove nel 1652 conseguì il grado di M.A., prese gli ordini religiosi, ma nonostante ciò dedicò gran parte della sua attività all'insegnamento della matematica, in particolare della geometria. Negli anni 1655-59 viaggiò per l'Europa, visitando anche l'Italia, dove venne in contatto tra l'altro con i discepoli di Galileo.
In un primo momento insegnò greco presso l'università di Cambridge, poi nel 1662 fu nominato professore di geometria al Gresham College di Londra e infine nel 1664 fu nominato Lucasian Professor di geometria a Cambridge, occupando per primo la cattedra fondata da Henry Lucas (1610- 1663) nel 1663.
In questi anni, essendo un grande ammiratore degli antichi e un buon conoscitore del greco e dell'arabo, tradusse alcune delle opere di Euclide e apportò miglioramenti a un certo numero di altre traduzioni degli scritti di Euclide, di Apollonio, di Archimede e di Teodosio.
Il 1668 fu un anno importante per Barrow, poiché teneva le sue lezioni di geometria nelle stesso periodo in cui apparivano la "Geometriae pars universalis" di James Gregory[1] (1638- 1675) e l'edizione riveduta del "Mesolabum" di Renè François de Sluse[2] (1622-1685), e quindi desiderando che le sue lezioni di geometria tenessero conto dello stato di ricerche in quel campo, Barrow inserì un'esposizione particolarmente dettagliata e completa delle nuove scoperte.
Infatti i suoi contributi originali consistono di tre serie di lezioni, una di ottica geometrica, le altre di geometria pura, che pubblicò nel 1669, con il nome di "Lectiones opticae et geometricae", per la redazione delle quali si era avvalso della collaborazione del suo allievo e amico, Isaac Newton.
In questo stesso anno si dimise dalla cattedra di professore di geometria a Cambridge poiché fu chiamato a Londra per assumere la carica di cappellano di Carlo II, dedicando così gli ultimi anni della sua vita agli studi teologici. Il suo posto fu preso da Newton, per suggerimento dello stesso Barrow, anche se non possedeva gli ordini sacri, che erano indispensabili per occupare tale cattedra.
Morì a Londra nel 1677.

2.2. Pensiero

Barrow, il più importante fra i mentori di Newton era principalmente un geometra: amico, maestro e predecessore di Newton nella cattedra di Cambridge, non considerava l'algebra come parte della matematica propriamente detta, ma piuttosto come formalizzazione della logica.
Per lui, solo la geometria era matematica, mentre l'aritmetica e l'algebra si occupavano delle grandezze geometriche espresse in simboli e trovavano la loro giustificazione logica nella geometria, quindi l'algebra non poteva sostituire la geometria o porsi sullo stesso piano.
Barrow quindi ragionava solo geometricamente, ma nonostante i suoi attacchi agli algebristi per la loro mancanza di rigore, lui stesso era meno scrupoloso di loro per quel che riguarda la solidità dei suoi ragionamenti geometrici.

---

[1] Giovane matematico scozzese , precursore di Newton, morto a soli 36 anni. Nella sua breve vita era venuto in contatto con matematici di diversi paesi. Nelle sue opere non voleva fare distinzione tra metodi algebrici e metodi geometrici, e di conseguenza la sua opera presentava una veste essenzialmente geometrica che ne rendeva difficile la lettura. Se avesse espresso i risultati delle proprie ricerche in forma analitica, avrebbe forse anticipato Newton nell'invenzione del calcolo infinitesimale: infatti prima della fine del 1668 era a conoscenza virtualmente di tutti gli elementi fondamentali di tale calcolo. Nella sua opera sulla geometria provò che il problema della tangente e quello dell'area sono problemi inversi, ma purtroppo il suo libro passò inosservato, anche Barrow non ne riconobbe l'importanza.

[2] Nato in Belgio fu destinato dalla famiglia alla carriera ecclesiastica. Studiò a Lione e a Roma, dove probabilmente aveva avuto modo di conoscere l'opera di matematici italiani. Pubblicò una sola opera, il *Mesolabio*, che tra l'altro conteneva il metodo per risolvere il problema delle tangenti analogo a quello di Gregory, ma trovato in maniera indipendente.

Tali considerazioni, fatte da Barrow, nascevano dal fatto che, in questo periodo storico, non esistevano ancora dei fondamenti logici per l'algebra analoghi a quelli che Euclide aveva fornito alla geometria e, inoltre, ancora non si possedeva un chiaro concetto di funzione.
Nella sua opera principale usa dei metodi geometrici liberati, come lui stesso dice, dall'odioso peso dei calcoli, che lo portano a presentare, sotto forma geometrica, la relazione tra il trovare la tangente a una curva e il problema dell'area, senza riconoscerne però l'importanza.
Si può inoltre affermare che Barrow, ispiratosi ai risultati ottenuti da Galilei e da Torricelli, si accorse anche lui che le operazioni di derivazione e di integrazione sono una inversa dell'altra, ma a sua volta, non ne comprese appieno il valore.
Infatti, nonostante la sua opera riveli, un metodo per trovare le tangenti, alcuni teoremi sulla differenziazione del prodotto e del quoziente di funzioni, la differenziazione delle potenze di x, la rettificazione di curve, il cambiamento di variabile in un integrale definito e perfino la differenziazione delle funzioni implicite, essa non fu compresa dai suoi contemporanei a causa della sua formulazione geometrica.
Comunque, fra tutti i matematici che anticiparono aspetti del calcolo differenziale e integrale, nessuno si avvicinò alla nuova analisi più di Barrow: sembra, infatti, che lui fosse chiaramente consapevole della relazione inversa esistente tra il problema della tangente e quello della quadratura, ma il suo atteggiamento conservatore, che lo manteneva legato ai metodi geometrici gli impedì di fare un uso efficace di tale relazione.
Fortunatamente, Barrow sapeva che proprio a quel tempo Newton stava lavorando sugli stessi problemi e, il più anziano professore, affidò al suo giovane collaboratore il compito di raccogliere e pubblicare i propri risultati.
Comunque tra i meriti di Barrow ci fu anche quello di riconoscere la grandezza del suo amico Newton e di averlo incoraggiato nei suoi studi.

2.3. Lectiones Opticae et Geometricae

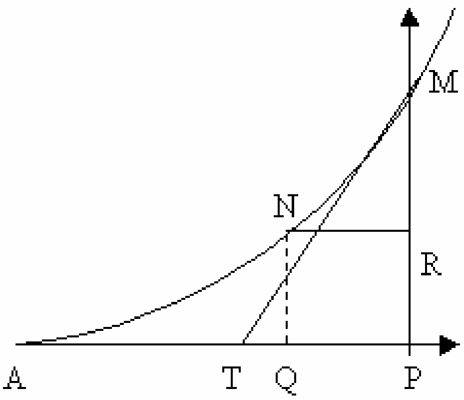
Tale opera, all'interno della quale figurano in misura preminente i problemi delle tangenti e delle quadrature (argomenti di gran moda in quel periodo), rappresenta uno dei grandi contributi al calcolo infinitesimale, anche se tali contributi non furono pienamente compresi né da Barrow stesso né dai suoi contemporanei, ma bisognerà aspettare che essi vengano rivisitati da Newton.
Nel trattare il problema delle tangenti a una curva Barrow, in generale, preferì ispirarsi alle concezioni cinematiche di Torricelli anziché all'aritmetica statica di Wallis.
Sebbene il suo modo di ragionare fosse molto più simile a quello di Cavalieri che non a quello di Wallis e di Fermat, vi è comunque un punto nelle sue lezioni, in cui l'analisi algebrica si fa avanti ponendosi in primo piano, ossia alla fine della decima lezione dove, su suggerimento di Newton, come lui stesso afferma, Barrow presenta un nuovo metodo per tracciare le tangenti ad una curva ricorrendo al calcolo. Alla fine della Lezione X Barrow infatti scriveva:

> *Come supplemento a questo, aggiungo in appendice un metodo per trovare le tangenti mediante il calcolo, metodo che viene spesso usato da noi, sebbene non veda dei vantaggi vi siano ad usarlo, dopo così tanti metodi noti e provati del tipo di quelli usati nelle pagine precedenti. Tuttavia lo faccio dietro consiglio di un amico*[3]*; e tanto più volentieri poiché mi sembra più fecondo e più generale di quelli che ho discusso.* […]
>
> *Isaac Barrow, Lectiones opticae et geometricae, pp. 80-81.*

Barrow passava poi a spiegare tale metodo geometrico, che era virtualmente identico a quello usato nel calcolo differenziale ed era molto simile a quello di Fermat, anche se faceva uso di due quantità - invece dell'unica lettera E usata da Fermat - quantità che equivalgono alle moderne Δx e Δy.

[3] Più tardi si seppe che tale amico era proprio Isaac Newton.

Newton stesso, che collaborava con Barrow, riconobbe che l'algoritmo di questo ultimo non era altro che un perfezionamento di quello di Fermat; ma a quanto sembra Barrow non conosceva direttamente l'opera di Fermat, infatti non ne cita mai il nome; comunque tra coloro che egli cita come fonti delle sue idee vi erano Cavalieri, Huygens, Gregorio di San Vincenzo, James Gregory e Wallis, e poiché Huygens e Gregory, in particolare, avevano spesso usato questo procedimento, può darsi che fosse attraverso costoro che Barrow venne a conoscenza, quindi indirettamente, del metodo di Fermat.
Barrow spiega la sua regola delle tangenti sostanzialmente in questo modo.
Per una data curva algebrica AM, riferita a due retta ortogonali AP e PM, Barrow supponeva che MT fosse la tangente.



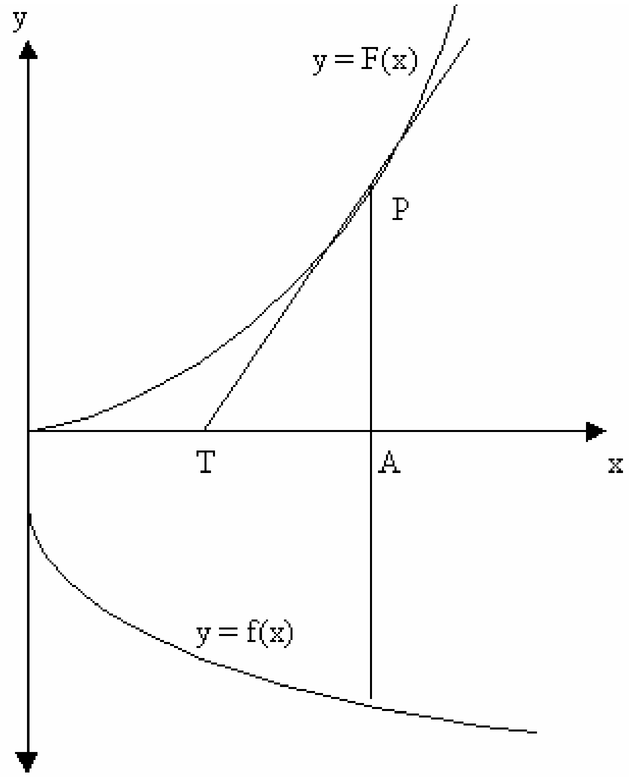
Considerando "un arco indefinitamente piccolo, MN, della curva, ossia un arco infinitesimo" e chiamati $MP = m, PT = t, MR = a \text{ ed } NR = e$, per determinare t, ossia la sottotangente PT, Barrow si basava sul fatto, esaminando i triangoli rettangoli MNR e MTP, che il rapporto $a : e$ era uguale al rapporto $m : t$. Oggi diremo che il rapporto $a : e$, per punti infinitamente vicini, esprime la pendenza della curva. Per trovare questo rapporto Barrow procedette allo stesso modo di Fermat: ossia sostituì x e y nell'equazione della curva, rispettivamente con $x+e$ e $y+a$; poi nell'equazione risultante trascurò tutti i termini non contenenti a o e (dal momento che questi erano uguali a zero) e tutti i termini di grado superiore al primo in a ed e, e infine sostituì a con m ed e con t. Da ciò ottenne la sottotangente in termini di x e m, e quindi conoscendo x e m, la quantità t risultava essere determinata. In parole sue:

[…]

1. *Nel calcolo trascuro tutti i termini nei quali compare **a** oppure **e** elevato a potenza o nei quali esse sono moltiplicate tra loro (infatti questi termini varranno zero).*
2. *Dopo aver scritto l'equazione, trascuro tutti i termini che designano quantità costanti note o determinate; ovvero quelli in cui non compaiono **a** oppure **e** (infatti quei termini, portati in un membro dell'equazione, saranno sempre uguali a zero).*
3. *Sostituisco **m** (ossia MP) al posto di **a** e **t** (ossia PT) al posto di **e**. Da qui si troverà quindi la lunghezza di **PT**.*

Isaac Barrow, Lectiones opticae et geometricae, pp. 80-81.

Tale metodo geometrico è molto involuto e fa uso di curve ausiliare, tuttavia, una sua caratteristica è degna di nota, perché illustra il modo di ragionare dell'epoca: l'uso di quello che viene chiamato triangolo differenziale o caratteristico, ossia il triangolo MRN quando MN, sufficientemente piccolo, è considerato sia come arco della curva sia come parte della tangente.
Tale triangolo caratteristico era stato usato molto prima anche da Pascal, in connessione con la ricerca delle aree, e da altri prima di lui.
Nel linguaggio attuale, l'idea di Barrow consisteva nel disegnare due sistemi cartesiani di riferimento aventi in comune l'origine e l'asse delle ascisse e con gli assi delle ordinate orientati da parti opposte.



Nella parte “in basso”, Barrow rappresentava una qualsiasi funzione crescente $y = f(x)$ da $[0,+\infty[$ in $[0,+\infty[$; nella parte “in alto” costruiva la funzione $y = F(x)$ avente in ogni punto valore $F(x_0)$ uguale all’area della regione limitata dagli assi coordinati, dalla retta di equazione $x = x_0$, dal diagramma della funzione $y = f(x)$.

Barrow dimostrò che la tangente alla curva di equazione $y = F(x)$ nel punto $P = (x_0, F(x_0))$ si ottiene congiungendo P con il punto T del semiasse positivo x tale che:

$$AT = \frac{AP}{AB}$$

dove B è il punto del grafico di $y = f(x)$ che ha la stessa ascissa x_0 di P e quindi

$$f(x_0) = AB = tg\alpha = F'(x_0).$$

3. Gottfried Wilhelm Leibniz

3.1. La vita e le opere

Gottfried Wilhelm Leibniz nasce a Lipsia nel 1646. Dotato di straordinario ingegno e di notevole capacità di apprendimento, sa formarsi ben presto una vasta cultura al di sopra delle scuole che via via frequenterà.
Fin dal 1654 accede alla ricca biblioteca di famiglia, il nonno ed il padre erano stati professori universitari, iniziando a leggere, come autodidatta, i classici latini e i Padri della Chiesa.
A scuola studia la sillogistica di Aristotele, appassionandosi alla questione delle categorie e intraprende studi di metafisica e teologia, con particolare riguardo alla dottrina scolastica.
Nel 1661 entra all’Università di Lipsia, dove frequenta i corsi di filosofia su Aristotele e Euclide.
Nel 1663, durante il soggiorno estivo a Jena, segue i corsi universitari del matematico E.Weigel, e tornato a Lipsia, per il semestre invernale, inizia a seguire gli studi specialistici in giurisprudenza. Nello stesso anno discute e pubblica la tesi di baccellierato *De Principio Individui* in cui anticipa la futura concezione monadologica.
Nel 1666 pubblica i suoi primi scritti di logica matematica: *Disputatio de arithmetica de complexionibus* (Dissertazione aritmetica sulle complessioni), che anticipa la successiva e più importante *Dissertatio de arte combinatoria* (Dissertazione sull’arte combinatoria), con la quale ottiene l’abilitazione in filosofia. Nell’*Ars combinatoria* Leibniz riprende i motivi dell’*Ars magna et ultima* del teologo e filosofo catalano Raimondo Lullo, vissuto nel XIII secolo, che concepiva la logica come scienza universale, fondamento di tutte le scienze. Leibniz sviluppa il concetto in senso logico-metafisico al fine di pervenire ad una *ars inveniendi*, cioè una logica della scoperta di verità nuove mediante la combinazione di concetti semplici.
Nell’ottobre dello stesso anno passa ad Altdorf (vicino Norimberga), disgustato dagli intrighi accademici di Lipsia, dove si laurea in giurisprudenza e ottiene, l’anno successivo, il dottorato.
Tra il 1667 e il 1668 viene introdotto alla corte dell’Elettore di Magonza, dove inizia la sua carriera diplomatica e di consigliere. Scrive alcuni trattati di giurisprudenza.
Nel 1669 entra in contatto con il giurista Erich Mauritius che gli segnala alcune pubblicazioni di C.Wren e C.Huygens concernenti la collisione di corpi: è l’occasione per Leibniz di abbozzare la

Hypotesis physica nova (Nuova ipotesi fisica) che pubblicherà nel 1671. Il trattato è composto di due saggi complementari intitolati *Theoria motus concreti* e *Theoria motus abstracti*, dedicati rispettivamente alla Royal Society di Londra, con la quale era entrato in contatto epistolare l'anno precedente, e all'Accademia delle Scienze di Parigi.
Inizia il contatto epistolare con il filisofo olandese Spinoza e informa il matematico P. de Carcavy, bibliotecario reale a Parigi, della sua invenzione della macchina calcolatrice.
Nel 1672 viene inviato a Parigi per una missione diplomatica voluta dalla corte di Magonza allo scopo di evitare l'invasione dell'Olanda da parte di Luigi XIV. La missione fallisce, ma Leibniz ottiene il permesso di rimanere a Parigi; vi rimarrà per 4 anni. Fondamentale di questo periodo per la sua formazione matematica è l'incontro con Huygens, il quale lo indirizza nello studio di Cavalieri, Descartes, Fermat, Gregorio da San Vincenzo e Pascal.
Durante il soggiorno parigino ha modo di visitare Londra, dove stringe rapporti con Oldenburg, il quale lo introduce alla Royal Society di cui divenne membro.
Ancora a Parigi ha modo di conoscere il filosofo e matematico N.Malebranche e di leggere gli scritti di Galilei; si candida all'Accademia delle Scienze di Parigi, grazie al posto rimasto vacante per la morte del matematico G.P. de Roberval (ne diverrà membro nel 1700). Nel 1676 torna in Germania come consigliere del duca di Hannover, ma prima del ritorno ha modo di tornare a Londra, dove legge alcuni scritti di Newton e di passare per l'Olanda, dove conosce il filosofo dell'*Ethica* Spinoza.
Dal 1676 fino all'anno della sua morte, 1716 Leibniz rimane alla corte di Hannover con il ruolo di consigliere e storiografo. Riesce tuttavia a compiere frequenti viaggi, oltre che in Germania, in Austria e in Italia (Roma, Napoli, Firenze, Modena, Bologna, Venezia).
Nel 1681 fonda con O.Mencke, professore di filosofia morale e politica a Lipsia, la rivista scientifica "Acta Eruditorum", nella quale pubblicherà, nel 1684, il *Nova methodus pro maximis et minimis…*, nel quale espone per la prima volta in modo organico il metodo del calcolo infinitesimale. Nel 1686 pubblica ancora negli Acta Eruditorum *Una breve dimostrazione di un errore memorabile di Cartesio* in cui critica il punto fondamentale della fisica cartesiana, il principio di conservazione del moto, in luogo del quale Leibniz pone l'energia cinetica o "forza viva". Nel 1711 ha occasione di incontrare in Germania lo zar Pietro il Grande del quale diverrà condigliere segreto. Gli ultimi anni della sua vita vengono amareggiati dalla lunga e penosa rivendicazione della scoperta del calcolo infinitesimale partita da un accusa del fisico J.Keill che lo coinvolgerà insieme a Newton. Nel 1714 compone i due scritti che saranno il fondamento della sua dottrina filosofica: *Principi razionali della Natura e della Grazia* e la *Monadologia*. Nel 1715 l'elettore di Hannover Georg Ludwig diviene Giorgio I re d'Inghilterra e vieta a Leibniz di intraprendere nuovi viaggi prima che le sue ricerche di storiografo siano concluse. Muore ad Hannover nel 1716.

Nonostante a Jena avesse frequentato le lezioni di Weigel, Leibniz, prima di arrivare a Parigi nel 1672, aveva una conoscenza piuttosto limitata della matematica. All'età di circa diciotto anni aveva scoperto alcuni principi del calcolo combinatorio, rilevando indubbie capacità logico-matemtiche; non aveva manifestato tuttavia quella passione precoce ed esclusiva per la disciplina che di solito caratterizza le biografie dei grandi matematici. C'è chi dice che queste scarse conoscenze possano essere state la spinta che portarono Leibniz a concepire espedienti per arricchire la scienza di nuovi metodi, in situazioni nelle quali una mente dotata di capacità normali avrebbe portato a termine il proprio compito con conformismo senza porsi troppi problemi.

Dal punto di vista della formazione matematica, è l'incontro con Huygens a risultare decisivo.

Nel XVII secolo il consolidarsi della rivoluzione astronomica avviata da Copernico e l'affermarsi della nuova fisica sorta con Galileo, producono un rinnovato interesse per lo studio del moto. Particolare rilievo assumono problemi come quello del calcolo della velocità e dell'accelerazione istantanee di un corpo; dal punto di vista strettamente matematico, si assiste alla ripresa di un forte interesse per la misura di curve, aree, e volumi. Tra i problemi che si

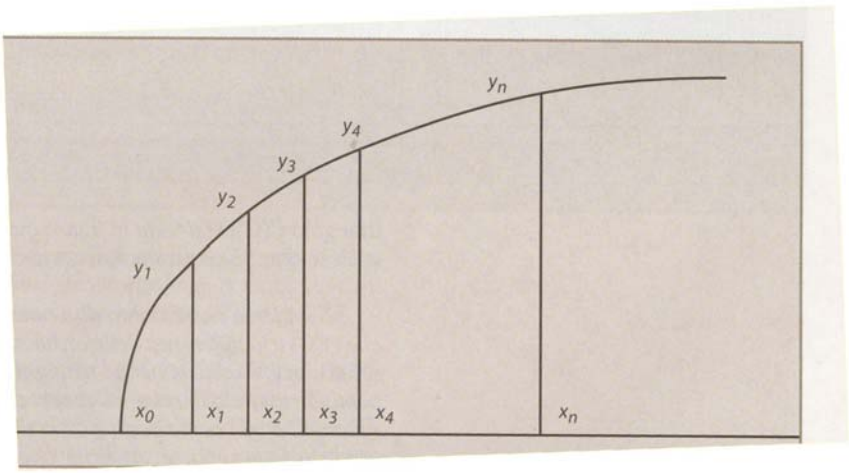
impongono ve ne sono due in particolare, che attraggono l'attenzione dei principali studiosi dell'epoca: il problema delle cosiddette quadrature, avente origine nella matematica antica, e quello della determinazione della tangente ad una curva data.
Quando nei testi del XVII secolo si incontra l'espressione quadratura, si intende designare perlopiù l'area intercettata da una determinata curva e dall'asse delle ascisse.
Sia la determinazione delle quadrature sia il calcolo delle tangenti venivano affrontati all'epoca di Leibniz con vari tipi di procedure. Una superficie, per esempio, poteva essere considerata il risultato della somma di un'infinità di linee parallele indivisibili, secondo la prospettiva inaugurata da Cavalieri co la sua *Geometria* (1635).

3.2. Il calcolo differenziale

In un saggio nel quale ripercorre la genesi della sua scoperta, Leibniz spiega come un primo passo decisivo verso il calcolo fosse stato l'essersi reso conto di certe proprietà delle successioni di numeri.
In una lettera a Bernoulli del 1695, ripercorrendo la genesi del calcolo, Leibniz ammette di essersi imbattuto in primo luogo nella reciprocità tra somme e differenze nelle successioni e quindi di avere spostato in seguito la propria attenzione dalle successioni di numeri alla considerazione delle linee ossia delle ordinate. È in una lettera al matematico Wallis del maggio 1697 che scrive:

> *La considerazione delle differenze e delle somme nelle serie numeriche mi fece balenare una prima luce, nel momento in cui mi resi conto che le differenze corrispondevano alle tangenti e le somme alle quadrature.*

Per chiarire quale nesso leghi le indagini leibniziane sulle serie numeriche e quindi per comprendere cosa Leibniz intenda esattamente in questo passo converrà richiamare brevemente alcuni concetti della matematica del tempo. Tracciata una curva nel piano

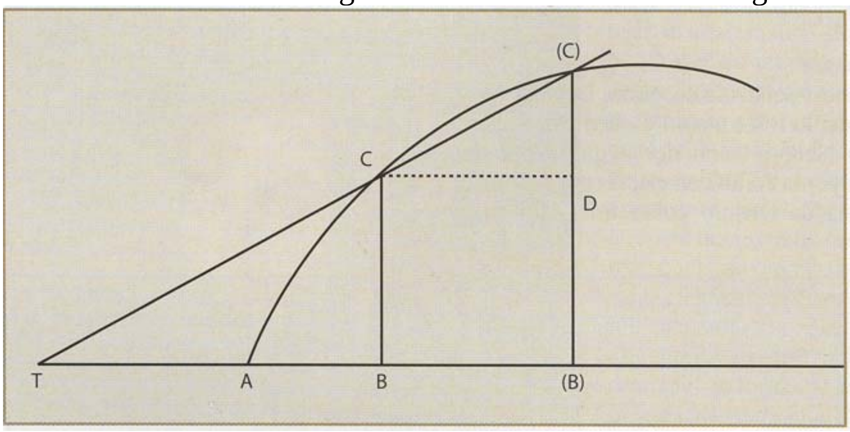


(vedi Fig), veniva fissato un asse di riferimento (l'asse delle x: di solito ci si limitava al solo asse delle ascisse, che tra l'altro non era orientato), sul quale venivano riportati un certo numero di segmenti, a partire dall'origine. Questi segmenti erano appunto le linee *abscissae*, cioè ritagliate sull'asse. In corrispondenza di ciascun estremo dei segmenti sull'asse veniva elevata la perpendicolare all'asse in quel punto, in modo che intercettasse la curva in un punto. L'insieme di tali linee perpendicolari, tra loro parallele, costituiva le ordinate (*ordinatim ductae)*. Si otteneva così un sistema di riferimento cartesiano.
Unendo tra loro con segmenti i punti intercettati dalle ordinate sulla curva, si ottengono i vertici di una poligonale iscritta: se la curva è chiusa, si otterrà un poligono. Ovviamente, quanto saranno più vicini i punti, tanto maggiore sarà il numero dei lati del poligono. Ben prima di Leibniz si erano fatte in proposito alcune importanti riflessioni. Inanzitutto, per

aumentare il numero dei lati del poligono iscritto, e quindi per avvicinare tra loro i vertici, basta diminuire la distanza tra due punti consecutivi sull'asse delle ascisse, in maniera da avvicinare due ordinate consecutive: tale distanza può essere diminuita a piacere, fino a far coincidere due vertici consecutivi.

In tal caso si ottiene una sovrapposizione o coincidenza tra il poligono iscritto (a infiniti lati) e la curva. Inoltre se si è interessati al calcolo dell'area sottesa dalla curva, si può considerare tale area come costituita dalla somma delle aree degli infiniti rettangoli che sono formati da due ordinate consecutive. In tal caso, il lato minore opposto alla base di uno qualsiasi dei rettangoli dovrà essere infinitamente piccolo e, in ultima analisi, identificarsi con un tratto infinitesimo di curva.

Appena arrivato a Parigi, Leibniz, su suggerimento di Huygens, si era applicato con grande determinazione allo studio dei testi più importanti che potessero aggiornarlo sugli sviluppi recenti della matematica. Particolare attenzione aveva dedicato a uno scritto di Pascal, dal quale aveva ricavato estratti. È leggendo Pascal che elaborerà l'idea del triangolo caratteristico; ed è riflettendo sul triangolo caratteristico che avrà l'intuizione di connettere tra loro lo studio delle serie numeriche e l'analisi geometrica delle curve ed in particolare la determinazione delle
tangenti. Leibniz stesso descrive il triangolo caratteristico nei termini seguenti.



Data una curva AC(C), si tracci una secante T alla curva in modo che T la tagli nei due punti C e (C). Da C e da (C) si abbasino, rispettivamente, le perpendicolari CB e (C) (B) all'asse dell'ascisse. Da C si tracci la normale CD a (C)(B). Il triangolo caratteristico è il triangolo C(C)D.

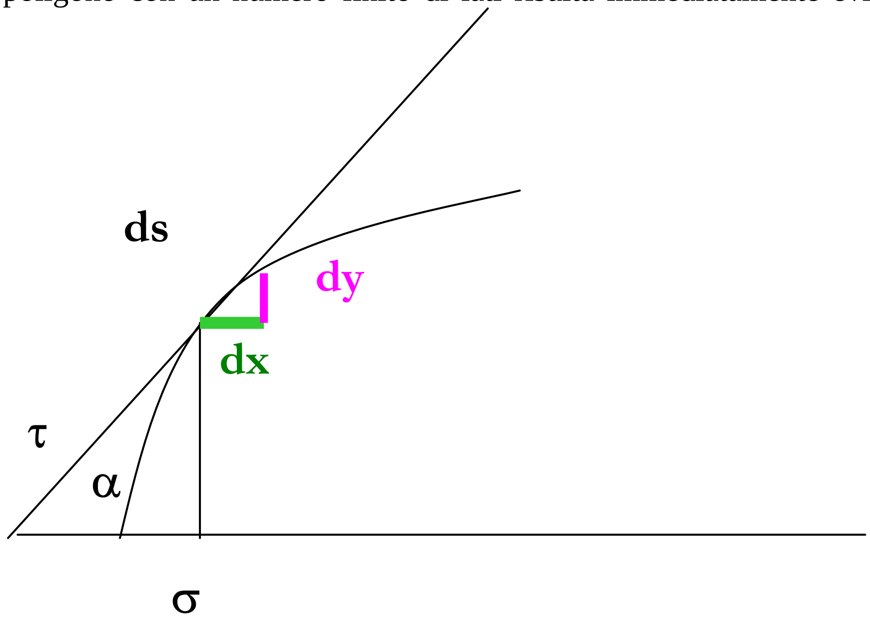
Ecco Leibniz come commenta la costruzione così ottenuta:

…è evidente che CD è la differenza delle ascisse AB e A(B) e, analogamente, che D(C) è la differenze delle ordinate BC e B(C). E se la retta TC incontra l'asse in AB in T, è evidente che i triangoli TBC e CD(C) sono simili. Ma nel caso del contatto, quando la retta TC non seca la curva AC(C), ma la tocca, ossia quando i punti C e (C) coincidono o distano di un intervallo infinitamente piccolo, è evidente che il triangolo CD (C) diventa in assegnabile, essendo formato da lati infinitamente piccoli e che CD è un elemento di ascissa e D (C) è un elemento di ordinata e C (C) è un elemento di curva.

Se ne conclude che il triangolo in assegnabile CD (C) è simile al triangolo TBC; perciò mediante il rapporto fra quantità in assegnabili CD e D (C) si trova il rapporto fra le quantità assegnabili TB e BC e quindi il modo di condurre la tangente TC. Ovvero trovare le tangenti non è altro che trovare le differenze delle ordinate, ponendo, se si vuole, e quindi differenti le differenze delle ascisse.

Per chiarire ulteriormente la posizione di Leibniz si tenga presente che il poligono iscritto ha un numero finito di lati: così la secante, i cateti del triangolo, le ascisse e le ordinate hanno un valore determinato. Il punto fondamentale, però, risiede proprio nel fatto che Leibniz, in quanto considera il poligono infinitangolo, intende riferirsi ad un'infinità di valori. Per questo, egli fa

uso sistematico di variabili (x,y,u,w,..) per designare le grandezze in gioco: ciascuna variabil varia su una successione infinita di valori che sono tra loro infinitamente vicini.
Nel caso di un poligono con un numero finito di lati risulta immediatamente evidente che la



grandezza del lato CD del triangolo caratteristico è determinabile come differenza tra i valori delle ascisse T(B) e TB; mentre la grandezza del lato (C)D è determinabile, a sua volta, come differenza tra i valori delle due ordinate (C)(B) e CB. Il valore dell'ipotenusa C(C) è determinabile con un'ovvia applicazione del teorema di Pitagora. Per rappresentare differenze infinitesime, nel caso del poligono infinitangolo, Leibniz, decise di impiegare la lettera "d" applicata alle variabili:" dx significa un elemento, vale a dire un incremento o un decremento (istantaneo) della quantità x (continuamente) crescente. Lo si chiama anche differenza, vale a dire la differenza tra due x prossime che differiscono per un elemento (ossia per un inassegnabile).

Utilizzando le differenze infinitesime, considerando cioè il poligono infinitangolo iscritto, il corrispondente triangolo caratteristico CD (C) (vedi fig), lo possiamo pensare composto da lati di grandezza infinitesima. Si possono cioè indicare i cateti (C)D e CD, rispettivamente con dx e dy mentre ds sarà l'ipotenusa infinitesima. L'ipotenusa del triangolo è un lato del poligono infinitangol; e qualora venga prolungata dà luogo alla tangente alla curva. Come scrive Leibniz:

> *Trovare la tangente significa tracciare una retta che congiunga due punti della curva che abbiano tra loro una distanza infinitamente piccola, ossia prolungare il lato del poligono infinitangolo, che per noi equivale alla curva. Questa distanza infinitamente piccola, d'altra parte, può sempre venire espressa mediante una relazione a esso, cioè mediante una tangente nota.*

L'idea di fondo può essere espressa in questo modo: se si divide la curva in un'infinità di intervalli infinitesimi s_1, s_2, s_3…… di conseguenza l'asse delle x viene divisa in un numero infinito di intervalli infinitesimi con valori x_1, x_2 , x_3; e lo stesso si verifica con l'asse delle y , che verrà diviso in intervalli con valori y_1, y_2, y_3…..La differenza tra due valori successivi della variabile prende il nome di differenziale ; differenziali sono dunque $dx=x_{n+1}-x_n$,
$dy=y_{n+1}-y_n$, $ds=s_{n+1}-s_n$.. Se con τ si designa la tangente e con σ la sottotangente (il tratto TB di figura) si otterrà la figura.
Come si ricava seguendo le indicazioni dello stesso Leibniz:
$dx:dy:ds=\sigma:y:\tau$

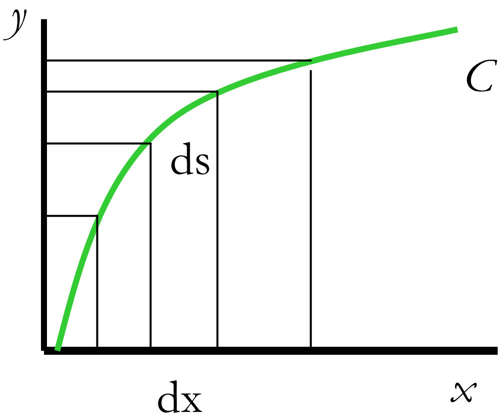
da cui si ottiene ds=(τ/y)dy. Considerando inoltre che τ forma con l'asse delle x un angolo α, si ottine anche:
tangα=dy/dx
il metodo dei differenziali consente di determinare non solo la tangente geometrica alla curva, ma anche la tangente trigonometrica dell'angolo tra la tangente geometrica e la sottotangente.
Leibniz alla fine dei suoi lavori scriveva:

> *Mediante una semplice figura con disegnati solamente un breve arco e alcune rette tra di loro intersecantesi, ho dedotto più di trenta proposizioni mirabili, per le quali molte curve vengono in parte quadrate e in parte si trasformano in altre curve con un metodo così facile, come sembrano soltanto essere trattate le figure rettilinee negli elementi di Euclide. Tutto riposa su un triangolo rettangolo dai lati infinitamente piccoli, che io sono solito chiamare caratteristico, a similitudine del quale vengono costruiti altri triangoli, dai lati assegnati, secondo le proprietà della figura. Poi questi triangoli simili, confrontati con quello caratteristico, forniscono numerosi lemmi per lo studio della figura, mediante i quali curve di genere diverso possono essere confrontate. Vi sono poche cose che non si deducano da questo triangolo caratteristico. Ma l'arte combinatoria può aiutare affinché nulla sfugga.*

4. Il calcolo integrale

Abbiamo visto che il ricorso ai differenziali ha permesso a Leibniz di trovare una soluzione generale al problema delle tangenti: rimaneva aperto il problema delle quadrature, ma una delle scoperte più importanti di Leibniz consiste proprio nell'aver compreso che tra i due problemi sussiste un rapporto.

Si consideri infatti la seguente figura



l'area sottesa dalla curva è composta da un'infinità di rettangoli di altezza y e base dx, ciascuno dei quali ha area ydx: l'intera area è perciò determinabile come somma totale di tali rettangoli. Per designare siffatta somma, Leibniz impiega prima il segno "omn" (abbreviazione di tutto in latino), ricavata da Cavalieri, per sostituirlo infine stabilmente con il simbolo di una s maiuscola allungata: $\int$ Il simbolo che denota l'area sotto la curva data corrisponderà quindi a $\int ydx$. Sia il simbolo per il differenziale sia quello per l'integrale vengono introdotti da Leibniz tra il 1684 e il 1686: entrambi vengono usati ancor oggi per le due operazioni. Nell'interpretazione di Leibniz , d applicato ad una variabile genera una quantità infinitamente piccola; $\int$ applicato ad una variabile genera invece una grandezza infinitamente grande, mentre genera una quantità finita se applicato ad un differenziale.
Leibniz coglie tra le due operazioni, la differenziazione e la somma, un rapporto di reciprocità:

”Fondamento del calcolo: le differenze e le somme sono tra loro reciproche, vale a dire che la somma delle differenze della successione è il termine della successione, mentre la differenza delle somme della successione è lo stesso termine della successione;
la prima affermazione la enuncio così:
$\int dx = x$
la seconda così:
$d\int x = x$

Leibniz realizza che le operazioni di quadratura e di tracciamento della tangente sono l’una l’inversa dell’altra.
Leibniz concepisce entrambe le operazioni di differenziazione e di somma come reiterabili: ammette cioè sia differenziali di differenziali (ddx), sia somme di somme $\int\int y$.
Leibniz rende nota pubblicamente la scoperta del calcolo differenziale nel 1684 sugli Acta Eruditorum. In esso presentava in maniera estremamente sintetica, tanto da risultare oscura, i principi del calcolo differenziale, esponendo le principali regole di differenziazione, soprattutto le regole per ottenere il differenziale della somma, del prodotto($d(xy)=xdy+ydx$) e della funzione composta. Specificava tra l’altro le modalità per determinare i punti di massimo e di minimo e i punti di flesso; forniva la soluzione di alcuni problemi con lo scopo di mostrare la potenza del nuovo strumento.

5. Isaac Newton

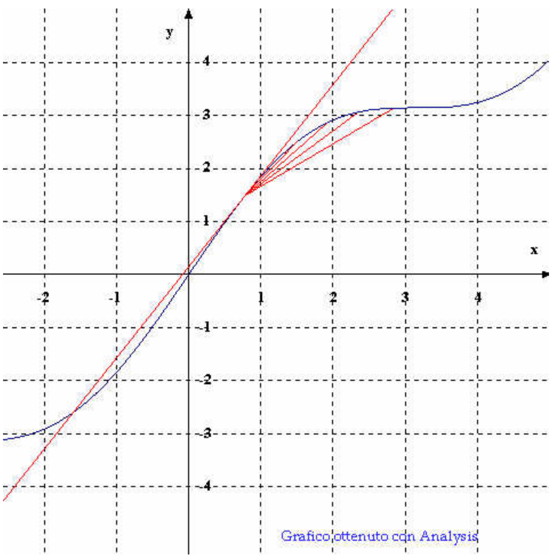
5.1. la vita e le opere

Isaac Newton nacque a Woolsthorpe, nel Lincolnshire il 25 dicembre 1642 (secondo il calendario giuliano) da una famiglia di proprietari terrieri e non conobbe mai il padre, chiamato pure lui Isaac, morto combattendo per il re Carlo I. Giovanotto timido e riservato ebbe un rapporto abbastanza travagliato con la madre Hanna Ayscough Newton la quale alternava periodi di completo abbandono del figlio con altri di attenzioni continue; il giovane Isaac sviluppò pertanto un carattere difficile e nella sua vita fu tormentato da numerosi periodi di profonda depressione e di gravi complessi di inferiorità che lo rendevano estremamente sospettoso con chiunque gli stesse intorno. In particolare, la madre si risposò con un uomo molto più anziano di lei e se ne andò a vivere senza il piccolo quando questi aveva appena un paio d’anni, lasciandolo alle cure della nonna. Questo accadde nel 1645 quando infuriava ovunque la guerra civile fra seguaci del re e seguaci del parlamento. Pure, se ebbe un’infanzia non facilissima e non brillò particolarmente nei primi anni di scuola, la sua vita fu piena di riconoscimenti e di onori, come mai uno scienziato avrebbe potuto aspirare prima di lui.
Comunque, il bambino aveva sviluppato un forte attaccamento alla religione, anche grazie alla figura di uno zio, un fratello di sua madre, pastore anglicano, il quale concepiva la guerra civile in termini allegorici contrapponendo la figura del re, visto come un difensore della fede, in contrasto con i parlamentari di matrice puritana. La fede risultò essere un punto fermo di grande importanza per tutta la vita del tormentato studioso, il quale si immerse, specie negli ultimi anni di vita, in approfondite analisi “scientifiche” dei testi sacri in modo da scovarvi segni da interpretare o verità nascoste. Il giovane compì comunque molto in fretta gli studi secondari e giunse nel 1661 presso il Trinity College, che già allora godeva di una grande reputazione in tutta l’Inghilterra; nello stesso anno, veniva rimesso sul trono Carlo II, anche grazie al disfavore prodotto dalle repressive leggi puritane introdotte dopo la vittoria dei parlamentari.
Il giovane dovette tuttavia abbandonare Cambridge per la famosa pestilenza del 1665 (il famoso incendio di Londra è dell’anno successivo) e, rifugiatosi in campagna, si trovò libero di meditare sulle questioni naturali e diede alla luce in questo periodo gran parte delle sue scoperte più brillanti. L’aneddoto della mela cadutagli addosso e che gli avrebbe suggerito la legge di gravitazione universale è apocrifo, ma quello che è certo è che in questo periodo egli si stava

interessando al moto di caduta dei corpi ed iniziò a considerare il moto di rivoluzione della luna intorno alla terra come caso limite di un vero e proprio moto di caduta.
Newton entrò ben presto nel corpo docente dell'università di Cambridge ed ebbe una carriera a dir poco fulminante e, come vedremo, ciascuna delle numerose scoperte che fece sarebbe bastata da sola ad assicurargli un posto di rilievo nella storia della scienza. In particolare, nel 1672 il fisico neppure trentenne venne nominato membro della Royal Society di Londra dal re Carlo II e questa era un'onorificenza grandissima, ma la negativa impressione dovuta in massima parte alle critiche di Robert Hooke che suscitarono le teorie relative all'ottica che egli propose turbarono il già difficile carattere di Newton ed egli rassegnò ben presto le proprie dimissioni; si ripropose inoltre di non pubblicare più le proprie ricerche.
In questo periodo tuttavia, si riconciliò finalmente con la madre la quale morì dopo poco tempo.
Intanto, egli divenne un importante professore universitario a Cambridge ed in questi anni egli sviluppò e mise in forma sistematica i fondamentali risultati conseguiti nella giovinezza, da 23 a 25 anni, ma non pubblicò nulla, anche se considerava tempo sprecato qualunque attività che non fosse collegata agli studi che svolgeva negandosi il sonno e dimenticandosi a volte perfino di mangiare. Pare che egli fosse la classica immagine di professore distratto: impegnato nelle sue congetture egli era praticamente inetto ad affrontare qualunque problema pratico riguardante la sua casa o la sua stessa esistenza. In [Gamow] è riportato un curioso aneddoto a lui riferito, ossia che egli praticò un foro nella porta di casa per permettere alla sua gatta di entrare ed uscire a suo piacimento; quando la gatta ebbe dei gattini praticò nella porta ulteriori fori in numero pari a quello dei gattini…
Comunque sia, giunto intorno all'età di 50 anni, nel 1689 egli divenne dapprima deputato nella rappresentanza dell'Università di Cambridge, poi nel 1696 divenne ispettore e successivamente direttore generale della Zecca e si trasferì in veste di alto funzionario a Londra, ove diventò sir nel 1705 e divenne sempre più ricco e coperto di onori; non compì più scoperte fondamentali, ma fu responsabile della condanna al patibolo un buon numero di falsari…
Egli morì il 20 marzo 1727 ed il suo funerale, a cui assistette pure un incredulo Voltaire, si svolse in pompa magna ed Isaac Newton fu inumato nella cattedrale di Westminster accanto alle salme dei grandi d'Inghilterra.

5.2. Il problema delle tangenti

Si tratta di calcolare la retta tangente in un punto ad una curva assegnata (in blu). L'idea è quella di approssimare tale retta costruendo un insieme di rette (di cui sono rappresentati dei segmenti in rosso), le quali sono le secanti alla curva in intervalli sempre più piccoli. Per ricollegarsi con l'esempio del testo, si pensi alla curva come allo spazio percorso da un'automobile rispetto al tempo; il coefficiente angolare della retta tangente esprime dunque la velocità istantanea nel punto di tangenza.



L'operazione che insomma effettuiamo è quella di valutare una velocità media su intervallini sempre più piccoli, fino a farne svanire l'ampiezza ed avere un dato puntuale, ossia una funzione che descrive in ogni punto la velocità questa volta istantanea dell'autovettura. In termini matematici moderni si costruisce un'impalcatura rigorosa a quest'idea intuitiva che costituisce in sostanza il fondamentale concetto di limite. Con una notazione attuale, si scrive:

$$v(t) = \lim_{t_0 \to 0} \frac{s(t+t_0) - s(t)}{t_0}$$

Questa formula vuole dire che la velocità istantanea al tempo t di un punto materiale in un determinato sistema di riferimento è il limite per l'intervallo di tempo t_0 che tende a zero dello spazio percorso nell'intervallo t_0 diviso per lo spazio impiegato a percorrerlo, ossia proprio t_0. Se eliminiamo il simboletto di limite e fissiamo t_0 pari ad una quantità finita positiva non nulla otteniamo proprio la definizione di velocità media sull'intervallo t_0.
Come si vede, per dare una definizione anche intuitiva di velocità ci troviamo a doverci giostrare con quantità molto piccole, più piccole di qualunque cosa si possa pensare, ma NON nulle… Ecco che ci troviamo a guardare in faccia all'infinito, ma cosa viene fuori dalla nostra formuletta? Dividiamo due quantità sempre più piccole, chi ci dice che il risultato non possa essere nullo, infinito od addirittura non venga fuori proprio nulla? L'aver scritto una formuletta con un passaggio intuitivo ragionevolissimo non ci dà alcuna informazione sulla natura del risultato.
La grande, enorme, fondamentale scoperta di Newton è stata che oggetti come questi si possono trattare in maniera abbastanza semplice con un insieme di regole che egli riuscì a scovare… In particolare, questo tipo di problemi era riconducibile al problema di trovare la tangente ad una curva assegnata.
Tali metodi furono da lui scovati proprio nel periodo di 18 mesi in cui dovette rifugiarsi in campagna per sfuggire alla pestilenza del 1665 e furono da lui chiamate "metodo delle flussioni", anche se in termini moderni vanno sotto il nome di calcolo differenziale e la velocità istantanea viene detta derivata della legge oraria dello spazio rispetto al tempo. Ma egli affrontò pure il secondo grande problema del calcolo differenziale: quello che abbiamo fatto prima è stato quello di passare dallo spazio alla velocità prendendo il limite di un rapporto, possiamo pensare di effettuare l'operazione inversa e di ricavare invece lo spazio conoscendo l'evoluzione temporale della velocità istantanea; questo è un problema molto più difficile, che va sotto il nome di calcolo integrale e, se non in casi particolari, non è affatto facile "scrivere" la funzione risultante, anche se è possibile provarne l'esistenza. Il problema del calcolo integrale è strettamente collegato a quello di ricavare l'area sottesa da una curva assegnata.
Naturalmente, i metodi introdotti da Newton non erano rigorosissimi e le sue idee (e quelle di Leibnitz) furono messe in un contesto organico da uno sforzo congiunto di molti matematici del XVIII e XIX secolo. Fondamentali, anche in connessione con gli sviluppi del calcolo infinitesimale, furono i suoi studi sulle serie infinite, ossia su somme di infiniti termini i quali diventano via via sempre più piccoli e la sua scoperta della formula dello sviluppo di un binomio.
Una esposizione dei metodi infinitesimali newtoniani fu pubblicata nel Methodus fluxionum et serierum infinitorum, edito postumo in latino nel 1742 e basato sugli inediti accuratamente preparati dallo scienziato. La fondamentale importanza dell'analisi matematica da lui ideata consiste tuttora nella possibilità di rappresentare fenomeni complessi su scala infinitesimale, con il risultato di avere delle formule relativamente semplici le quali coinvolgono delle quantità e le loro derivate. Questi oggetti matematici sono chiamati equazioni differenziali; per dare un esempio della loro importanza, si pensi che la totalità dei modelli matematici impiegati per descrivere qualunque fenomeno fisico, sia esso l'onda di pressione su di un'ala di un aereo supersonico, sia il calcolo del campo elettromagnetico all'interno di una guida d'onda, viene rappresentato con insiemi di equazioni differenziali le quali possono essere anche in numero di diverse migliaia e per i quali sono state elaborate tecniche efficienti per la risoluzione al calcolatore.
Nel 1695 Wallis riferì a Newton che in Olanda Leibnitz era considerato l'inventore di un nuovo metodo sotto certi aspetti simile a quello delle flussioni; nel 1699 Nicolas Fatio de Duillier (1664-

1753) suggerì durante una relazione presso la Royal Society la possibilità di un plagio delle idee newtoniane da parte di Leibnitz. Quest'ultimo non la prese certo molto bene e nel 1704 rivendicò a sé la priorità della pubblicazione dei metodi infinitesimali accusando a sua volta di plagio la Royal Society londinese; la faccenda degenerò abbastanza in fretta e ne nacque un'astiosa controversia fra i due scienziati ed i loro seguaci e non furono risparmiati colpi bassi, scorrettezze e calunnie. La morte di Leibnitz sopraggiunta nel 1716 pose fine alla questione e Newton ne fu in pratica il vincitore, ma essa provocò una grave frattura fra i matematici inglesi e quelli continentali che perdurò per tutto il XVIII secolo e che fece rimanere l'Inghilterra irrimediabilmente indietro rispetto alla matematica sviluppata nel resto dell'Europa. Questo fu il prezzo delle scorrettezze di Newton nella disputa e fu pagato non da lui, ma da generazioni di matematici che lo seguirono.

5.3. La flussione

Analizziamo ora un aspetto dell'idea di flussione che Newton introdusse nel suo *Tractus de quadratura curvarum* (Kline, pp. 424-426). Egli parlando delle flussione le descrive dicendo:

"Le flussioni sono, in quanto incrementi delle fluenti generati nel tempo, tanto vicine fra loro e tanto piccole quanto è possibile, e, per parlare accuratamente, esse sono nel primo rapporto degli incrementi nascenti; tuttavia, possono essere espresse da linee qualsiasi che siano loro proporzionali" (Kline p. 424)

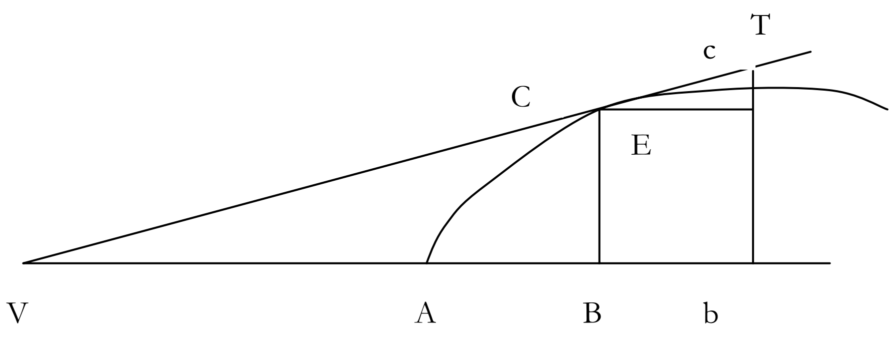
Il nuovo concetto di Newton, il metodo delle prime e ultime ragioni, equivale a ciò. Egli considera la funzione $y = x^n$ e per trovare la flussione di y o di x^n suppone che x "fluendo" diventi $x + o$. Allora, x^n diventa

$$(x + o)^n = x^n + nox^{n-1} + \frac{n^2-n}{2} o^2x^{n-2} + \dots$$

Gli incrementi di x e y, cioè o e $nox^{n-1} + [(n^2-n)/2]\ o^2x^{n-2} + \dots$, stanno l'uno all'altro come (dividendo entrambi per o) 1 sta a $nx^{n-1} + [(n^2-n)/2]\ ox^{n-2} + \dots$

"Supponiamo ora che gli incrementi svaniscono; allora la loro ultima proporzione sarà 1 a nx^{n-1}". (Kline, p. 425)

La flussione di x sta quindi alla flussione di x^n come 1 sta a nx^{n-1}, o, come diremmo noi oggi, il tasso di variazione di y rispetto a x è uguale a nx^{n-1}. Questo è il primo rapporto degli incrementi nascenti. Naturalmente, la logica di questa versione non è migliore di quelle delle due precedenti; ciò non di meno, Newton dice che questo metodo è in armonia con la geometria degli antichi e che non è necessario introdurre le quantità infinitamente piccole.



Newton ne diede anche un'interpretazione geometrica. Se i dati sono come nella figura, supponiamo che *bc* si muova verso *BC* in modo che c venga a coincidere con *C*. Allora, il triangolo curvilineo *Cec* è "nell'ultima forma simile al triangolo *CET* e i suoi lati "evanescenti" saranno proporzionali a *CE*, *ET* e *CT*. Perciò le flussioni delle quantità *AB*, *BC* e *AC* sono, nell'ultimo rapporto dei loro incrementi evanescenti, proporzionali ai lati del triangolo *CET* o del triangolo *VBC*.

Nella *Methodus fluctionum* (Kline p. 425) Newton fece un certo numero di applicazioni delle flussioni alla derivazione delle funzioni implicite, alla ricerca delle tangenti di certe curve dei massimi e dei minimi delle funzioni della curvatura e dei punti di flesso delle curve. In connessione con la curvatura egli diede la formula corretta per il raggio di curvatura,

$$r = \frac{\left(1 + \dot{y}^2\right)^{3/2}}{\ddot{y}}$$

dove $\dot{x}$ è preso uguale ad 1. Diede anche un'espressione di questa stessa quantità in coordinate polari e incluse, infine, un breve tavola di integrali.

Newton non pubblicò i suoi lavori fondamentali sul calcolo infinitesimale fino a molto tempo dopo averli scritti. La prima esposizione stampata della sua teoria delle flussioni comparve nell'Algebra di Wallis, di cui Newton scrisse le pagine 390-396. Se li avesse pubblicati subito, avrebbe potuto evitare la controversia con Leibniz sulla priorità della scoperta. La prima pubblicazione di Newton in cui si fa uso del calcolo infinitesimale sono i grandi *Principia Matematica*. Per quel che concerne la nozione di base del calcolo infinitesimale, la flussione o come diciamo noi, la derivata, Newton fa numorose affermazioni. Egli respinge le quantità infinitesime o indivisibili in favore delle "quantità evanescenti divisibili" quantità che possono essere diminuite senza fine. Nella prima e nella terza edizione dei Principia Newton dice:

> "*Le ultime ragioni in cui le quantità si annullano non sono, a rigore rapporti di quantità ultime, ma limiti a cui rapporti di queste quantità, diminuendo senza limite, si avvicinano e che, anche se possono giungervi più vicino di qualsiasi differenza data, non possono mai né oltrepassare né raggiungere prima che le quantità sono diminuite indefinitivamente*". (Kline p. 425)

5.4. L'invenzione del calcolo infinitesimale

Il contesto culturale matematico del seicento presentava già prima di Newton alcune novità, le quali costituivano un sostanziale passo in avanti rispetto ai mezzi di cui disponeva Galileo; di notevolissima importanza era il lavoro di René Descartes (1596-1650) il quale costituiva un solido ponte fra l'algebra e la geometria, le quali erano prima di lui considerate argomenti della matematica completamente separati e permetteva di trattare con metodi algebrici problemi geometrici e viceversa. Risultati di grande importanza furono quelli ottenuti da John Wallis (1616-1703), il quale, nel suo Arithmetica infinitorum introduceva il concetto di serie infinite; una serie è una somma estesa all'infinito di termini i quali tendono a diventare sempre più piccoli: il punto è che la somma di tali termini può sorprendentemente essere finita.

Fin dall'antica Grecia, il concetto di infinito ha meravigliato ed affascinato la mente umana, dimostrando però che la strada che vi giunge è irta di difficoltà e contraddizioni; un esempio di ciò sono i celeberrimi paradossi del moto di Zenone, in particolare quello di Achille e della tartaruga. La situazione è più o meno questa: Achille è dieci volte più veloce della tartaruga, ma parte dieci metri prima di essa; quando Achille riuscirà a superare la tartaruga? Il fatto è che quando Achille avrà percorso dieci metri, la tartaruga ne avrà percorso uno; quando Achille avrà recuperato quel metro, la tartaruga sarà innanzi a lui di dieci centimetri; quando Achille avrà percorso quei dieci centimetri, la tartaruga sarà andata avanti di un centimetro e così via… Il fatto è che la tartaruga rimane comunque sia davanti ad Achille.

Ovviamente, c'è qualcosa che non quadra in tutto il ragionamento, dato che non dubitiamo che prima o poi la tartaruga venga effettivamente superata dal Piè Veloce; ma cosa? Il pensiero greco non fu in grado di comprenderlo.
Eppure l'infinitamente piccolo e l'infinitamente grande compaiono più spesso di quanto si immagini sotto mentite spoglie per poi presentare tutta la loro difficoltà a chi tenti di investigare con maggiore accuratezza sui fenomeni che ci capitano attorno. Prendiamo per esempio il concetto di velocità: essa viene convenzionalmente definita come uno spazio diviso per il tempo impiegato a percorrerlo; se ci pensiamo un attimo, ci accorgiamo che quello che otteniamo è in realtà una media di quello che è il nostro concetto intuitivo di velocità, intesa come un qualcosa caratterizzante il moto di un punto materiale in ciascun istante. Se dividiamo uno spazio 100Km per il tempo impiegato da un'autovettura per percorrerlo (poniamo 1 ora) otteniamo la velocità media dell'autovettura nella tratta percorsa, un dato che non ci dice se essa lo abbia percorso effettivamente ad una velocità costante di 100Km/h, oppure se essa si sia dovuta fermare ad un semaforo, affrontare delle curve, oppure pagare un casello autostradale ed abbia potuto recuperare il tempo perduto nelle soste con una maggiore velocità di punta nel tragitto. Per migliorare la nostra conoscenza del "come" la nostra automobile abbia percorso i 100Km, possiamo pensare di dividere tale intervallo di spazio in due, e fare due misurazioni temporali, in modo da avere due dati di velocità media, che ci danno maggiore informazione. Se non ci bastano due numeretti, possiamo ancora dividere ulteriormente gli intervalli per ottenere 4 velocità medie, 8 velocità medie e così via…

6. A.L. Cauchy

6.1. La vita e le opere

A.L.Cauchy nacque a Parigi il 21 Agosto 1789,morì a *Sceaux* (Seine) il 23 Maggio 1857.Visse alcuni anni ad Arcueil dove la famiglia si era ritirata per sfuggire la rivoluzione. Ristabilita la calma sotto il consolato del Bonaparte, il padre Luigi fu nominato archivista al senato e il figlio seguì a Parigi gli studi classici *l'école polytechnique* e *l'école des ponts-et-chaussées*, riportando dovunque successi brillanti. Conseguì nel 1809 il grado d'ingegnere e l'anno seguente ebbe un posto ai lavori del porto di *Cherbourg*. Con l'ardore e lo zelo che portava in ogni compito, Cauchy si fece subito apprezzare per le qualità tecniche. Ma il suo interesse più vivo si volgeva alla scienza, che coltivava nelle ore tolte al riposo. A questa sacrificò nel 1813 il posto di *Cherbourg* per ritornare a Parigi. Alcuni lavori sui poliedri, sulla teoria delle sostituzioni, sugli integrali doppi, e una memoria, premiata *dall'Académie des sciences,* sulla teoria delle onde, richiamarono ben presto l'attenzione dei competenti sul giovane matematico.
Dopo la restaurazione, nel 1816,Cauchy fu nominato, con ordinanza regia, membro per la sezione di meccanica *dell'Accadémie des sciences* in uno dei due posti resi vacanti in seguito alla rimozione di uomini quali Carnot e G.Monge. Di avere accettato la nomina in queste condizioni eccezionali, mentre la fama raggiunta gli avrebbe assicurato un'elezione trionfale da parte dei colleghi,fu mosso aspro rimprovero a Cauchy; egli, legittimista fervente,ubbidì alla volontà del suo re.Nella stessa epoca fu chiamato a insegnare *all'école Politechnique*,alla Sorbona,e al *Collége de France*.
Deposta la casa di Borbone, in seguito alla rivoluzione del 1830,egli rifiutò di prestar giuramento al nuovo regime; fu rimosso dalla cattedra e abbandonò volontariamente la patria, riparando a Friburgo in Svizzera. Lo raggiunse colà nel 1831 l'invito di Re Carlo Alberto di recarsi a Torino a coprire la cattedra di fisica sublime, che, istituita nel 1820 per Avogadro, questi aveva dovuto lasciare in seguito ai moti del 1821.Cauchi accettò l'invito e, valendosi della sua profonda cultura classica, offrì di far lezione in latino; ma la proposta non riuscendo gradita agli allievi, svolse l'insegnamento in italiano. In gran parte per suo merito l'università e l'Accademia delle scienze di Torino (che pubblicò alcune delle più belle memorie) riacquistarono quel fulgore che avevano avuto durante il soggiorno di La Grange. Per breve tempo tuttavia, perchè gli fu offerto dal re Carlo X, in esilio a Praga, l'incarico di provvedere all'educazione del duca di Bordeaux, presunto

erede del trono di Francia. Fedele ai suoi sentimenti borbonici, Cauchy non esitò a lasciare la residenza di Torino, ove poteva dedicarsi interamente alla scienza, per assumere il nuovo delicato ufficio che doveva assorbire buona parte del suo tempo.
Nel 1838 ritornò a Parigi. Gli furono offerti insegnamenti ed incarichi, tra i quali un posto nel Bureau *des longitudes*, che i colleghi unanimi volevano affidargli; ma la sua riluttanza a prestare il giuramento richiesto lo tenne lontano da ogni ufficio pubblico. Frequentava solo l'Academie des sciences, ove ogni settimana portava qualche comunicazione. La Repubblica del 1848 abolì il giuramento, che fu ristabilito da Napoleone III. L'Imperatore volle tuttavia fare un'eccezione dispensando da quest'obbligo due uomini eminenti: Cauchy e Arago. Cauchy potè così riprendere alla facoltà di scienze l'insegnamento di fisica matematica, che tenne fino alla morte.
Abbandonò serenamente la vita, tutta dedicata alla scienza, alla fede, agli affetti domestici, alle opere buone. I suoi rigidi sentimenti religiosi e politici, in contrasto con le idee dominanti in quell'epoca, gli alienarono molte simpatie; tutti però furono concordi nell'apprezzare, oltre all'altezza dell'ingegno, la rettitudine del suo carattere, la nobiltà e la purezza del suo animo mite.
La sua opera è copiosa (quasi ottocento scritti, oltre a sette volumi di lezioni ed esercizi) e molto vasta, estendendosi a tutti i rami di matematiche pure ed applicate. Dovunque si trovasse infatti, continuò a produrre un tal numero di libri e memorie da essere secondo soltanto a Eulero
Tra i maggiori contributi portati da Cauchy alla scienza, ha anzitutto il merito di aver stabilito il calcolo infinitesimale sopra solide basi, rinunciando alla vaga intuizione geometrica a cui troppo spesso ricorrevano i predecessori, e prendendo come punto di partenza il concetto di limite chiaramente precisato. Su questo si fondano le definizioni da lui date, e ormai classiche, di funzione continua, di integrale definito, ecc. Il *Cours d'Analise*(1821) e il *Resume des leçons donnees sur le calcul infinitesimal* (1823) sono modelli a cui si ispirarono i trattatisti successivi. Ricordato anche per lo studio sui determinanti, al Cauchy appartengono pure i fondamentali teoremi (teorema del valor medio) che assicurano, sotto condizioni opportune, l'esistenza e l'unicità della soluzione di un'equazione o di un sistema di equazioni differenziali o a derivate parziali. Cauchy ha pure il vanto incomparabile di aver aperto, con la teoria delle funzioni d'una variabile complessa, un campo di studi che dopo un secolo d'intense ricerche, è ben lungi dall'essere esaurito, e che costituisce forse il maggior contributo portato alla matematica pura dal secoloXIX. Anche nella cinematica e nella meccanica dei sistemi continui ha recato contributi essenziali. E' classico un suo teorema sul modo come si distribuiscono gli sforzi nell'intorno di un punto del sistema. A lui risalgono le equazioni oggi adottate nella teoria dell'elasticità, teoria che egli riuscì a liberare dall' ipotesi delle azioni a distanza, e che estese anche ai corpi anisotropi (cioè quei corpi che si comportano diversamente nelle varie direzioni).Nell'ottica portò vari complementi alla teoria elastica di *Fresnel* e per primo costruì una teoria della dispersione normale della luce.

6.2. Il caso-studio del concetto di derivata e continuità in Cauchy

I primi insegnanti dell'ecole Polytechnique di Parigi avevano stabilito un precedente in base al quale neppure i più grandi matematici sdegnavano di scrivere manuali di ogni livello, e anche Cauchy seguì fedelmente questa tradizione. In tre libri - *Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique* (1821), *Rèsumè des lecons sur le calcul diffèrentiel (1823) e Lècons sur le calcul différential* (1829) - egli diede l'esposizione elementare del calcolo infinitesimale la veste e il carattere che ha ancor oggi. Rifiutando il metodo di Lagrange basato sul teorema di Taylor, Cauchy assunse come fondamentale il concetto di limite di d'Alembert, Ma gli conferì una veste aritmetica dotata di maggiore precisione. Rinunciando a ogni ricorso alla geometria e a infinitesimi o a velocità, formulò una definizione relativamente precisa di limite:

"*Quando i valori successivi attribuiti a una variabile si avvicinano indefinitamente a un valore fissato così che finiscono con il differire da questo per una differenza piccola quanto si vuole, quest' ultimo viene detto il limite di tutti gli altri". (Boyer, p. 595)*

Mentre molti altri matematici precedenti avevano concepito un infinitesimo come un numero fisso molto piccolo, Cauchy lo definì chiaramente come una variabile dipendente:

> "*Si dice che una quantità variabile diventa infinitamente piccola quando il suo valore numerico decresce indefinitamente in maniera da convergere verso il limite zero". (Boyer, p. 595)*

Nell'assetto dato da Cauchy al calcolo infinitesimale erano fondamentali i concetti di funzione e di limite di una funzione. Nel definire la derivata $y = f(x)$ rispetto *a* x, egli assegnava alla variabile un x incremento $\Delta x = i$ e formava il rapporto

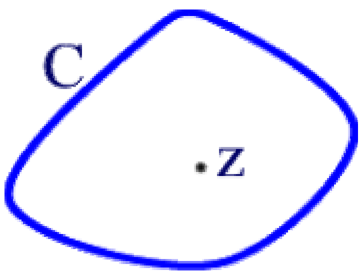
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

Il limite di questo rapporto quando i tende a zero veniva da lui definito come la derivata $f'(x)$ di y rispetto a x. Il differenziale veniva da lui relegato a un ruolo sussidiario, anche se era consapevole della sua facilità operativa. Se dx è una quantità finita, il differenziale dy di y= $f(x)$ è definito semplicemente come $f'(x)dx$. Cauchy dava anche una definizione soddisfacente di funzione continua. La funzione $f(x)$ è continua entro limiti fissati, se nell'intervallo compreso tra questi limiti un incremento infinitamente piccolo i della variabile x produce sempre un incrementi infinitamente piccolo $f(x+i) - f(x)$ della funzione stessa. Se teniamo presente la definizione di Cauchy di quantità infinitamente piccole in termini di limite, la sua definizione di continuità corrisponde a quella moderna.

Per tutto il XVIII secolo il concetto di integrazione era stato trattato come l'inverso del concetto di differenziazione. La definizione di derivata di Cauchy fa vedere chiaramente che non esisterà nessuna derivata in un punto per il quale la funzione è discontinua.; l'integrale, invece, non presenta nessuna difficoltà. Anche curve discontinue possono determinate un'area ben definita. Pertanto Cauchy definiva l'integrale definito come limite di una somma in maniera non molto diversa da quella usata negli odierna manuali di analisi, con la sola eccezione del fatto che egli prendeva il valore della funzione sempre all'estremità sinistra dell'intervallo. Se $Sn=(x_1-x_0)f(x_0)+(x_2-x_1)f(x_1).+ (X- x_{n-1})f(x_{n-1})$, il limite S di questa somma Sn, quando la larghezza degli intervalli x_i-x_{i-1} decresce indefinitamente, è l'integrale definito della funzione $f(x)$ nell'intervallo che va da $x=x_0$ *a* $x=X$. E' dalla definizione di Cauchy di integrale come limite di un a somma e non dal concetto di integrale come l'inverso della derivata o l'antiderivata, che sono scaturite le molteplici, feconde, generalizzazione dell'analisi moderna (Boyer pp.595-597).

7. Formula Integrale di Cauchy

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot i}\cdot\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta}$$



Si tratta di una formula dell'Analisi Complessa, ove vengono prese in considerazione quelle funzioni f(z) che prendono e forniscono numeri complessi anziché reali. L'uguaglianza vale per tutta una classe di funzioni, che sono dette funzioni olomorfe all'interno di C, ove C è un cerchio o una qualsiasi regione delimitata da una curva chiusa.

La peculiarità che rende unica e "bella" questa formula, è che consente di determinare il valore della funzione in ciascun punto all'interno della curva C, conoscendo solamente i valori che la funzione assume nei punti della curva!
Il simbolo di integrale su C rappresenta appunto la somma di tutti i contributi dei punti sulla curva (la zeta greca è la variabile che "gira" sulla curva attorno alla z nella quale si vuole calcolare il valore della funzione), e tanto per aggiustare le cose ecco comparire anche i coefficienti pi e i, rispettivamente pi greco e radice di -1.
Esiste anche un'estensione della formula che grazie alle serie di potenze, permette di descrivere, sempre e solo grazie ai valori che la f assume sulla curva chiusa C, proprio tutto il comportamento della funzione nella regione delimitata da C, ovvero tutte le derivate della funzione in ogni singolo punto. Cosa si può volere di più?

8. BIBLIOGRAFIA:

FONTI PER LA STORIA DELLA MATEMATICA Aritmetica-Geometria-Algebra-Analisi infinitesimale-Calcolo delle probabilità-logica e fondamenti.
U.Bottazzini, P.Freguglia, L.Toti Rigatelli.
Sansoni Editore.

STORIA DEL PENSIERO MATEMATICO (*volume primo) Dall'antichità al Settecento.* Morris Kline - Biblioteca Einaudi.

STORIA DELLA MATEMATICA *Introduzione di Lucio Lombardo Radice.*
Carl B. Boyer - Oscar Mondadori 1990

APPUNTI DI STORIA DELL'ANALISI INFINITESIMALE, volume II-parte prima - Dupont, P., Cortina, Torino 1981.

ANALISI DI MATEMATICA I - Giusti E Bollati Boringhieri.

CHE COS'È LA MATEMATICA? - R. Courant, H. Robbins, Universale Bollati Boringhieri, settembre 2002.