Le origini del calcolo differenziale: i contributi di Fermat, Newton e Leibniz

A cura di:

Maria Novella Carrozzoni

Katia Comandi

Paolo Gragnoli

Elena Perrone

SSIS – A. A. 2004/05

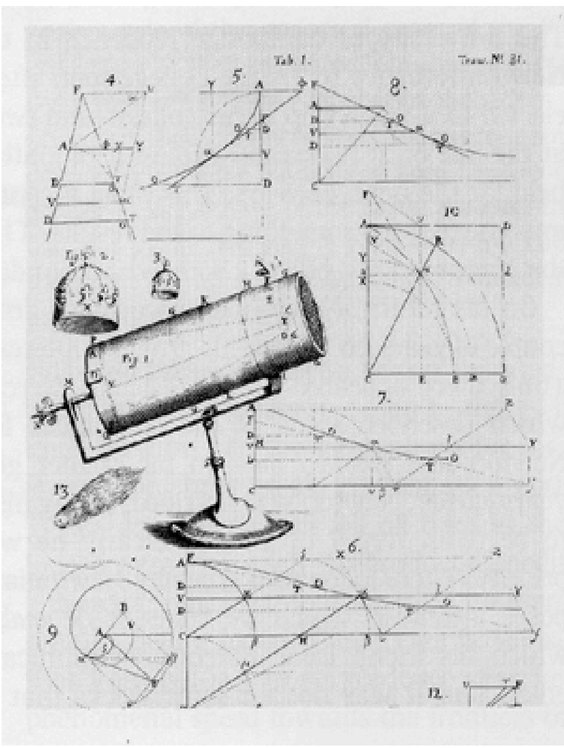
LE ORIGINI DEL CALCOLO DIFFERENZIALE: I CONTRIBUTI D FERMAT, NEWTON E LEIBNIZ

Il calcolo differenziale nasce e si sviluppa nel corso di tutto il XXVII secolo, epoca di grande rivoluzione culturale, durante la quale si affrontarono problemi scientifici di grande rilievo.

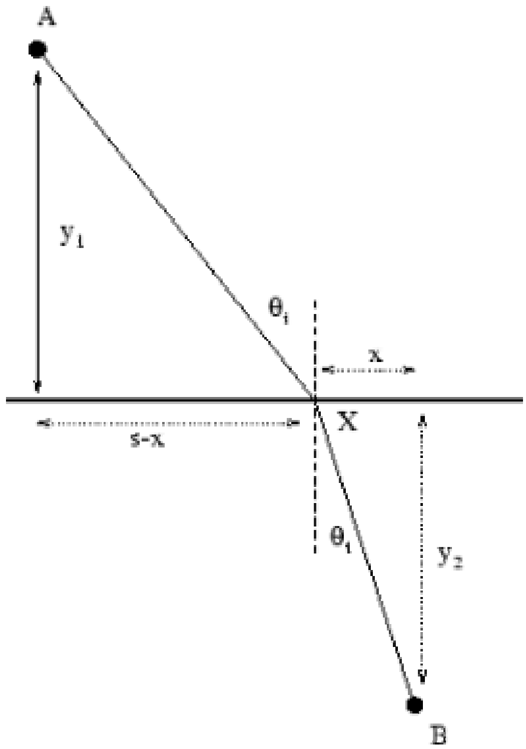
L'interesse degli studiosi del tempo si riversava in modo particolare sull'OTTICA e su tutto ciò che le concerneva: le osservazioni astronomiche, infatti, necessitavano di sistemi ottici precisi e attendibili, ottenuti dalla composizione di lenti di cui se ne conoscessero tutte le caratteristiche.

D'altronde, per studiare il passaggio della luce attraverso una lente, era necessario conoscere l'angolo secondo cui il raggio colpiva la superficie della lente, per poter poi applicare la Legge di Rifrazione.

L'angolo che interessava era quello formato dal raggio luminoso e dalla normale alla curva.

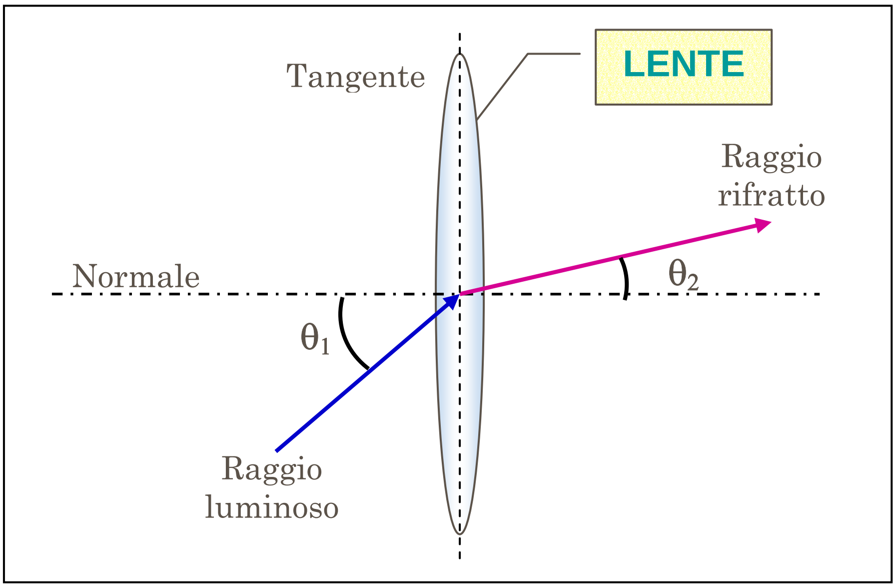


Il telescopio disegnato da Newton



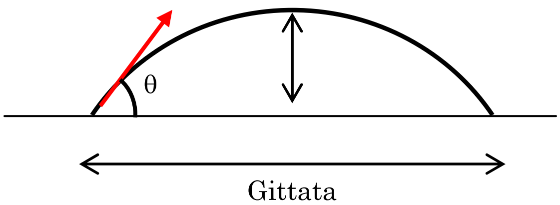
Legge di Rifrazione

Poichè la normale ad una curva si definisce attraverso la retta tangente, il problema si riconduceva alla ricerca di quest'ultima.

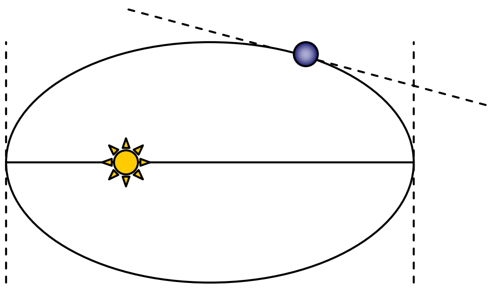


La necessità di definire la tangente ad una curva si riscontrava anche nello studio dei moti: com'è noto, la direzione del moto di un corpo coincide, in ciascun punto della sua traiettoria, con la tangente alla traiettoria nel punto.

Un ulteriore problema affrontato in questo secolo fu quello correlato alla ricerca dei MASSIMI e dei MINIMI di una funzione: in pratica, esso si traduceva nella ricerca dell'angolo che forniva la gittata massima e nel calcolo della mssima distanza assunta da un pianeta rispetto al Sole, durante il suo moto rivoluzionario.



Moto parabolico



Traiettoria della Terra intorno al Sole

A contribuire in maniera decisiva alla risoluzione di questi problemi furono: Fermat, Newton e Leibniz. Le loro ricerche, oltre a fornire le risposte ai quesiti del loro tempo, aprirono le porte ad una nuova disciplina, che richiedeva fondamenti propri, ossia il calcolo infinitesimale.

IL CONTRIBUTO DI

PIERRE de FERMAT

(1601 – 1665)

La seconda metà del XVII secolo è caratterizzata dall'introduzione da parte di Renè Descartes (1596-1650) e da Pierre de Fermat (1601-1665) dei fondamenti della geometria delle coordinate: la geometria analitica.

La possibilità di identificare le curve con equazioni del tipo $y = f(x)$ pone immediatamente di fronte ai problemi della ricerca dei massimi e minimi delle funzioni e della tangente ad una curva.

Il metodo di risoluzione di quest'ultimo problema proposto da Pierre de Fermat si riconduce ad un problema di ricerca di punti di massimo di una funzione, che può presentare delle analogie con il metodo dell'analisi standard di risoluzione attraverso lo studio della derivata prima della funzione stessa.

Il metodo di Fermat, per quanto possa quindi risultare quindi di un'eccezionale modernità, presenta delle limitazioni legate proprio alla mancanza di una formalizzazione del concetto di limite e quindi di funzione derivata: il metodo funziona solo per alcune particolari funzioni ma non è applicabile in generale.

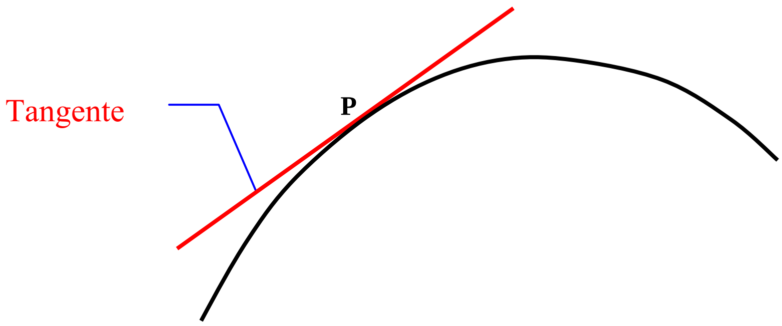
Vediamo accanto alla trattazione più generale proposta da Fermat per la ricerca delle tangenti e quindi del punto di massimo di una funzione, due casi legati a problemi di geometria piana: il primo, analizzato dallo stesso Fermat, che genera una funzione atta all'applicazione del metodo, il secondo, invece, che non trova soluzione a causa dalla mancanza di valide regole di derivazione per le funzioni composte.

Fra tutte le rette che passano per P, punto di una curva, la tangente è caratterizzata dall'essere l'unica retta che non taglia la curva, la quale risulta tutta situata dalla stessa parte rispetto a tale retta.

Nella sua trattazione Fermat non considera punti di flesso, per i quali i suoi risultati restano comunque.

Sappiamo che una retta tangente alla curva nel punto $P = (x_0, f(x_0))$ ha equazione:

$$y = f(x_0) + \alpha (x - x_0)$$



Fermat dice che "…la parte della funzione sta tutta sotto la retta…" quindi la quantità

$$f(x) - f(x_0) - \alpha\,(x - x_0)$$

è sempre negativa o, al massimo, nulla per $x = x_0$; in altri termini:

$$f(x) - f(x_0) - \alpha\,(x - x_0) \leq 0$$

che dà luogo alla disuguaglianza:

$$f(x) - \alpha\,x \leq f(x_0) - \alpha\,x_0$$

Ciò vuol dire che la funzione $f(x)-\alpha\,x$ presenta un massimo nel punto P = $(x_0, f(x_0))$ ed è proprio questa la condizione che si deve imporre per ricavare il valore di α .

Come risolve Fermat il problema dei massimi e dei minimi?

La sua idea di base è che "…nell'intorno del massimo le variazioni siano insensibili..."; in altre parole, se x_0 è il punto di massimo per $f(x)$ ed ε un numero piccolo a piacere, risulterà:

$$f(x_0) \cong f(x_0 + \varepsilon)$$

Per la trattazione, proponiamo un esempio utilizzato dallo stesso Fermat. Consideriamo una curva polinomiale, del tipo $y = x^2$, ed andiamo ad imporre la condizione soprascritta alla funzione $h(x) = f(x)$-αx. In pratica, si impone che per un certo x_0 sia

$$h(x_0) \cong h(x_0 + \varepsilon)$$

cioè:

$$(x_0 + \varepsilon)^2 - \alpha\,(x_0 + \varepsilon) \cong x_0^2 - \alpha\,x_0$$

Sviluppando e semplificando, si ottiene:

$$x_0^2 + 2\,\varepsilon\,x_0 + \varepsilon^2 - \alpha\,x_0 - \alpha\,\varepsilon \cong x_0^2 - \alpha\,x_0$$

ossia:

$$2\,\varepsilon\,x_0 + \varepsilon^2 - \alpha\,\varepsilon \cong 0$$

Dopodichè, possiamo dividere tutto per ε, ottenendo:

$$2x_0 + \varepsilon - \alpha \cong 0$$

Dice Fermat "…questa relazione è tanto più vera quanto più piccolo è ε; essa sarà vera esattamente per ε=0." Imponendo tale condizione, si ottiene:

$$\alpha = 2x_0$$

che in termini moderni risulta essere la derivata di $f(x) = x^2$ nel punto x_0, cioè $f\,'(x_0) = 2x_0$.

Considerazioni

Se torniamo ad esaminare i passaggi compiuti si ha:

1) $h(x_0 + \varepsilon) - h(x_0) \cong 0$

2) $\dfrac{h(x_0 + \varepsilon) - h(x_0)}{\varepsilon} \cong 0$

3) $\left.\dfrac{h(x_0 + \varepsilon) - h(x_0)}{\varepsilon} \cong 0\right|_{\varepsilon=0}$

che corrispondono ai passaggi dell'operazione $h'(x_0) = 0$.

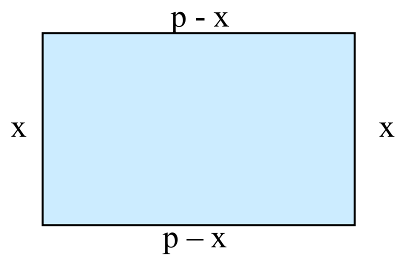
Fermat ha dunque inventato la derivata? Dove si riscontra il limite della sua trattazione?

Nel procedimento, Fermat divide per ε e poi pone ε = 0, mentre noi oggi facciamo il limite per $\varepsilon \to 0$, giungendo alla derivata. Si potrebbe affermare che i due processi si equivalgono, dal momento che f è un polinomio e che dunque effettuare il limite per $\varepsilon \to 0$ equivale a porre ε = 0.

I problemi sorgono quando f non è un polinomio.

Per la sua trattazione, Fermat aveva scelto un problema di geometria piana da cui ottenne un'espressione polinomiale; tuttavia, con un problema simile giunse ad un'espressione non polinomiale, con elementi irrazionali e per la quale il metodo risultava inadatto e non garantiva una risoluzione dal punto di vista algebrico.

Fermat risolve il problema di massimo: ***"Tra tutti i rettangoli di perimetro assegnato 2p, quello di area massima risulta essere un quadrato"***



L'area sarà data dell'espressione:

$$A(x) = x(p - x)$$

Con il metodo di Fermat possiamo scrivere:

$$A(x + \varepsilon) \cong A(x)$$

Cioè:

$$(x + \varepsilon)(p - x - \varepsilon) \cong x(p - x)$$

Da cui risovendo i calcoli si ottiene:

$$-2\varepsilon x + \varepsilon p - \varepsilon^2 \cong 0$$

Dividendo per ε:

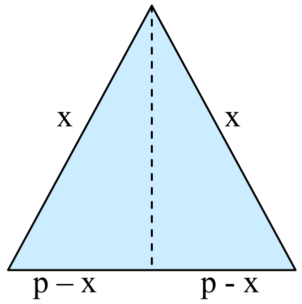
$$-2x + p - \varepsilon \cong 0$$

e posto $\varepsilon = 0$

$$-2x + p = 0$$

cioè x = p/2 che corrisponde al valore del lato per cui il rettangolo risulta un quadrato.

Un altro problema di massimo è: ***"Tra tutti i triangoli isosceli di perimetro assegnato 2p quello che risulta di area massima è il triangolo equilatero"***



(La soluzione al problema è x = 2p/3).

Tramite il Teorema di Pitagora si ottiene l'altezza h:

$$h = \sqrt{x^2 - (x - p)^2} = \sqrt{2px - p^2}$$

L'area sarà data da:

$$A(x) = (p - x)\sqrt{2px - p^2}$$

Imponendo la condizione di Fermat

$$A(x + \varepsilon) \cong A(x)$$

si ottiene qualcosa del tipo:

$$(p - x - \varepsilon)\sqrt{2p(x + \varepsilon) - p^2} \cong (p - x)\sqrt{2px - p^2}$$

Nel secondo caso non è possibile dividere per ε porre poi ε = 0, a meno che non si provi ad elevare al quadrato, ottenendo:

$$(p - x - \varepsilon)^2[2p(x + \varepsilon) - p^2] \cong (p - x)^2(2px - p^2).$$

Sviluppando tutti i prodotti, si arriva ad un'equazione che permette di calcolare la soluzione; tuttavia i passaggi sono molteplici. In pratica, si arriva a qualcosa del tipo:

$$2p^3x + 2px^3 + 2\varepsilon^2px - 4p^2x + 4\varepsilon px^2 + 2\varepsilon p^3 + 2\varepsilon px^2 + 2\varepsilon^3p - 4\varepsilon p^2x - 4\varepsilon^2p^2 + 4\varepsilon^2px -$$
$$p^4 - p^2x^2 - p^2\varepsilon^2 + 2p^3x + 2\varepsilon p^3 - 2\varepsilon p^2x \cong 2p^3x - 4p^2x^2 + 2px^3 - p^4 + 2p^3x - p^2x^2$$

da cui, semplificando e riordinando:

$$6\varepsilon^2px - 10\varepsilon p^2x + 6\varepsilon px^2 + 4\varepsilon p^3 + 2\varepsilon^3p - 5\varepsilon^2p^2 \cong 0$$

Dividendo nuovamente per ε :

$$6\varepsilon px - 10p^2x + 6px^2 + 4p^3 + 2\varepsilon^2p - 5\varepsilon p^2 \cong 0$$

e ponendo ε = 0, si ottiene l'equazione che fornisce la soluzione cercata:

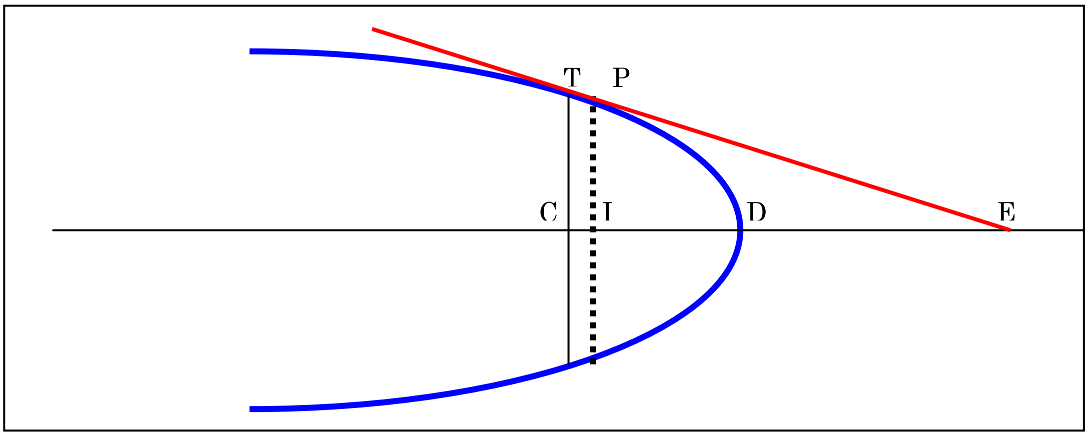
$$3x^2 - 5px + 2p^2 = 0$$

Le soluzioni sono x_1 = p, che ovviamente non è accettabile, e x_2 = 2p/3, che è invece la soluzione al problema.

Il metodo di Fermat presenta una difficoltà a livello di calcolo algebrico rilevante; inoltre, esso non garantisce il raggiungimento della soluzione del problema affrontato.
Ciò era anche dovuto al fatto che ancora non si erano sviluppate regole di derivazione precise, la scoperta e organizzazione delle quali spetta a Leibniz e Newton.

Il metodo scoperto permise a Fermat di determinare la tangente di una curva algebrica: alla base del suo ragionamento c'era la grande intuizione che la differenza tra una curva e la sua tangente, nel punto di tangenza, presentava un minimo (o un massimo).

Nel descrivere del suo metodo, Fermat considera una parabola di vertice D e diametro DC.



Per trovare la tangente in T alla parabola, determina il valore della sottotangente, coincidente con il segmento $\overline{CE}$.

Sulla tangente, individua un punto P e il corrispondente punto I sul diametro. Per le proprietà della parabola, supponendo che il punto P sia così vicino a T da giacere sia sulla tangente che sulla parabola, risulta:

$$\overline{CD} : \overline{ID} = \overline{TC}^2 : \overline{PI}^2$$

Per la similitudine dei triangoli TCE e PIE, inoltre, si ha:

$$\overline{CD} : \overline{ID} = \overline{CE}^2 : \overline{IE}^2$$

Indicando con **D** la quantità data $\overline{CD}$, con **A** la quantità incognita $\overline{CE}$ e con **E** la "variazione" $\overline{CI}$, si ha:

$$\mathbf{D : (D - E) = A^2 : (A - E)^2}\ .$$

A questo punto Fermat prosegue come già descritto nel metodo dei massimi e dei minimi:

1. Uguaglia i due termini della disequazione e la svolge e semplifica eliminando i termini uguali a destra e a sinistra.
2. Divide tutto per E.
3. Elimina tutti i termini dove figura E.

In questo modo perviene all'equazione:

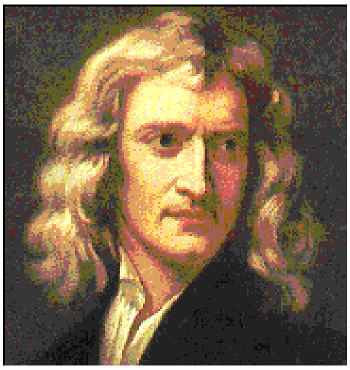
$$\mathbf{A^2 = 2AD \Rightarrow A = 2D}$$

$$\text{cioè} \quad \overline{CE} = 2\overline{CD}\ .$$

Pertanto, affinchè la retta risulti essere tangente alla parabola nel punto T, la sottotangente $\overline{CE}$ dovrà necessariamente essere uguale a $2\overline{CD}$, cioè al doppio del diametro della parabola data.

Purtroppo Fermat non diede una spiegazione soddisfacente del suo metodo: si limitò solo ad affermare che era simile a quello applicato per i massimi ed i minimi.

I primi dissensi alle sue affermazioni giunsero da Descartes, che lo accusò di aver costruito un metodo privo di validità generale ma che ben presto dovette ricredersi e, a malincuore, confermare la validità del metodo di Fermat.



IL CONTRIBUTO DI
ISAAC NEWTON

(1641-1727)

Una delle menti più geniali del XVII secolo fu, senza dubbio, quella dell'inglese Isaac NEWTON; egli fu in grado di individuare le idee più valide nella gran massa di dichiarazioni fatte dai suoi predecessori e di svilupparle a tal punto da ottenere incredibili risultati nel campo della ricerca scientifica del '600.

Spinto ed incoraggiato da grandi personaggi come il suo professore Barrow e l'astronomo Halley, Newton si dedicò dapprima allo studio delle serie infinite, scoprendo che la loro algebra era regolata dalle stesse leggi generali dell'algebra che operava con quantità finite.

Newton redasse e pubblicò un gran numero di esposizioni della sua analisi infinita.

La prima esposizione sistematica del calcolo infinitesimale è contenuta nel *De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas*, composto nel 1669 sulla base di idee maturate nel 1666, ma pubblicato soltanto nel 1711. Nel 1666 Newton non aveva ancora elaborato la sua teoria delle "flussioni", sebbene avesse già formulato un metodo sistematico di differenziazione non molto diverso da quello pubblicato da Barrow nel 1670.

La prima forma newtoniana del calcolo infinitesimale ricalca il *Metodo delle Tangenti* di Barrow, molto simile a quello di Fermat salvo l'uso di due quantità, *po* e *qo*, che equivalgono alle moderne Δx e Δy, invece dell'unica lettera E. Newton stesso riconobbe che l' algoritmo descritto altro non era che un perfezionamento di quello di Fermat.

Newton considerava *o* come un intervallo di tempo molto breve ed *op* ed *oq* come i piccoli incrementi per i quali *x* ed *y* variavano in tale intervallo.

Egli diede una seconda più estesa esposizione delle sue idee nell'opera *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum*, scritta nel 1671 ma pubblicato solo nel 1736. In quest'opera considera le sue variabili come generate dal moto continuo di punti, rette e piani, piuttosto che come aggregati di elementi infinitesimi, come nella monografia precedente. Chiama ora *fluente* una quantità variabile e *flussione* il suo tasso di variazione, o velocità, ed adopera le notazioni $\dot{x}$ ed $\dot{y}$ per le flussioni delle fluenti *x* e *y*. Il ruolo della derivata è assunto dalla flussione di una quantità fluente y, indicata inizialmente con *p* e poi con $\dot{y}$, mentre al differenziale *dy* corrisponde il momento $\dot{y}o$, prodotto della velocità per l'intervallo infinitesimo di tempo *o*. In questa seconda opera, Newton enuncia, in modo un po' più chiaro il problema fondamentale del calcolo infinitesimale:

> *"Data una relazione tra quantità fluenti, trovare la relazione tra le loro flussioni, e viceversa".*

Le due variabili di cui è data la relazione possono rappresentare quantità qualsiasi. Tuttavia, Newton pensa ad esse come variabili con il tempo. Se quindi *o* è un "intervallo infinitamente piccolo di tempo", allora $\dot{x}o$ e $\dot{y}o$ sono gli incrementi infinitesimi di *x* e di *y*, o i rispettivi momenti.

Per trovare la relazione fra $\dot{x}$ e $\dot{y}$, supponiamo, ad esempio, che la fluente sia $y = x^n$. Newton scrive anzitutto:

$$y + \dot{y}o = (x + \dot{x}o)^n$$

Sviluppa il secondo membro con la potenza ennesima del binomio, sottrae $y = x^n$, divide tutto per *o*, trascura tutti i termini che contengono ancora *o* e ottiene:

$$\dot{y} = nx^{n-1}\dot{x}$$

che, in notazione moderna, può riscriversi nella forma seguente:

$$\frac{dy}{dx} = nm^{n-1}\frac{dx}{dt}$$

Poiché

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Newton, trovando il rapporto fra $\frac{dy}{dt}$ e $\frac{dx}{dt}$ ha anche trovato $\frac{dy}{dx}$.

Il metodo delle flussioni non è essenzialmente diverso da quello usato nel *De Analysi* né il suo rigore è migliore; $\dot{x}$ e $\dot{y}$, che sono le flussioni o derivate rispetto al tempo di *x* e di *y*, non vengono mai definite veramente.

Newton elimina termini quali $\dot{x}\dot{x}o$ e $\dot{x}\dot{x}o\dot{x}o$ (che scrive come $\dot{x}^3o$) sulla base del fatto che sono infinitamente piccoli rispetto a quelli conservati. Tuttavia il punto di vista nella seconda opera è leggermente diverso. I momenti $\dot{x}o$ e $\dot{y}o$ sebbene siano ancora una specie di quantità infinitamente piccole, variano con il tempo o, mentre nel primo lavoro i momenti erano particelle elementari fisse di x e di y.

Nella terza esposizione del calcolo infinitesimale redatta nel 1676 con il titolo *Tractatus de Quadratura Curvarum* e pubblicata nel 1704, Newton dice di aver abbandonato le quantità infinitamente piccole e le quantità fluenti, sostituendole con quelle che egli chiamava *metodo delle prime e delle ultime ragioni*.

Considera la fluente x^n, e per trovare la flussione di y o x^n suppone che x, "fluendo", diventi $(x+o)$; allora x^n diventa:

$$(x+o)^n = x^n + nox^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}o^2x^{n-2} + \ldots$$

Gli incrementi di x e di y, cioè o e $\left(nox^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}o^2x^{n-2} + \ldots\right)$, stanno l'un l'altro 1 sta a $\left(nx^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}ox^{n-2}\right)$, quest'ultimo ottenuto dividendo i due incrementi per o.

"Supponiamo ora che gli incrementi svaniscano, allora la loro ultima proporzione sarà 1 a nx^{n-1}". La flussione di x sta quindi alla flussione di x^n come 1 sta a nx^{n-1}, o come si direbbe oggi il tasso di variazione di y rispetto ad x è uguale a nx^{n-1}.

Questo è il primo rapporto degli incrementi nascenti.

Qui Newton era effettivamente molto vicino al concetto di limite, la principale obiezione riguardava l'uso del termine "svanire". Esiste realmente un rapporto tra incrementi che sono svaniti?

Newton non chiarì questo punto che continuò a turbare i matematici per tutto il XVIII secolo.

La prima pubblicazione del suo calcolo infinitesimale, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* del 1687, fu il più ammirato trattato scientifico di tutti i tempi. L'opera riprende il metodo delle prime ed ultime ragioni ed in essa compare l'affermazione più chiara che Newton abbia mai fatto circa il significato delle ultime ragioni.

Tuttavia, le teorie elaborate da Newton, di fondamentale importanza per lo sviluppo e il calcolo differenziale, non erano riuscite ancora a stabilire un metodo analitico per il calcolo della derivata.

IL CONTRIBUTO DI
GOTTFRIED WILHELM VON LEIBNIZ

(1646-1716)

Leibniz introduce il calcolo differenziale nel suo lavoro intitolato *Nuovo metodo per trovare i massimi e minimi, e anche le tangenti, non ostacolato da quantità frazionarie e irrazionali e un unico genere di calcolo per quei problemi*, che si ritrova negli Acta Eruditorum del 1684.

Come per Newton, anche per Leibniz svolsero un ruolo importante le serie infinite, ma fu leggendo la lettera di Amos Dettonville sul *"Traitè des sinus du quart de cercle"* che Leibniz, a quanto egli stesso riferisce, fu colpito da un'intuizione improvvisa.

Nel 1673, intuì che la determinazione della tangente ad una curva dipendeva dal *rapporto* tra le differenze delle ordinate e delle ascisse, quando queste diventavano infinitamente piccole, e che le quadrature dipendevano dalla somma delle ordinate, ossia dei rettangoli infinitamente piccoli che formavano l'area.

Intuì così che in geometria i problemi della *quadratura* e della *tangente*, che dipendevano rispettivamente da somme e da differenze, erano l'uno l'inverso dell'altro.

Così pochi anni più tardi, nel 1676 Leibniz giunse alla stessa conclusione di Newton, indipendentemente dal lavoro di quest'ultimo: in pratica era in possesso di un metodo generale, secondo il quale, data una "*funzione"* - razionale o irrazionale, algebrica o trascendente (termine coniato dallo stesso Leibniz) - potevano essere sempre applicate le operazioni del suo metodo per trovare somme e differenze.

Spettava quindi a lui elaborare un linguaggio e una notazione confacenti a questa nuova branca della matematica.

Del resto Leibniz aveva sempre avvertito l'importanza di una buona notazione come utile strumento per il pensiero.

COME ARRIVO' A DEFINIRE IL DIFFERENZIALE?

Le analogie tra il *Triangolo aritmetico di Pascal* e il *Triangolo armonico* affascinarono molto Leibniz.

Triangolo aritmetico di Pascal

(ogni termine, tranne quelli sui lati obliqui, è uguale alla differenza tra il termine posto nella riga inferiore alla sua sinistra e quello alla sua sinistra sulla stessa riga, es. 6=10-4; inoltre ogni termine, tranne quelli sui lati obliqui, è uguale alla somma dei termini posti subito sopra di esso; es. $3 = 1 + 2$).

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots
\end{array}$$

Triangolo armonico

(ogni termine, tranne quelli che si trovano sui lati obliqui, è uguale alla differenza tra il termine posto sulla riga superiore alla sua destra e quello sulla sua stessa riga a destra, es. $\frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$; inoltre ogni termine è uguale alla somma del termine posto sulla riga inferiore alla sua destra più i due termini ad esso sottostanti, es. $\frac{1}{6} = \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30}$).

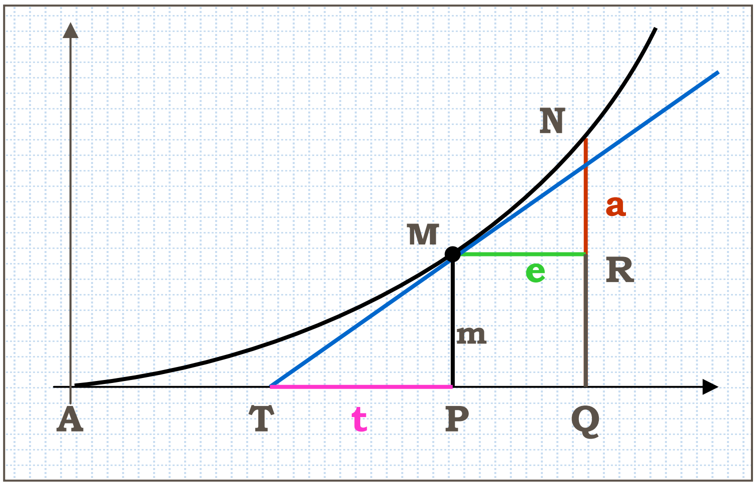
$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \frac{1}{1} & & & & \\
 & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & \\
 & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & \\
 & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & \\
\frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5} \\
\ldots & \ldots & \ldots & & \ldots & & \ldots & \ldots &
\end{array}$$

Così come nei *triangoli aritmetico* e *armonico* i processi di *sommazione* e *differenziazione* sono inversamente correlati, così anche nella geometria i problemi della quadratura e della tangente, che dipendono rispettivamente da somme e da differenze, sono l'uno l'inverso dell'altro.

L'anello di collegamento, a quanto sembra, fu dato dal **Triangolo Caratteristico** (o Triangolo Infinitesimale); infatti, mentre Pascal lo aveva usato per trovare la quadratura dei seni, Barrow lo aveva applicato al problema della tangente.

Il confronto tra i due triangoli mette in evidenza le analogie che evidentemente colpirono Leibniz.

Il triangolo caratteristico usato da **Barrow** per il problema della tangente:



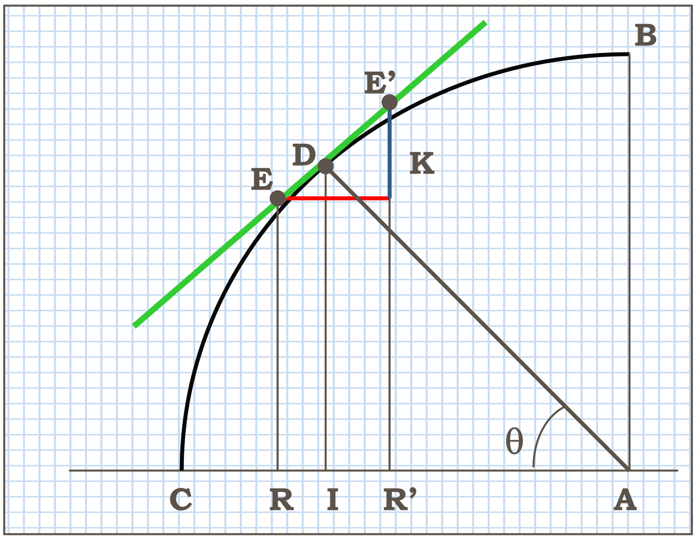
Sia M un punto di una curva espressa, in notazione moderna, da un'equazione polinomiale $f(x, y) = 0$ e sia T il punto d'intersezione della tangente desiderata MT con l'asse *x*.

Fermat segnava poi "un arco infinitamente piccolo MN della curva", tracciava le ordinate dei punti M e N e per M tracciava una retta MR parallela all'asse *x*. Indicando poi con ***m*** l'ordinata di M, che era nota, con ***t*** la sottotangente PT, che si desiderava conoscere, e con ***a*** ed ***e*** i lati verticali e orizzontali del triangolo MRN, faceva notare che $\boldsymbol{a} : \boldsymbol{e} = \boldsymbol{m} : \boldsymbol{t}$.

Questi sono i passaggi seguiti da Fermat:

- Per trovare il rapporto $\boldsymbol{a} : \boldsymbol{e}$ (che per noi rappresenta la pendenza della curva per punti infinitamente vicini) sostituì x e y nell'equazione $f(x, y) = 0$ con $x + \boldsymbol{e}$ e $y + \boldsymbol{a}$;
- Nell'equazione risultante trascurò tutti i termini non contenenti ***a*** o ***e***, dal momento che questi erano tutti uguali a zero e tutti i termini di grado superiore al primo in ***a*** ed ***e***;
- Poi sostituì ***a*** con ***m*** ed ***e*** con ***t***. Da questo ottenne la sottotangente ***t*** in termini di *x* e ***m***.

Il triangolo caratteristico usato da **Pascal** per trovare la quadratura dei seni:



Se EDE' è la tangente in *D* al quadrante unitario BDC, allora:

$$AD : DI = EE' : RR'(EK) .$$

Per un intervallo RR' molto piccolo si può considerare il segmento EE' come virtualmente uguale all'arco della circonferenza; quindi

$$1 : senx = d\theta : dx .$$

LEIBNIZ DEFINISCE IL DIFFERENZIALE SENZA LA DERIVATA

La nozione di funzione si afferma solo nel '700, mentre precedentemente predomina il concetto di *relazione*, espressa dall'equazione $P(x, y) = 0$.

Quindi, il problema della derivazione si presenta a Leibniz nella forma:

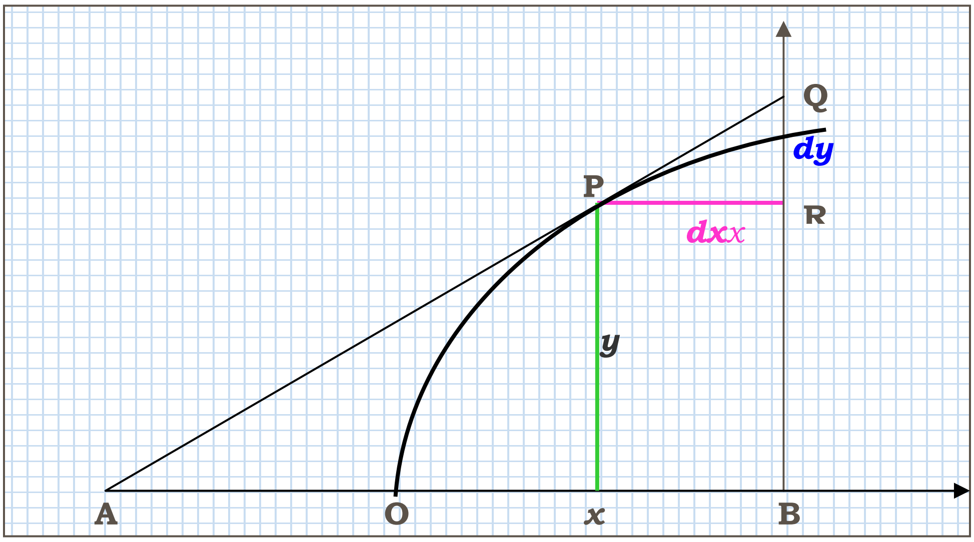
"Data la relazione $P(x, y) = 0$ tra le variabili x e y, trovare la relazione tra i loro differenziali dx e dy "

Per Leibniz la derivata, o meglio, il *differenziale* è definito capovolgendo il punto di vista oggi usuale, ossia *mediante* la tangente.

Leibniz definisce *dy* (che coincide con il nostro differenziale anche se è definito in altro modo) a partire da un segmento *dx*, incremento infinitesimo della variabile x e dalla retta tangente alla curva.

Definisce dy come il segmento che sta a y come dx sta al segmento $\overline{AB}$, cioè:

$$dy : y = dx : \overline{AB}$$



Infatti per la similitudine dei triangoli ABP e PRQ si ha:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\overline{QR}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{AB}} = \frac{y}{\overline{AB}}$$

quindi la sottotangente $\overline{AB}$ è determinata:

$$\overline{AB} = y\frac{dx}{dy}$$

Per tracciare la tangente nel punto P basterà congiungerlo con il punto A sull'asse delle x a distanza $y\frac{dx}{dy}$ da B.

UNA NOTAZIONE AZZECCATA

Dopo vari tentativi fissò la sua scelta su *dx* e *dy* per indicare le minime differenze possibili (differenziali) di x e y (cioè l'incremento infinitesimo della variabile x e l'incremento infinitesimo della variabile *y*), sebbene inizialmente avesse usato $\frac{x}{d}$ e $\frac{y}{d}$.

Per indicare la somma di tutte le ordinate di una curva inizialmente usò ***omn.y*** (tutte le *y*), poi passò al simbolo $\int y$ e infine a $\int ydx$, dove il simbolo dell'integrale è l'ingrandimento della lettera "s" che indica la "somma".

Ancora oggi il simbolo *dx* è usato ed è molto utile per esempio nel calcolo delle derivate parziali.

Non solo: i termini oggi usati di *"calcolo differenziale"* e *"calcolo integrale"* sono nati proprio dalle espressioni usate da Leibniz:

- per trovare le tangenti si richiedeva l'uso del *calculus differentialis*
- per trovare le quadrature si richiedeva l'uso del *calculus summatorius* o *calculus integralis*.

LE REGOLE DI DIFFERENZIAZIONE

Il punto centrale del lavoro di Leibniz è senz'altro il riconoscimento delle <u>regole di differenziazione.</u>

Procedendo con le sue ricerche, infatti, già nel 1677 era in grado di dare delle regole corrette per la differenziazione della somma, della differenza, del prodotto e del quoziente di due espressioni del tipo $P(x, y) = 0$ e per le potenze e, quindi, le radici.

Nella prima esposizione del calcolo differenziale del 1684 Leibniz presenta le formule:

$$d\alpha x = \alpha dx \quad \textbf{\textit{linearità}}$$

$$dxy = xdy + ydx \quad \textbf{\textit{prodotto}}$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{(ydx - xdy)}{y^2} \quad \textbf{\textit{quoziente}}$$

$$dx^n = nx^{n-1} \quad \textbf{\textit{potenza}}$$

Queste formule vennero ottenute trascurando gli infinitesimi di ordine superiore, per esempio:

$$dxy = (x + dx)(y + dy) - xy = xy + xdy + ydx + dxdy - xy = xdy + ydx$$

poiché $dxdy$ è infinitamente infinitesimo quindi trascurabile.

Dalla formula per il differenziale di una potenza, discende quella per il differenziale delle radici, infatti:

$$\text{se } z = x^{\frac{1}{k}} \text{ allora } x = z^k$$

differenziando abbiamo

$$dx = kz^{k-1}dz$$

da cui

$$dz = \frac{1}{k}x^{\frac{1}{k-1}}dx$$

Nelle formule esposte da Leibniz riconosciamo subito le regole di derivazione che permettono di superare le difficoltà di cui abbiamo parlato all'inizio.

Dato che a quel tempo la quasi totalità delle funzioni considerate erano combinazioni di potenze e radicali, con le formule di Leibniz era ora possibile la differenziazione di qualsiasi funzione.Vengono così completamente risolti il PROBLEMA DELLE TANGENTI e il PROBLEMA DEI MASSIMI E DEI MINIMI.

CONCLUSIONI

Se Newton può considerarsi uno scienziato a tutti gli effetti, Leibniz risulta più estraneo all'ambiente accademico matematico.

Brillante uomo di legge, matematico e filosofo, una delle menti più attive e versatili del secolo, Leibniz apprese la nuova matematica in un tempo relativamente breve dal fisico Huygens, mentre si trovava a Parigi in missione diplomatica; poco dopo pubblicò dei risultati che contenevano il nucleo del calcolo moderno.

Newton, le cui scoperte erano state molto precedenti, era contrario a pubblicarle: ciò avvenne solo nel 1687, ossia 22 anni dopo aver ottenuto i primi importanti risultati. Infatti, pur essendosi originariamente servito dei metodi del calcolo per determinare molti dei risultati del suo capolavoro, i *Principia*, quasi nessuna traccia vi appare esplicitamente.

Sia a Newton che a Leibniz bisogna attribuire il merito di aver visto nel calcolo infinitesimale un calcolo generale applicabile a molti tipi di funzione. La distinzione fondamentale fra l'opera dei due grandi matematici consiste:

- da parte di Newton, nel rifiuto delle quantità infinitesime, o indivisibili, che fino ad allora erano state utilizzate, per proclamarsi favorevole alle quantità evanescenti divisibili, che pertanto potevano essere diminuite infinitamente.
- da parte di Leibniz, invece, nell'operare direttamente con gli incrementi infinitamente piccoli di x e di y per poi determinarne le relazioni.

Se Newton, in quanto fisico, risulta più empirico e concreto, Leibniz appare più speculativo, portato alle generalizzazioni e più propenso alla diffusione dei suoi risultati.

Mentre Newton non si preoccupò di formulare regole di calcolo, infatti, sebbene sapesse che se $z = uv$ allora $\dot{z} = u\dot{v} + v\dot{u}$ non segnalò mai tale risultato, Leibniz stabilì i canoni del calcolo infinitesimale, cioè il sistema delle regole e delle formule.

Infine Leibniz passò molto tempo a scegliere una notazione suggestiva mentre Newton non attribuì alcuna importanza a tale problema.

Le note controversie fra i due matematici cominciarono nel 1695, quando Newton apprese dal matematico Wallis che in Olanda il calcolo infinitesimale era considerato una scoperta di Leibniz. Infatti, egli pubblicò un'esposizione del suo calcolo negli *Acta Eruditorum*, periodico mensile scientifico fondato due anni prima.

In una relazione alla Royal Society, gruppo inglese di studiosi interessati particolarmente alla matematica e all'astronomia, un matematico suggerì che Leibniz potesse aver appreso ciò durante la sua permanenza a Londra; pertanto Leibniz fu accusato di plagio. La sua replica giunse nel 1704, quando rivendicò il diritto alla priorità nella pubblicazione elevando una protesta alla Royal Society contro l'accusa di plagio.

Nel 1708 Keill, un professore di Oxford, fece una difesa vigorosa delle pretese di Newton contro quelle di Leibniz in un articolo pubblicato in un giornale; i ripetuti appelli di Leibniz alla Royal Society indussero finalmente quell'accademia a nominare una commissione incaricata di studiare la questione e farne un rapporto. Tale rapporto fu pubblicato nel 1712 col titolo "*Commercium Epistolicum*", ma non fece alcun passo avanti nella questione.

Il comitato era giunto alla conclusione che Newton fosse il primo inventore, ma non stabiliva se Leibniz, durante il soggiorno a Londra, avesse avuto la possibilità di vedere gli studi di Newton. Le ricerche fatte anche dopo molto tempo dalla morte di entrambi, dimostrano tuttavia che Leibniz maturò indipendentemente le principali idee del calcolo infinitesimale, sebbene Newton avesse portato a termine la maggior parte delle sue ricerche prima che Leibniz compisse le sue.

L'importanza storica della controversia non sta nel decidere chi fosse il vincitore, piuttosto nel fatto che i matematici si divisero in due partiti:

- quelli continentali dalla parte di Leibniz (fratelli Bernoulli);
- quelli inglesi dalla parte di Newton.

I due gruppi svilupparono una forte ostilità e si accanirono l'uno contro l'altro, tanto da cessare di scambiarsi le loro idee.

Questo costituisce un esempio poco felice di come si possano montare questioni di precedenza e rivendicare proprietà intellettuali fino ad avvelenare l'atmosfera dei contatti scientifici.