Le origini del calcolo integrale: dal metodo di Esaustione a quello degli Indivisibili

Franco Marianelli
Leonardo Teglielli
Leonilde Rossi
Giulia Scaccia

SSIS Toscana
Indirizzo FIM
A.A. 2004/2005

IL METODO DI ESAUSTIONE DI EUDOSSO

I due grandi capitoli dell'Analisi infinitesimale sono costituiti dal calcolo integrale e dal calcolo differenziale.

Per rintracciare le origini del calcolo integrale bisogna risalire fino ai geometri greci i quali, nella ricerca di aree e volumi, seppero ottenere risultati ammirevoli. Integrare, infatti, significa determinare un'area. In termini moderni si integra generalmente una funzione, ma in antichità le funzioni non esistevano e i problemi di integrazione erano di natura squisitamente geometrica. Geometria e funzioni, apparentemente concetti distaccati, hanno generato ed adottato lo stesso metodo di analisi che ha superato indenne quasi tremila anni di storia.

Archimede fu il primo ad affrontare problemi geometrici applicando nozioni di meccanica e di statica, riuscendo addirittura a costruire un metodo che anticipava di ben diciotto secoli il calcolo integrale. È significativo che il re dei matematici, Karl Friedrich Gauss, abbia ricevuto il testimone dell'analisi infinitesimale non da un suo contemporaneo, ma da un uomo vissuto ben diciotto secoli prima e giustamente considerato come il re della matematica antica.

Il procedimento adottato nell'antichità parte da un sistema di analisi infinitesimale chiamato metodo di esaustione. Inventato da Eudosso di Cnido (CNIDO, 406-355 A.C.), filosofo seguace di Platone, questo metodo, si proponeva di riempire, letteralmente, un'area con delle figure note tali che la loro somma approssimasse l'area cercata.

Esso rappresenta uno schema fisso al quale si ricorre quando si vuole dimostrare l'equivalenza di due grandezze omogenee Q e Q´ (aree, volumi, lunghezze, etc.).

Archimede perfeziona questo metodo inserendo il concetto di momento statico delle figure. Come se si trattasse di "pesare" le aree e di trovare il punto d'equilibrio della bilancia utilizzata. Archimede lo applicò al cerchio per determinarne l'area.

Espresso in termini moderni, questa teoria consiste nel dimostrare che due grandezze (lunghezze, aree o volumi) sono uguali perché è assurdo che la loro differenza sia diversa da zero.

Otteniamo questo risultato, non da un confronto diretto delle due grandezze in questione, ma dal confronto tra due classi di grandezze (dette contigue) con le seguenti caratteristiche:

Le classi sono separate, cioè ogni grandezza appartenente alla prima classe è minore di ogni grandezza appartenente alla seconda classe.

È sempre possibile trovare due grandezze, rispettivamente una in ciascuna classe, che abbiano una differenza minore di qualsiasi grandezza scelta piccola a piacere.

Il metodo di esaustione è di fatto il metodo delle classi contigue.

Per provare che una figura A è uguale a una figura B nel caso in cui non siano equiscomponibili si dovrà provare che non può essere né $A<B$ né $A>B$. Per fare ciò si procede per assurdo; supponendo ad esempio che $A<B$ l'assurdo si raggiunge mediante la costruzione di una figura intermedia tra A e B che dovrebbe risultare contemporaneamente maggiore e minore di A.

Il metodo di esaustione è in questo modo interpretato in chiave moderna.

Nell'antichità, ricordiamoci che questo procedimento era stato sviluppato soprattutto in campo geometrico: all'idea di limite di due successioni convergenti, si preferiva l'idea analoga di limite da "riempire" con grandezze note.

Ad esempio l'area del segmento parabolico viene calcolata da Archimede "riempiendolo" letteralmente con dei triangoli sempre più piccoli, fino ad "esaurire" (da cui il nome del metodo) lo spazio a disposizione.

I matematici greci anteriori a Eudosso infatti avevano suggerito l'idea di inscrivere e circoscrivere figure rettilinee attorno alla figura curva e di continuare questo a moltiplicare indefinitivamente il numero dei lati, essi però non sapevano come concludere il ragionamento perché il concetto di limite era sconosciuto a quel tempo. Secondo Archimede fu Eudosso che fornì il lemma (che oggi porta il nome di lemma di Archimede-Eudosso o assioma della continuità) che serviva come base per il metodo di esaustione.

Il lemma che negli Elementi di Euclide è dato come definizione (definizione 4, libro V) afferma: "si dice che hanno rapporto fra loro quelle grandezze che sono capaci se moltiplicate di superarsi a vicenda", ossia in termini equivalenti: "date due grandezze aventi un certo rapporto, è possibile trovare un multiplo dell'una che supera l'altra".

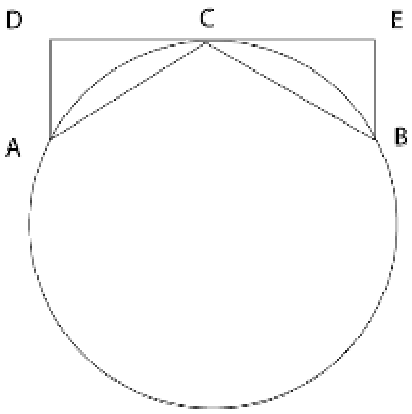
Partendo da tale assioma, Euclide dimostra una proposizione (proposizione 1, libro X) che costituisce la base del metodo di esaustione: "date due grandezze disuguali, se dalla maggiore si sottrae una parte maggiore della sua metà e da ciò che rimane una parte maggiore della sua metà e se questo procedimento viene ripetuto continuamente, allora alla fine rimarrà una grandezza che sarà minore della minore delle grandezze date" (cioè minore di una grandezza dello stesso genere precedentemente assegnata).

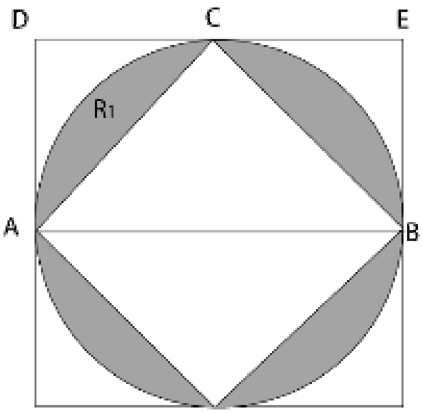
Euclide osserva che tale ragionamento continua a valere anche se "le parti sottratte siano la metà"

Questa proposizione, spesso indicata come "proprietà di esaustione" è equivalente al teorema che in linguaggio moderno scriviamo come "data una grandezza G e una grandezza ε precedentemente assegnata e dello stesso genere, se r è un rapporto tale che $\frac{1}{2} \leq r < 1$, allora è possibile trovare un intero N tale che per ogni intero $n>N$, sarà $G(1-r)^n < \varepsilon$ ". In altri termini: $\lim_{n\to\infty} G(1-r)^n = 0$.

Euclide usa di fatto tale proprietà per dimostrare che un cerchio può essere "esaurito" da poligoni regolari iscritti con un numero di lati via via crescente, in realtà tale proposizione è attribuita a Eudosso stesso ed è la prima parte della dimostrazione della proposizione 2 del libro XII secondo la quale "i cerchi stanno l'un l'altro come i quadrati dei diametri". Riportiamo la prima parte di tale dimostrazione come esempio di applicazione del metodo di esaustione.

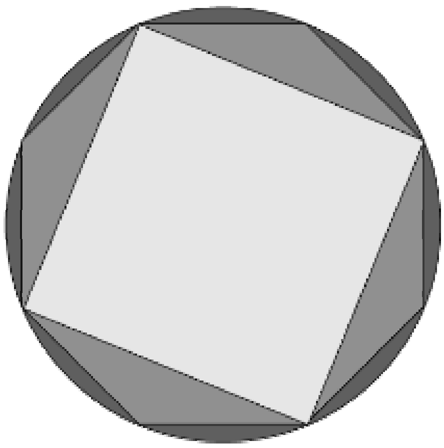
Considerato un arco qualunque di cerchio sotteso dalla corda AB, per il punto medio C dell'arco si tracci la tangente e si proiettino in D ed E i punti A e B.





La figura ABED è un rettangolo di area maggiore di quella del segmento di cerchio ACB; l'area della sua metà, cioè del triangolo ACB, è maggiore di quella della metà del segmento stesso. Detto ciò, un quadrato inscritto nel cerchio ha un'area maggiore dell'area del cerchio stesso; quindi l'area R1,che è la differenza tra le aree del cerchio e del quadrato, è minore della metà del cerchio. Dimezzando gli archi delimitati dai lati del quadrato inscritto si costruisca l'ottagono. La somma delle aree dei triangoli formati da due lati dell'ottagono e da un lato del quadrato è maggiore della metà della somma delle aree dei segmenti circolari circoscritti ai triangoli stessi. Quindi sottraendo dal cerchio l'area dell'ottagono si ottiene una differenza : $R_2<R_1/2$

Proseguendo la costruzione dei poligoni regolari inscritti nel cerchio si troverà un poligono che sottratto dal cerchio lascerà come differenza un'area più piccola di un'area qualunque precedentemente ottenuta (ad es. R_1, R_2,ecc…).



In questo dobbiamo leggere la potenza del metodo di esaustione: se gli antichi geometri avevano solo suggerito l’idea che il cerchio (come le altre figure curvilinee) poteva essere esaurito o colmato da poligoni regolari iscritti intuendo soltanto il concetto di “passaggio al limite” , Eudosso per la prima volta rende rigoroso il procedimento evitando di ricorrere al concetto di limite stesso.

In termini moderni il metodo di esaustione viene ancora utilizzato nel calcolo integrale, anche se oggigiorno non lo si chiama più «metodo di esaustione di Eudosso», ma più semplicemente “calcolo dell'integrale semplice". Il calcolo infinitesimale sposta il suo campo d'azione dalla geometria all'analisi arricchendolo da un lato in precisione e rapidità, ma d'altro canto impoverendolo perché per calcolare l'area di una figura si può ancora utilizzare il calcolo integrale, ma è molto meglio lavorare con formule più rapide già dimostrate, anche se sono state trovate (ad esempio l'area del cerchio) con quello che un tempo era il metodo di esaustione.

Eudosso, più di 2000 anni fa, fu il primo a sviluppare un calcolo che può definirsi la chiave dell'analisi infinitesimale moderna.

LA MISURA DEL CERCHIO DI ARCHIMEDE

Prima di esporre il metodo utilizzato da Archimede nel suo *Misura del cerchio*, dobbiamo capire come si presentava all'epoca il problema. Il risultato che si voleva raggiungere non era esattamente l'area del cerchio; più che altro si mirava alla soluzione del problema della famosa «quadratura del cerchio». Archimede troverà l'area del cerchio non direttamente, ma a partire da considerazioni volte a rendere possibile la costruzione del quadrato di area uguale al circolo considerato.

Riuscire a quadrare il cerchio è stato un chiodo fisso dei matematici dai tempi di Anassagora (500-420 a.C.) sino al 1882, quando Ferdinand Lindemann (1852-1939) dimostrò definitivamente l'impossibilità del problema. Nonostante questo, i tentativi di quadrare il cerchio hanno dato origine non solo alle moderne formule per calcolarne l'area, ma anche a quello che oggi chiamiamo calcolo infinitesimale.

«Quadrare una figura», così come era inteso dagli antichi, significa costruire un quadrato di area uguale a quella della figura piana considerata. Se ciò è realmente possibile, allora si dice che la figura è «quadrabile».

La sfida più grande era comunque sempre la quadratura del cerchio.

Per quadrare le figure gli antichi greci lavoravano per "gradini": passavano dalla figura più complessa ad una più semplice utilizzando metodi fissi e dimostrati. Così iniziarono col quadrare il rettangolo, poi il triangolo e poi il poligono generico; e ogni quadratura faceva riferimento a quella precedente.

Questo procedimento è l'anello di congiunzione tra il lavoro di matematici come Ippocrate e quello di quelli come Eudosso. Il metodo di esaustione si propone di "riempire" una superficie di area sconosciuta, con figure note delle quali possiamo calcolare l'area. Per quadrare i poligoni si fa proprio questo: dato un poligono, lo si divide in tanti triangoli, quindi in figure quadrabili direttamente, senza passaggi intermedi. Una volta diviso il poligono si procede a quadrare singolarmente i triangoli ottenuti e a sommare le aree dei quadrati che risultano, ottenendo un unico quadrato di area uguale al poligono iniziale.

Archimede si spinse oltre, intorno al 225 a.C., scrisse il trattato *Misura del cerchio*. Il suo obbiettivo era calcolare l'area del cerchio e lo fece costruendo dei poligoni inscritti e circoscritti, quindi quadrabili.

Nel suo calcolo approssimato del rapporto tra circonferenza di un cerchio e diametro, Archimede diede un'ulteriore prova della sua abilità nel calcolo.

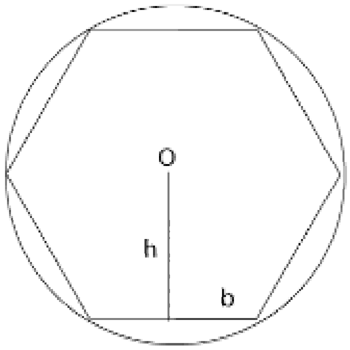
Per dimostrare le sue teorie il sommo siracusano si avvalse di un metodo di dimostrazione semplice da realizzare quanto difficile da escogitare: la «doppia riduzione all'assurdo», che vedremo in dettaglio.

Dal libro di Archimede: *La misura del cerchio*

Problema. Si determini l'area di un poligono regolare con centro in O, perimetro Q, e apotema h, in cui l'apotema è il segmento passante da O, perpendicolare ad uno qualsiasi dei lati.

Teorema. L'area del poligono regolare è $\frac{1}{2}hQ$

Dimostrazione. Supponiamo che il poligono abbia n lati, ognuno di quali misuri b. Tracciamo dei segmenti che congiungano il punto O con ciascun vertice del poligono, in modo da suddividerlo in n triangoli uguali, ognuno dei quali abbia come altezza l'apotema h e come base un lato b



.

Ogni triangolo ha area $A_T = \frac{1}{2}hb$

Il poligono ha quindi area $A_p = \frac{1}{2}bh + \frac{1}{2}bh + ... + \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}h\left(\sum_{i=1}^{n} b\right) = \frac{1}{2}hQ$ dato che $\sum_{1}^{n} b$ è il perimetro Q del poligono.

Era già noto ai tempi di Archimede che data una circonferenza è sempre possibile inscrivervi un quadrato (Euclide, *Elementi*, Proposizione 4, libroVI); l'area del quadrato sarà minore di quella del cerchio in cui è inscritto, ovviamente. Se dividiamo gli archi di circonferenza relativi ai lati del quadrato nei loro punti medi, determiniamo i vertici di un ottagono regolare, la cui area differisce sempre dal cerchio, ma di un valore minore rispetto al quadrato. Continuando a costruire poligoni con un numero sempre maggiore di lati si approssimerà con sempre maggiore precisione l'area del cerchio. Il processo può continuare all'infinito, ma l'area del poligono inscritto, seppur di poco, differirà sempre da quella del cerchio per un valore sempre più piccolo.

È questo il concetto basilare del metodo di esaustione di Eudosso. Quindi, data un'area (che chiameremo e), per piccola che essa sia, si potrà sempre costruire un poligono inscritto ad un cerchio tale che la differenza tra le aree delle due figure sia sempre minore dell'area e. Con questo sistema è quindi possibile avvicinarsi quanto si voglia all'area del cerchio, senza mai però raggiungerla. In termini moderni diremmo che l'area del cerchio è il limite della successione delle aree dei poligoni. È forse una forzatura pensare che anche Archimede concepisse l'area del cerchio come limite di questa successione, ma il concetto che egli esprime nel suo scritto è questo.

Scriveremo dunque

Area del poligono $\xrightarrow{lati \to \infty}$ Area del cerchio

Area del cerchio-Area del poligono<ε

Questo vale sia per i poligoni inscritti sia per quelli circoscritti.

In questo modo si ottiene un'approssimazione dell'area del cerchio, ma Archimede non puntava a questo. Egli si limitava ad osservare che se è possibile costruire un poligono la cui area si avvicini quanto si vuole a quella del cerchio, sarà anche possibile quadrare questo poligono, quindi è plausibile pensare – a torto – che probabilmente si potrà quadrare anche il cerchio. Archimede ci dimostra questo nelle Proposizioni seguenti di Misura del cerchio.

Proposizione: L'area di qualsiasi cerchio è uguale a quella di un triangolo rettangolo avente uno dei cateti uguale al raggio e l'altro uguale alla circonferenza.

Dimostrazione. Consideriamo due figure: una circonferenza con centro in O, raggio r e misura della circonferenza C; e un triangolo rettangolo con base C e altezza r. Si indichi con A l'area del cerchio e con T quella del triangolo. L'area del triangolo è facilmente calcolabile $T = \frac{1}{2} rC$.

La proposizione afferma che A = T. Per dimostrarlo utilizziamo la doppia riduzione all'assurdo, diciamo che è possibile solo uno dei casi seguenti:

1. A > T

2. A < T

3. A = T

Ipotesi 1. Supponiamo che A > T.

Ciò significa che l'aera del cerchio supera di una certa quantità positiva l'area del triangolo. Cioè A – T > 0

Prendiamo questa grandezza come ε e applichiamo ciò che abbiamo dimostrato in precedenza

Area del cerchio – Area del poligono inscritto < ε

A – Area del poligono inscritto < A – T

T < Area del poligono inscritto

Il poligono inscritto nella circonferenza ha però, proprio perché inscritto, perimetro Q minore della circonferenza C, e apotema h minore del raggio r. Perciò

Area del poligono iscritto= $\frac{1}{2} hQ < \frac{1}{2} rC = T$

Area del poligono iscritto<T

E qui arriviamo ad una contraddizione: supponendo vera l'ipotesi 1 avremmo

T< Area del poligono inscritto < T .

Perciò l'ipotesi 1 è da considerarsi *falsa*.

In modo analogo:

Ipotesi 2. Supponiamo che A < T.

Come nel caso precedente consideriamo la differenza tra le due aree. Stavolta otteniamo, per ipotesi, che la differenza positiva è tra l'area T, maggiore, e quella A, minore.

T – A > 0

Quanto considerato per i poligoni inscritti, vale anche per quelli circoscritti, ovviamente. Pertanto è sempre possibile costruire un poligono circoscritto ad una circonferenza, tale che la sua area si avvicini quanto si voglia a quella del cerchio al quale è circoscritto.

In modo analogo giungeremo nuovamente ad una contraddizione:

T<Area del poligono circoscritto <T

Perciò anche l'ipotesi 2 è da considerarsi falsa.

Concludendo, possiamo affermare con certezza che effettivamente l'area del cerchio è uguale a quella del triangolo rettangolo avente un cateto di lunghezza pari alla circonferenza ed un altro pari al raggio del cerchio. Perché, citando Archimede:

«Poiché l'area del cerchio non è né maggiore né minore [dell'area del triangolo], è uguale ad essa».

Il sistema adottato da Archimede, al di là della controversa dimostrazione, fu quello di considerare l'area e la circonferenza del cerchio come i limiti delle successioni delle aree, rispettivamente dei perimetri, di poligoni regolari inscritti e circoscritti al circolo.

DAL METODO DI ESAUSTIONE AL CALCOLO INTEGRALE: L’EVOLUZIONE DALL’ANTICHITÀ AL CINQUECENTO

La nascita dell’analisi infinitesimale e quindi del calcolo integrale è legata, come abbiamo già avuto modo di vedere, alla geometria e all’antica meccanica. Non sorprende quindi, che anche la sua resurrezione sia legata alla fisica, l’evoluzione della meccanica.

Procediamo con ordine. Come abbiamo visto i greci utilizzavano un procedimento infinitesimale che anticipava il moderno calcolo integrale: il metodo di esaustione. Esso però, era una sorta di ripiego di cui ci si serviva per comprendere problemi concettuali, quale il limite, l’infinito, etc., sconosciuti agli antichi nei loro significati più profondi. Questo metodo era intuitivamente comodo e chiaro, ma, come del resto lo stesso Archimede ammette, può funzionare come metodo empirico, ma non come dimostrazione rigorosa.

Nel periodo di tempo compreso tra la morte di Archimede, nel 212 a.C., e la caduta di Alessandria sotto Cesare, nel 48-47 a.C, il progresso occidentale che si era avuto sino ad allora iniziò una lunga fase di rallentamento sino alla sua completa capitolazione avvenuta nel simbolico 470 d.C..

Nella rinascita scientifica del Seicento, assieme alla matematica, crebbe anche il ragionamento logico e rigoroso che spingeva alla critica dei principi empirici e portava alla loro rigorosa dimostrazione. Questa sorte toccò anche al metodo di esaustione: grazie ai nuovi concetti di «limite» e di «serie», si riuscì a comprendere il funzionamento del metodo di Eudosso e ad interpretarlo in chiave rigorosamente logica.

BONAVENTURA CAVALIERI E IL METODO DEGLI INDIVISIBILI: IL CONTESTO STORICO E LE FONTI ISPIRATRICI

Bonaventura Cavalieri, entrato nell'ordine dei Gesuati non ancora sedicenne, fu trasferito a Pisa dove aveva seguito le lezioni di Matematica di padre Benedetto Castelli, e di Pietro Antonio Castaldi entrambi allievi di Galileo. Tuttavia tenne fin da subito a proclamarsi allievo di Galileo stesso, infatti si rivolge ad esso chiamandolo "proprio maestro" nel lungo carteggio durato per circa venti anni a partire dal 1621. In tali lettere comunica i primi risultati delle sue ricerche geometriche, i progressi compiuti e i dubbi che via via si presentano. In una lettera del 1621 scrive: "*Vado dimostrando alcune proposizioni d'Archimede diversamente da lui, et in particolare la quadratura della parabola, divers'ancora da quello di V.S.*"

Senza dubbio Cavalieri fu stimolato nelle sue ricerche da Galileo il quale lo incoraggiò ad organizzare le sue riflessioni sotto forma di libro, dai lavori di Nicola Oresme, e soprattutto dal trattato di Keplero "Stereometria doliorum" in cui erano stati calcolati aree e volumi, suddividendo i corpi in infinite parti infinitesime. Il problema della quadratura dell'ellisse infatti era stato risolto gia da Keplero utilizzando tali idee.

LA GEOMETRIA DEGLI INDIVISIBILI

Cavalieri aveva sviluppato il suo metodo gia a partire dal 1621 (da quanto emerge dalla lettera a Galileo); nel novembre del 1627 in un'altra lettera a Galileo dice di essere in procinto di pubblicare un libro sull'argomento, segno quindi che l'opera era gia terminata, (dalla lettera a Galileo: "*ho perfettionato un'opera di geometria…. Et è cosa nova, non solo quanto alle cose trovate, ma anco al modo di trovarle, da niuno adoperate insin'ora, ch'io mi sappi*"), ma non lo farà, forse per rispetto al maestro, fino al 1635, dato che Galileo stesso si era riproposto di pubblicare un libro che trattasse di infinito. Comunque il trattato di Galileo avrebbe senza dubbio avuto un carattere più filosofico e speculativo, e avrebbe posto particolare accento sull'infinitamente grande e l'infinitamente piccolo, un tema questo che Cavalieri preferiva evitare.

Le idee su cui si basa la Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota, nota con il nome di "Geometria degli indivisibili" e pubblicata nel 1635 dopo esitazioni, riscritture e impedimenti di varia natura, sono quelle, come si è gia detto, di Keplero, Oresme e Galileo, ossia che un'area potesse essere considerata come formata da un numero indefinito di segmenti paralleli equidistanti e sottilissimi ("indivisibili" appunto) e che analogamente un volume poteva essere considerato come composto da un numero indefinito di aree piane parallele; questi elementi sono appunto chiamati "indivisibili di area" e "indivisibili di volume". Cavalieri si rende conto che il numero di indivisibili che costituiscono un'area o un volume deve essere indefinitivamente grande, ma non cerca di approfondire questo fatto né di darne una spiegazione precisa.

Notiamo che questo era lo stesso ragionamento che Archimede stesso aveva utilizzato nel suo Metodo, che a quella data non era ancora stato scoperto. Cavalieri parla a proposito delle superfici come formate dalla "totalità di tutte le linee" e dei solidi come formati dalla "totalità di tutti i piani", ciò gli consente di introdurre un principio noto ancora oggi come "Principio di Cavalieri" con il quale arriva ad elaborare un potente e nuovo strumento per la determinazione di aree e volumi. Il principio afferma che:

“se due solidi hanno uguale altezza e se le sezioni tagliate da piani paralleli e ugualmente distanti da queste stanno sempre in un dato rapporto, anche i volumi dei solidi stanno in questo rapporto”.

Vediamo come sia giunto alla formulazione di tale principio citando passi tratti direttamente dall’opera.

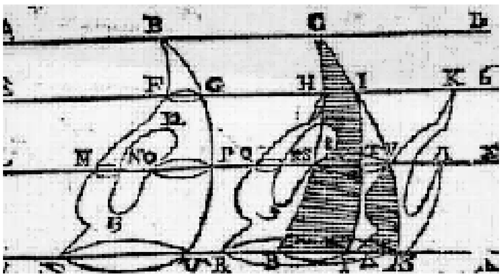
Nelle pagine introduttive della Geometria degli indivisibili egli descrive come sia giunto alla sua elaborazione:

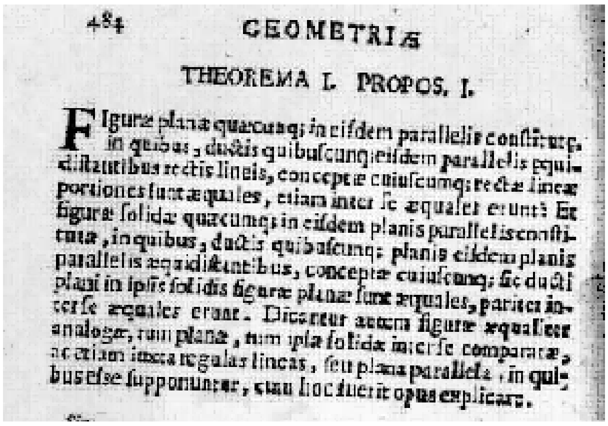
> *Meditando dunque un giorno sulla generazione dei solidi che sono originati da una rivoluzione intorno ad un asse e confrontando il rapporto delle figure piane generatrici con quello dei solidi generati mi meravigliavo moltissimo del fatto che le figure generate si discostassero a tal punto dalla condizione dei propri genitori da mostrare di seguire un rapporto completamente diverso dal loro. Per esempio un cilindro, che sia ottenuto insieme ad un cono della stessa base per rotazione attorno a un medesimo asse, è il triplo di esso, anche se nasce per rivoluzione da un parallelogramma doppio del triangolo che genera il cono. [...]*
> *Avendo dunque più e più volte fermato l'attenzione su tale diversità in moltissime altre figure, mentre prima, raffigurandomi ad esempio un cilindro come l'unione di parallelogrammi indefiniti per numero e il cono con stessa base e stessa altezza come l'unione di triangoli indefiniti per numero passanti tutti per l'asse, ritenevo che ottenuto il mutuo rapporto di dette figure piane dovesse subito venirne fuori anche il rapporto dei solidi da esse generate, risultando invece già chiaramente che il rapporto delle figure piane generatrici non concordava affatto con quello dei solidi generati mi sembrava si dovesse a buon diritto concludere che avrebbe perduto il tempo e la fatica e che avrebbe trebbiato inutile paglia chi si fosse messo a ricercare la misura delle figure con tale metodo.*
> *Ma dopo aver considerato la cosa un po' più profondamente pervenni finalmente a questa opinione e precisamente che per la nostra faccenda dovessero prendersi piani non intersecantisi tra di loro ma paralleli. In questo infatti, investigati moltissimi casi, in tutti trovai perfetta corrispondenza tanto tra il rapporto dei corpi e quello delle loro sezioni piane quanto tra il rapporto dei piani e quello delle loro linee [...].*
> *Avendo dunque considerato il cilindro e il cono suddetti secati non più per l'asse ma parallelamente alla base, trovai che hanno rapporto uguale a quello del cilindro al cono quei piani che chiamo nel libro II ``tutti i piani'' del cilindro a ``tutti i piani'' del cono, con riferimento alla base comune [...]. Stimai perciò metodo ottimo per investigare la misura delle figure quello di indagare i rapporti delle linee al posto di quello dei piani e i rapporti dei piani al posto di quello dei solidi per procurarmi subito la misura delle figure stesse. La cosa, ritengo, andò come era nei miei voti, come risulterà chiaro a chi leggerà tutto.*

Nel primo e secondo libro espone dunque le ”proposizioni lemmatiche”, cioè i lemmi sui quali si basa il suo metodo, introduce il concetto di “tutte le linee” di una figura piana e di “tutti i piani” di una figura solida e stabilisce che “tutte le linee” di figure piane (e analogamente “tutti i piani di figure solide”) sono grandezze che hanno tra loro rapporto, risultato fondamentale per poter operare con esse.

Nei libri successivi dimostra poi risultati relativi a figure piane e solide originate dalle sezioni coniche e dalle spirali. Nel libro VII egli espone quello che chiamerà “secondo metodo” in cui chiarisce i fondamenti degli indivisibili e che si fonda su teorema I, ancor oggi noto come ``principio di Cavalieri'”.

Teorema I. Proposizione I.
Figure piane qualsiasi, poste tra le stesse parallele, in cui, condotte linee rette qualunque equidistanti alle parallele in questione, le porzioni così intercettate di una qualsiasi di queste rette siano uguali, sono parimenti uguali tra loro.
E figure solide qualsiasi, poste tra gli stessi piani paralleli, in cui, condotti piani qualunque equidistanti a quei piani paralleli, le figure piane di uno qualsiasi dei piani condotti così determinate nei solidi siano uguali, saranno parimenti uguali tra loro.
Si chiamino allora tali figure ugualmente analoghe, sia le piane che le solide confrontate tra loro, e rispetto alle linee di riferimento, o i piani paralleli, tra i quali si suppongono poste, se è necessario indicarlo.




484 GEOMETRIÆ

THEOREMA I. PROPOS. I.

Figuræ planæ quæcunq; in eisdem parallelis constitutæ, in quibus, ductis quibuscunq; eisdem parallelis æquidistantibus rectis lineis, conceptæ cuiuscumq; rectæ lineæ portiones sunt æquales, etiam inter se æquales erunt: Et figuræ solidæ quæcumq; in eisdem planis parallelis constitutæ, in quibus, ductis quibuscunq; planis eisdem planis parallelis æquidistantibus, conceptæ cuiuscunq; sic ducti plani in ipsis solidis figuræ planæ sunt æquales, pariter inter se æquales erunt. Dicentur autem figuræ æqualiter analogæ, tum planæ, tum ipsæ solidæ inter se comparatæ, ac etiam iuxta regulas lineas, seu plana parallela, in quibus esse supponuntur, vbi hoc fuerit opus explicare.

Osserviamo che questo principio si dimostra facilmente quando si sia già in possesso degli strumenti dell’attuale calcolo integrale, infatti equivale a dire che due integrali definiti, tra gli stessi estremi di integrazione, aventi uguali funzioni integrande, sono uguali; o che se due funzioni hanno rapporto costante allora i loro integrali definiti hanno lo stesso rapporto (una costante moltiplicativa può portarsi indifferentemente dentro o fuori dal segno di integrazione): se *f(x)=kg(x)* allora $\int_a^b f(x)dx = k\int_a^b g(x)dx$.

Cavalieri quindi utilizza il principio per calcolare aree e volumi confrontando le proprietà di due figure (ad esempio, le aree di due superfici o i volumi di due solidi) sulla base del rapporto fra gli indivisibili staccati dall'una e dall'altra sopra un medesimo fascio di rette parallele o di piani paralleli. Il procedimento consiste cioè nell'accoppiare sistematicamente gli elementi di una configurazione con i corrispondenti elementi di un'altra configurazione senza tralasciarne alcuno.

Applica il metodo ad esempio per verificare la validità di alcuni problemi risolti da Archimede con il metodo di esaustione sul calcolo dei volumi dei solidi (ad esempio il volume del cono è 1/3 di quello del cilindro circoscritto), in modo analogo trattava l'area compresa fra due curve considerando le aree come somma delle ordinate, e se le ordinate stavano in certo rapporto allora secondo il suo principio anche le aree stanno nello stesso rapporto. Cavalieri aveva successo nell'ottenere risultati corretti perché applicava il suo principio al calcolo di rapporti di aree e volumi in cui i rapporto fra gli indivisibili che li costituivano era costante.

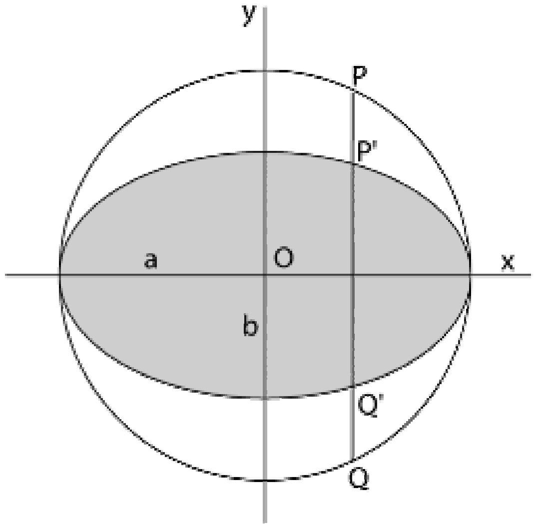
Cavalieri mostra di conoscere il metodo di esaustione, ma è convinto della superiorità del metodo degli indivisibili rispetto ad esso, mosso anche da motivazioni logiche: l'esaustione fa uso essenzialmente della dimostrazione per assurdo, mentre il metodo degli indivisibili porta a realizzare delle dimostrazioni costruttive, anzi è un metodo costruttivo per calcolare aree e volumi, il metodo di esaustione non può essere impiegato per la ricerca di un risultato, ma solo per la dimostrazione di una tesi: una limitazione molto pesante, davvero insostenibile per una comunità scientifica lanciata verso la precisazione di procedimenti nuovi, verso la matematizzazione di larghi settori del sapere umano.

LA QUADRATURA DELL'ELLISSE

Diamo, come esempio di applicazione del metodo degli indivisibili, la determinazione dell'area racchiusa dall'ellisse.

Consideriamo un'ellisse di asse maggiore *2a* ed asse minore *2b* ed un cerchio avente come diametro l'asse maggiore dell'ellisse. Ogni retta perpendicolare al diametro intercetta sul cerchio il segmento PQ e sull'ellisse il segmento P'Q' considerati appunto come indivisibili delle due curve.

Il rapporto fra i due segmenti è *a/b*.



Infatti utilizzando il linguaggio della geometria analitica le equazioni delle curve sono: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x^2 + y^2 = a^2$.

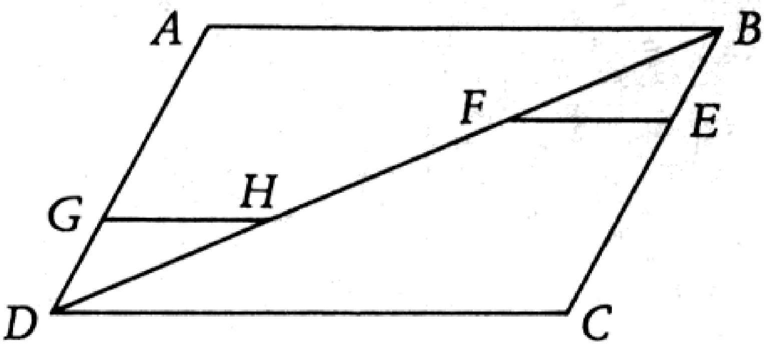
Intersecando le due coniche con rette parallele all'asse delle ordinate, di equazione *x=k*, si ottengono le coordinate e quindi le misure dei due segmenti intercettati: $P'Q' = 2\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - k^2}$, $PQ = 2\sqrt{a^2 - k^2}$ il cui rapporto è sempre $\frac{b}{a}$.

Per il principio di Cavalieri, allora, un uguale rapporto deve intercedere fra l'area del cerchio e quella dell'ellisse in quanto il cerchio è la totalità delle linee PQ e l'ellisse la totalità delle linee P'Q'. Indicando con A l'area dell'ellisse avremo: *πa2 : A = a : b* quindi: *A=πab*.

GLI ACCOSTAMENTI DEGLI INDIVISIBILI AL CALCOLO INTEGRALE

Cavalieri nel 1647 pubblica un’altra opera le Exercitationes geometricae sex nella quale, seguendo una via diversa, confrontò, non più singolarmente gl'indivisibili corrispondenti delle due figure, ma la somma degli indivisibili della prima figura con la somma di quelli della seconda. Questo ultimo metodo è quello che più si accosta all'uso del moderno integrale definito e che accosta Cavalieri stesso tra gli iniziatori del calcolo infinitesimale. Il risultato cui arrivò equivale a risolvere l'integrale che in linguaggio moderno scriviamo come: $\int_0^a x^n dx$.

La formulazione e la soluzione di tale questione sono, in Cavalieri, molto diverse da quelle a noi familiari: infatti egli confronta le potenze dei segmenti di un parallelogrammo di base ed altezza uguali ad a, paralleli alla base con le corrispondenti potenze dei segmenti dell'uno o dell'altro dei due triangoli in cui la diagonale divide il parallelogrammo. Tracciamo la diagonale del parallelogrammo ABCD e sia FE un indivisibile del triangolo BEF, parallelo alla base CD. Prendendo poi DG=FE e, tracciando GH parallelo a CD, si può dimostrare che l'indivisibile GH è uguale a FE.



È pertanto possibile accoppiare tutti gli indivisibili contenuti nel triangolo ABD con i corrispondenti del triangolo BDC. I due triangoli sono quindi uguali. Poiché il parallelogrammo è la somma degli indivisibili contenuti nei due triangoli, la somma delle prime potenze dei segmenti contenuti in uno dei triangoli componenti è metà della somma delle prime potenze dei segmenti contenuti nel parallelogrammo; in altre parole: $\int_0^a x dx = \frac{a^2}{2}$. Poi estese la dimostrazione a potenze superiori, giungendo finalmente a formulare, l'importante generalizzazione che per le potenze fino a *n=9*, il rapporto è 1/(n+1), cosa che in linguaggio moderno si scrive: $\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$.

IL CONCETTO DI INDIVISIBILI E LE CRITICHE AL METODO

Non è facile precisare la concezione che dei suoi indivisibili aveva Cavalieri, sia per l'oscurità della sua esposizione, sia perché egli li introduce in due trattazioni diverse: nel 1635 gli indivisibili appaiono come infinitesimi attuali e nel 1647 come infinitesimi potenziali.

Gli indivisibili per Cavalieri non sono certo gli infinitesimi potenziali sui quali sa fonda il calcolo infinitesimale, ma sono invariabili, sono piccolissimi ma non nulli da potersi considerare come infinitesimi attuali ed in più non sono tanto una realtà dogmatica quanto una comoda finzione, cioè uno strumento di ricerca e di dimostrazione. Forse in questo alternarsi di scelta è da ritenere che gli indivisibili siano stati concepiti prima come infintesi attuali e poi si siano maturati come infinitesimi potenziali. Comunque Cavalieri ebbe il merito di aver coraggiosamente preso in esame con analisi logiche e matematiche rigorose il concetto di infinito e infinitesimo e per questo deve essere considerato come uno degli iniziatori del calcolo infinitesimale.

Resta il fatto che l'opera di Cavalieri non venne accolta con molto favore, anzi non le mancarono le critiche soprattutto da parte del matematico svizzero Paul Guldin, noto come Guldino e dei geometri sostenitori del pensiero e dell'opera di Archimede.

Un tema che affiora spesso nelle obiezioni degli archimedei riguarda la struttura delle grandezze geometriche continue (linee, superfici, solidi) a proposito delle quali essi sostengono l'impossibilità che vengano costruite riunendo grandezze aventi una dimensione in meno.

Ecco per esempio ciò che scrive Guldino nella sua critica a Cavalieri: "che dunque quella superficie sia, e in linguaggio geometrico possa chiamarsi tutte le linee di tale figura, ciò a mio avviso non gli sarà concesso da nessun geometra; mai infatti possono essere chiamate superficie più linee, oppure tutte le linee; giacche la moltitudine delle linee, per quanto grandissima essa sia, non può comporre neppure la più piccola superficie." La tesi di Guldino si collega al risultato più maturo dei punti nodali del pensiero geometrico: "rispondo che il continuo è divisibile all'infinito, ma non consta di infinite parti in atto, bensì soltanto in potenza, le quali [parti] non possono mai essere esaurite". La conclusione di Guldino su ogni singolo teorema di Cavalieri è sempre la medesima: "concludiamo dunque dalle cose che abbiamo addotto che questa proposizione sulle figure piane non è stata in alcun modo dimostrata in maniera valida". Il bersaglio delle critiche dei geometri è proprio il concetto di vicinanza infinita, che ovviamente sfugge ad ogni tentativo di definizione geometrica seria e soprattutto va in direzione contraria al metodo di Esaustione di Archimede.

In risposta alle critiche, Cavalieri, nel 1647, pubblica Contro Guldino. Esercitazione terza, inclusa nelle Exercitationes geometricae sex. Così Cavalieri cita alcune contestazioni di Guldino (il progetto della risposta al matematico svizzero prevedeva un dialogo; le parole ora riportate avrebbero dovuto essere pronunciate da Usulpa Ginuldus, anagramma di Paulus Guldinus: "Infatti in molti passi, sia Archimede, sia molti altri dediti alla Geometria più pura, dimostrano che si possono inscrivere, e circoscrivere ad una figura data altre figure, in modo che la figura circoscritta superi l'inscritta per una grandezza, la quale sia minore di qualsiasi grandezza data del medesimo genere. Concludono dunque che la circoscritta è uguale all'inscritta? Per niente affatto; adoperato invece un altro termine medio dimostrano che la figura alla quale è stata fatta la inscrizione e la circoscrizione, è uguale a una certa altra, la quale sia invero minore della circoscritta, maggiore invece della inscritta".

La lunga polemica finisce per concentrarsi su questioni filosofiche ed è significativo che al metodo cavalieriano sia contrapposto da Guldino proprio il metodo di esaustione, indicato come modello di rigore (“il rigore, disse Bonaventura Cavalieri, ... è affare della filosofia e non della geometria”).

Le applicazioni pratiche delle intuizioni cavalieriane sugli indivisibili superano certamente le limitate potenzialità del metodo di esaustione, rigoroso ma scomodo; tuttavia, non essendo ancora sorrette da un adeguato impianto concettuale e formale, esse finiscono per costituire una teoria intuitiva, ma fragile, non del tutto rigorosa.

LA DIFFUSIONE DEL METODO DEGLI INDIVISIBILI

Il metodo degli indivisibili si diffuse subito in Italia e in Europa e fu accolto con favore dai più importanti matematici del tempo. Non mancarono oltre alle critiche gli ulteriori sviluppi soprattutto grazie a Torricelli.

Uno dei risultati ottenuti da Torricelli con l'applicazione del metodo degli indivisibili che più riscosse l'ammirazione dei contemporanei fu il calcolo del volume del solido iperbolico, problema che ai Geometri del tempo sembrava non solo difficile, ma addirittura impossibile. Egli scrive:

> *Infatti nelle trattazioni scolastiche di geometria si trovano misure di figure limitate da ogni parte e [...] nessuno che io sappia ha estensione infinita. E se si propone di considerare un solido oppure una figura piana infinitamente estesa ciascuno pensa subito che una figura di questo genere debba essere di grandezza infinita. Eppure esiste un solido di grandezza infinita ma dotato di una sottigliezza tale che per quanto prolungato all'infinito non supera la mole di un piccolo cilindro. Esso è il solido generato dall'iperbola [...]*

che Torricelli chiama anche “solido acuto iperbolico”. Anche Cavalieri rimase stupito da tale risultato e in una lettera a Torricelli scrive:

> *Non so come abbi pescato nell'infinita profondità di quel solido così facilmente la sua dimensione poiché veramente a me pare infinitamente lungo.*

La dimostrazione data da Torricelli è duplice: accanto a quella con gli indivisibili compare anche una dimostrazione per soddisfare anche “il lettore poco amico degli indivisibili con il metodo solito di dimostrazione degli antichi geometri, il quale è bensì più lungo ma non per questo, secondo me, più sicuro”. Nell'introduzione si ha un elogio della Geometria degli indivisibili “la quale è un vero modo scientifico di dimostrare, diretto e per così dire naturale” che, sull'entusiasmo degli orizzonti aperti dalla nuova scoperta, porta Torricelli ad affermare:

> *Mi muove a compassione la vecchia geometria , la quale, non conoscendo oppure non ammettendo gli indivisibili, nello studio dei corpi solidi scoprì così poche verità che una penosa povertà di idee è perdurata fino all'età nostra. Infatti i teoremi degli antichi che compongono la dottrina dei solidi rappresentano soltanto una parte delle speculazioni che, nella nostra epoca il mirabile Cavalieri, per non parlare di altri, fece attorno a numerose classi di solidi, differenti di specie e abbondanti in gran numero.*

Tuttavia gia nel 1653 il metodo, ritenuto invecchiato e laborioso, venne abbandonato in seguito alla diffusione di nuovi e potenti strumenti di calcolo.

BIBLIOGRAFIA

1. **M. Kline**, *Storia del pensiero matematico*, Einaudi, Torino 1991 (I e. 1972).
2. Il giardino di Archimede un museo per la Matematica
   http://www2.math.unifi.it/~archimede/archimede/index.html
   sezione "La storia del calcolo infinitesimale attraverso i libri della biblioteca matematica".
3. **Carl B. Boyer**, *Storia della Matematica*, Mondadori.
4. **Alfredo Donnini,** *5 mila anni di pensiero matematico. Note di stoia della matematica 2° volume*, Il Capitello 2002.
5. **Giorgio T. Bagni**, *Il metodo di esaustione nella storia dell'analisi infinitesimale,* periodico di Matematiche VII, 4, ½ (1997), 15-33.
6. *Matematica, articoli interventi di Maristella Galeazzi*, http://matematica.uni-bocconi.it