Scuola di specializzazione insegnamento secondario

INDIRIZZO FISICO-INFORMATICO-MATEMATICO

Buttazzo Francesca

Classe 047A - 048A   II anno

Unità didattica su:

Le funzioni trigonometriche

Introduzione

delle funzioni seno e coseno

ARGOMENTO
Le funzioni trigonometriche: introduzione delle funzioni seno e coseno

COLLOCAZIONE
3° Liceo scientifico

NUMERO DELLE ORE
15 Ore

PREREQUISITI

- Criteri di similitudine dei triangoli.
- Conoscenza del piano cartesiano.
- Conoscenza della misura degli angoli in gradi sessagesimali.
- Relazioni tra lati e angoli in triangoli rettangoli con angoli di 45°, 30° e 60°.
- Teorema di Pitagora.
- Conoscenza del concetto di funzione.

OBIETTIVI DIDATTICI GENERALI

- Promuovere l'approfondimento non mnemonico.
- Avvicinare lo strumento matematico alla realtà: incentivare lo sviluppo di una mentalità che guardi alla matematica come strumento di analisi e di interpretazione della realtà (matematica della realtà contrapposta alla matematica scolastica).
- Potenziare la capacità critica, di ragionamento, il coinvolgimento affettivo e personale, che rende possibile il cambiamento.
- Rendere consapevoli che la matematica non insegna le parole, ma a parlare e ad utilizzare un linguaggio specifico, non le dimostrazioni, ma a dimostrare, non i formalismi, ma a formalizzare.
- Stimolare negli allievi un'esigenza di apprendimento a livello metacognitivo.

OBIETTIVI DIDATTICI SPECIFICI

- Conoscere le definizioni di seno, coseno e radiante.
- Saper calcolare il seno e il coseno di un angolo dato.
- Saper calcolare le relazioni tra angoli associati.
- Conoscenza della relazione tra seno e coseno e dei teoremi del seno e del coseno.
- Saper risolvere triangoli rettangoli e non.
- Risolvere problemi che richiedono l'uso delle funzioni trigonometriche.

METODOLOGIE

- Le lezioni saranno sviluppate in modo da avere una parte di lezione interattiva per favorire l'intuizione, la capacità di osservazione e di analisi da parte degli studenti e una parte finale in cui l'insegnante opera la sintesi e rende esplicite le conclusioni raggiunte: la lezione interattiva è rivolta a far osservare agli studenti le relazioni tra angoli e lati di un triangolo rettangolo ed è finalizzata a costruire le definizioni delle funzioni trigonometriche.
- Utilizzo di strumenti multimediali, in considerazione del fatto che gli studenti di oggi risentono fortemente dell'impiego di tali strumenti.
- Condivisione dei saperi naturali.
- Trasformazione delle difficoltà dei singoli in risorsa per tutti attraverso la condivisione delle difficoltà, la ricerca delle loro origini, la rivisitazione dei concetti per un riassetto delle mappe cognitive.

STRUMENTI DIDATTICI

- Lavagna tradizionale
- Lavagna luminosa e lucidi
- Computer
- Calcolatrice
- Goniometro
- Riga e compasso
- Libri di testo

STRATEGIE DI RECUPERO

L'insegnante tende ad inserire nell'ambiente didattico l'attività di recupero, attuando un cammino a ritroso che faccia emergere l'origine delle difficoltà, in modo che le incertezze dei singoli diventino una risorsa per tutti. Questo si può ottenere ritornando sui nodi concettuali con modalità diverse e/o semplificate in modo che l'alunno possa adeguatamente apprendere. In particolare come prima attività di recupero si propone l'utilizzo di:

- goniometro, riga, compasso e calcolatrice per calcolare seno e coseno di alcuni triangoli rettangoli
- materiali poveri, quali carta e spago:
  - per la costruzione di triangoli rettangoli interni ad un triangolo qualsiasi.
  - per la costruzione dei grafici delle funzioni seno e coseno sul piano cartesiano.
- software specifici per una migliore visualizzazione delle proprietà dei triangoli e delle relazioni tra essi intercorrenti.

In tali attività gli studenti potranno lavorare insieme o divisi in piccoli gruppi, seguiti e coordinati dall'insegnante.

SVOLGIMENTO DI UNA LEZIONE TIPO SULLA TRIGONOMETRIA

- All'inizio vengono proposti dati storici relativi al passato in cui il problema si è originato e si sottolinea il valore culturale del retroterra da cui deriva, la sua evoluzione nel tempo fino ad evidenziare il suo valore e la sua efficacia attraverso i secoli fino al momento presente.
- La seconda tappa del percorso consiste nel richiedere agli alunni,divisi in gruppi, la soluzione del problema, a cui segue la condivisione dei saperi e la comunicazione dei risultati raggiunti
- da cui si evince la constatazione di una crisi dovuta alla mancanza di strumenti adeguati alla soluzione e la conseguente motivata richiesta di spiegazione e chiarimento all'insegnante
- che, sollecitato, inizia a far costruire agli alunni le definizione e le principali proprietà delle funzioni trigonometriche.

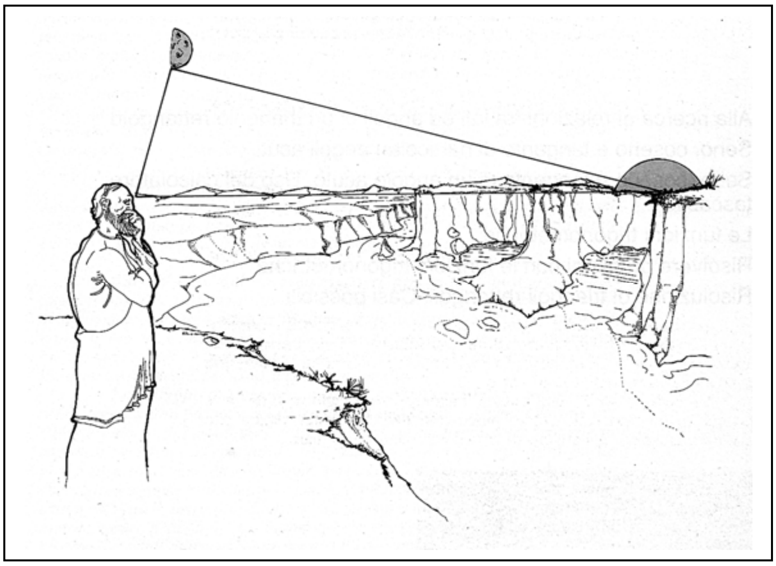
ALCUNE CURIOSITÁ STORICHE…

La parola trigonometria deriva dal greco: "metron" che significa misura e "trigonos"che significa tre angoli: misura di un triangolo, studio dei suoi elementi, angoli e lati, e delle relazioni tra questi.
Lo studio della trigonometria non è il solo studio di triangoli, ma è un campo che spazia dall'astronomia all'ottica, dalla topografia al… mettere pannelli solari!
Il termine trigonometria fu dato nel 1595 dal matematico tedesco Bartolomeus Pitiscus, in un libro che aveva intitolato "Trigonometria, ovvero un trattato breve e intelligente sulla risoluzione dei triangoli". Per molti secoli la trigonometria dovette i suoi progressi quasi esclusivamente all'opera di grandi astronomi e geografi, questo anche perché i fenomeni celesti quali: le fasi lunari, l'alternarsi di notte e dì, sono fenomeni che non sfuggivano neppure all'osservatore più distratto. Due sono gli astri che, per la loro grandezza, avevano impressionato: il Sole e la Luna. Quanto distavano dalla Terra? Quanto erano grandi? È con queste domande che ha inizio l'astronomia e quindi la trigonometria.
La nascita di questa scienza si deve ad Ipparco di Nicea (II sec. a.C.) e a Claudio Tolomeo (II sec.d.C.), entrambi più astronomi e geografi che matematici! Contributi notevoli furono portati dagli Arabi, dal matematico tedesco Johann Muller, detto il Regiomontano, al quale si deve l'opera "De triangulis omnimodis libri V", del 1464, che costituisce il primo libro interamente dedicato alla trigonometria, da Copernico, Tycho Brahe, i quali erano intenti a descrivere e prevedere con sempre maggior

precisione i fenomeni celesti, anche per un più esatto e comodo calcolo di longitudini e latitudini. Lo sviluppo dell'algebra (fine del '500) ha portato i matematici ad unificare varie scoperte di trigonometria fatte in epoche diverse, mettendo in luce quelle idee fondamentali che illuminano tutta una teoria. Sono queste idee, oggi applicate, che aiutano a risolvere un gran numero di problemi, dalla topografia all'acustica, dall'elettronica all'economia.

RELAZIONI TRA LATI ED ANGOLI DI UN TRIANGOLO RETTANGOLO

Siamo in Grecia nel II sec.a.C. e Aristarco di Samo, appassionato studioso del cielo, riesce a fissare il rapporto tra le distanze Terra-Sole e Terra-Luna.
"Quando la Luna si presenta come una perfetta mezzaluna, l'angolo fra le visuali del Sole e della Luna è inferiore ad un angolo retto per un trentesimo di quadrante: quanto è più lontano dalla Terra il Sole rispetto alla Luna?"

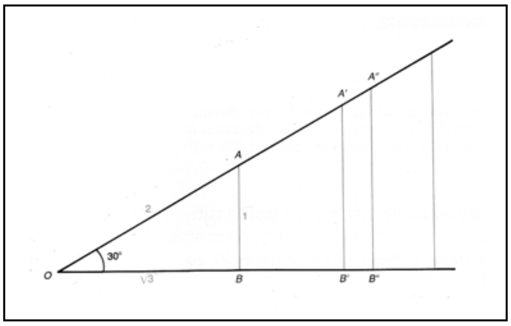


Poiché al tempo di Aristarco non c'era un uso della misura degli angoli in gradi il problema descritto è di difficile comprensione.
Usando la misura dell'angolo in gradi il "quadrante" di Aristarco equivale ad un angolo di 90° e un trentesimo di quadrante corrisponde ad un angolo ampio 3°.
L'angolo indicato da Aristarco sarà ampio: 90°-3°=87°.
Il problema può essere schematizzato nel triangolo LTS di cui si conosce l'angolo LTS=87° e si vuole calcolare il rapporto fra la istanza Terra-Luna (ovvero il cateto LT) e la distanza Terra-Sole (ovvero l'ipotenusa TS).
Ma quale relazione lega l'angolo LTS al rapporto $\frac{LT}{TS}$?

Con le conoscenze che abbiamo acquisito finora è possibile risolvere questo triangolo?

STUDIO DI TRIANGOLI RETTANGOLI NOTI

1) Triangolo con angoli di 30° - 60° – 90°

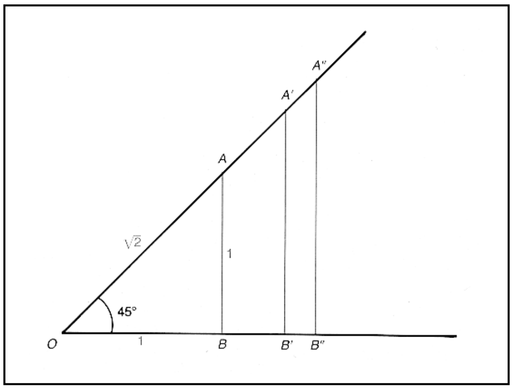


$$\frac{AB'}{AC'} = \frac{AB''}{AC''} = \frac{AB}{AC} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{B'C'}{AC'} = \frac{B''C''}{AC''} = \frac{BC}{AC} = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2}$$

Si osserva che questi rapporti sono indipendenti dai lati del triangolo preso in considerazione.

2) Triangolo con angoli di 45° - 45° - 90°



$$\frac{AB'}{AC'} = \frac{AB''}{AC''} = \frac{AB}{AC} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{B'C'}{AC'} = \frac{B''C''}{AC''} = \frac{BC}{AC} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Si osserva che questi rapporti sono uguali e sono indipendenti dai lati del triangolo preso in considerazione.

Sono stati individuati dei rapporti che rimangono costanti una volta fissato un angolo acuto.
Ai numeri che indicano il valore di questi rapporti è stato dato un nome particolare: seno e coseno.

ESEMPIO 1.

$$\frac{AB}{AC} = \frac{cateto.adiacente.all'angolo.di30°}{ipotenusa} = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{cateo.opposto.all'angolo.di30°}{ipotenusa} = sen30° = \frac{1}{2}$$

ESEMPIO 2.

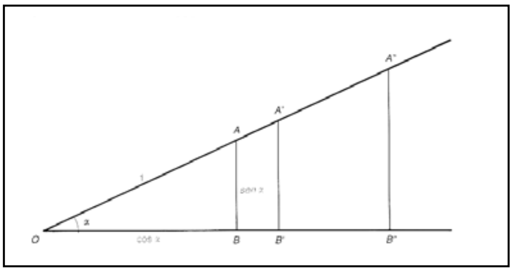
$$\frac{AB}{AC} = \frac{cateto.adiacente.all'angolo.di45°}{ipotenusa} = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{cateto.adiacente.all'angolo.di45°}{ipotenusa} = sen45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

I procedimenti seguiti a partire da angoli acuti particolari, possono essere ripetuti a partire da un qualunque angolo acuto, ampio α.
Così si ottiene :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{cateto.adiacente.all'angolo\alpha}{ipotenusa} = \cos\alpha$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{cateo.opposto.all'angolo\alpha}{ipotenusa} = sen\alpha$$



TAVOLE TRIGONOMETRICHE

Si fa costruire agli studenti una tavola trigonometrica determinando seno e coseno per una serie di angoli che ci interessano.
Tali tavole verranno successivamente ampliate quando si passerà a definire seno e coseno anche per angoli ottusi.

USO DELLA CALCOLATRICE

Si insegna ai ragazzi come calcolare le funzioni seno e coseno con l’uso della calcolatrice, spiegando la differenza delle diverse possibilità di esprimere la misura degli angoli con unità differenti: gradi sessagesimali, gradi centesimali, radianti. Dopo aver compilato una tabella dove abbiamo riportato il valore del seno e del coseno per alcuni angoli, dopo averlo approssimato con il risultato fornito dalla calcolatrice, si nota che il seno e il coseno non raggiungono mai il valore 1. La cosa è evidente: sen α indica il rapporto tra il cateto opposto all'angolo α e l'ipotenusa, e il cos α indica il rapporto tra il cateto adiacente all'angolo α e l'ipotenusa: in entrambi i casi il cateto è sempre minore dell'ipotenusa e quindi il rapporto sarà sempre più piccolo di 1. Si osserva che ad ogni angolo α corrisponde un diverso valore di sen α e cos α; si è individuato un procedimento che permette di associare ad un angolo un ben determinato valore del seno di quell'angolo.

Quindi le corrispondenze :

$$\alpha \xrightarrow{sen} sen\alpha$$
$$\alpha \xrightarrow{\cos} \cos\alpha$$

sono funzioni; cioè una "legge" che fa corrispondere ad un valore di α un solo valore di, rispettivamente, sen α e cos α.
Le funzioni ora esaminate :

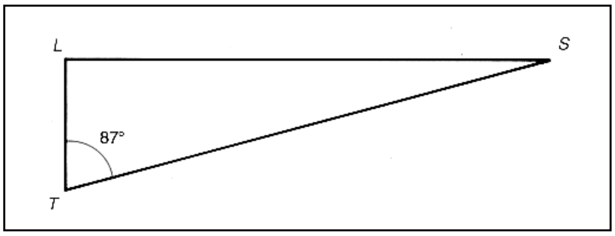
$$\alpha \xrightarrow{sen} sen\alpha$$
$$\alpha \xrightarrow{\cos} \cos\alpha$$

prendono il nome di funzioni trigonometriche per ricordare che le leggi di corrispondenza sono costruite su misure relative a triangoli.

RISOLUZIONE DI PROBLEMI CON L'USO DELLE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

1) PROBLEMA DI ARISTARCO

Si voleva conoscere il rapporto tra la distanza LT (Terra – Luna) e la distanza TS (Terra – Sole) conoscendo l'angolo LTS che Aristarco aveva calcolato valutandolo di 87°.



A questo punto la risposta è immediata :

$\frac{LT}{TS}$ = cos 87° ≈ 0,583 ;

quindi si ha TS ≈ $\frac{LT}{0.0583}$ ossia TS ≈ 19 LT.

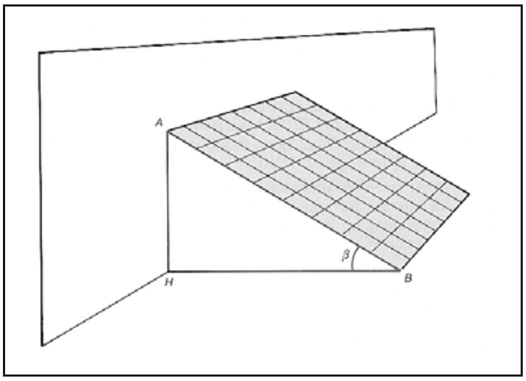
Quindi il sole sarebbe lontano dalla terra circa 19 volte più della luna.
Questo risultato è errato.
Oggi che conosciamo le distanze si sa che : LT ≈ 380000 km e TS ≈ 145000000 km.
Perciò si ha TS ≈ 382 LT.
Che cosa ha sbagliato Aristarco?
A causa dei grossolani strumenti di misura allora disponibili Aristarco aveva misurato l'angolo LTS valutandolo approssimativamente.
Le misure attuali di questo angolo forniscono : LTS = 89°51'.
Con questa nuova misura dell'angolo, si ottiene :
$\frac{LT}{TS} = \cos 89°51' \approx 0{,}00262$ da cui TS ≈ 382 LT.
Si osserva come un errore che sembrava così modesto nella misura dell'angolo (nemmeno 3°) ha portato, dunque, ad un enorme errore nel valore del rapporto.

2) IL PANNELLO SOLARE

Si vuole installare su una terrazza di Roma un pannello solare quadrato, di lato 3m. I costruttori raccomandano d'installare il pannello in modo che formi con il piano orizzontale un angolo di 10° inferiore rispetto alla latitudine del luogo.
Sapendo che Roma si trova ad una latitudine di 41° :

1. Di quanti gradi dovrà essere inclinato il pannello ?
2. A che altezza da terra arriverà la sommità del pannello?
3. A che distanza dalla parete si troverà la sua base ?

Soluzione



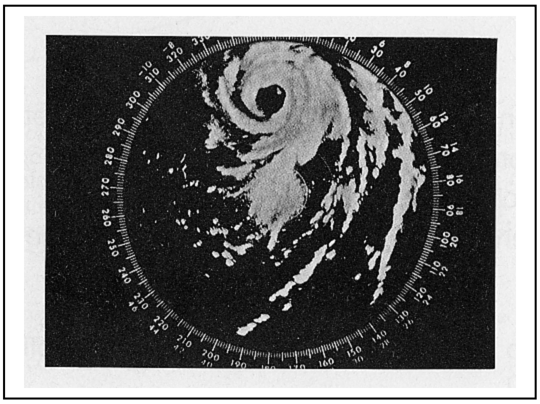
Il pannello dovrà essere inclinato di 31°
Usando le funzioni trigonometriche, possiamo scrivere :
$\frac{AH}{AB} = \text{sen}\ \alpha$ e $\frac{HB}{AB} = \cos \alpha$
cioè AH = AB sen α e HB = AB cos α.

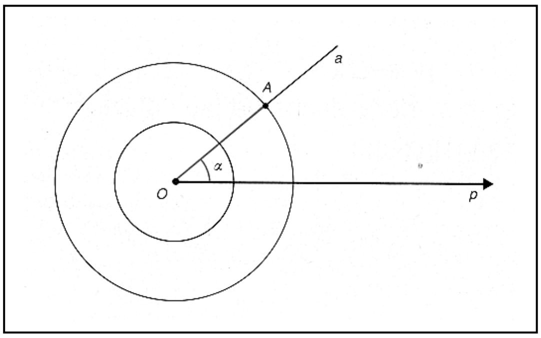
Sostituendo i valori numerici, si ottiene :
AH = 3 sen 31° e HB=3 cos 31°.
Quindi : AH ≈ 1,545 m e HB ≈ 2,571 m.

Con questi problemi che abbiamo esaminato si è avuta una esemplificazione delle applicazioni delle funzioni trigonometriche : abbiamo risolto un triangolo rettangolo (noti alcuni elementi del triangolo ci siamo determinati lati e angoli).

ESTENSIONE DELLE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

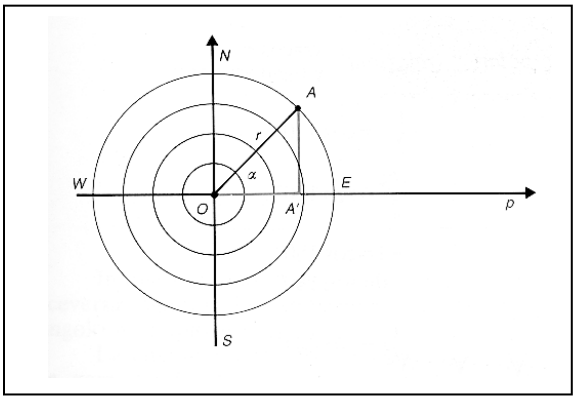
Finora abbiamo rivolto e dato formule solo per problemi riguardanti triangoli acutangoli; d'altra parte sembra assurdo che un problema di astronomia, di fisica non sia più risolubile quando vi compaiono dei triangoli ottusangoli.
Uno strumento, che ci suggerisce come ampliare le nostre conoscenze, è il radar, strumento fondamentale nella navigazione marittima e aerea.
Se osserviamo lo schermo, quando il radar è in funzione, vediamo una semiretta che spazza lo schermo girando in senso antiorario; la presenza di un ostacolo che si trova nella direzione in cui punta la semiretta è segnalata dall'accendersi di un puntino luminoso.

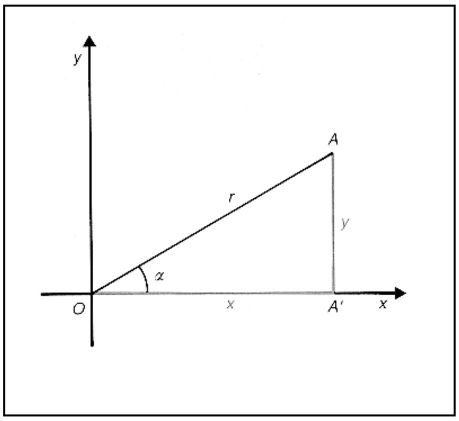




Si può conoscere facilmente la posizione di un ostacolo A rispetto all'osservatore O mediante due numeri che si leggono direttamente sullo schermo :
1) la distanza OA = r;
2) l'angolo α che ha descritto la semiretta Oa, ha partire dalla posizione Op.
Quindi la posizione di un punto A sullo schermo viene individuata da due numeri, r ed α, chiamati raggio e anomalia: A(r; α).
Il punto O prende il nome di polo, la semiretta Op il nome di asse polare, si è così stabilito un riferimento polare.
Spesso usando il radar, si incontra il seguente problema: riportare sulla carta geografica la posizione di un ostacolo A rilevato sullo schermo. Bisogna allora individuare il punto A rispetto alle direzioni Nord-Sud ed Est-Ovest, bisogna cioè

darne longitudine e latitudine, indicando le distanze OA’ e AA’; quindi è come se traducessimo le coordinate polari di un punto A in coordinate cartesiane.





Fissando un riferimento cartesiano con l‘asse delle x coincidente con Op ed osservando il triangolo OAA’, si può scrivere:

$$\frac{x}{r} = \cos\alpha \longrightarrow x = r\cos\alpha$$

$$\frac{y}{r} = sen\alpha \longrightarrow y = rsen\alpha$$

in particolare se $r = 1$, si ottiene:

$x = \cos\alpha$ e $y = sen\alpha$.

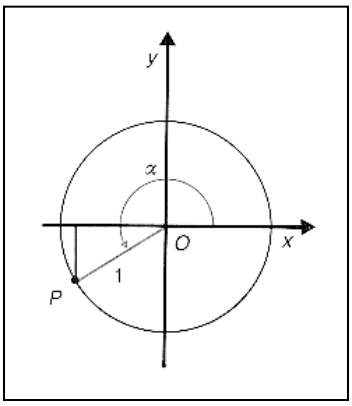
Si stabilisce così una corrispondenza tra coordinate cartesiane e polari
di un punto.

Fissato un punto P di coordinate polari (1; α) se ne calcolano le coordinate cartesiane (x;y) e si stabilisce che risulta:

$\cos\alpha = x$

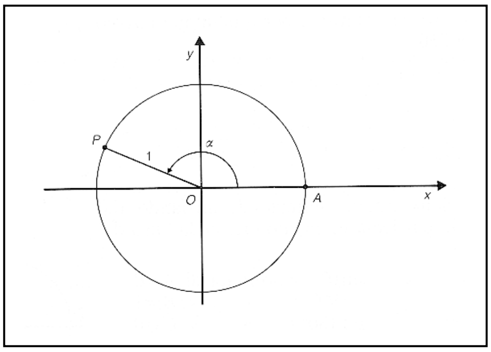
$sen\alpha = y$.

In questo modo il seno e il coseno sono definiti per tutti i valori dell’angolo compresi tra 0° e 360°.



LA CIRCONFERENZA GONIOMETRICA

In un sistema di coordinate cartesiane si disegna una circonferenza che ha centro nell'origine e raggio unitario. Relativamente a questa circonferenza, si stabilisce un modo convenzionale di rappresentare gli angoli: si legge l'ampiezza α di un angolo AOP in verso antiorario, scegliendo sempre come primo lato OA e come secondo OP. In questo modo, ogni angolo è individuato da un solo raggio OP e ogni raggio OP può essere considerato come secondo lato di un angolo, ampio fino a 360°.



La circonferenza così caratterizzata prende il nome di circonferenza goniometrica per ricordare che si è stabilito un modo di misurare gli angoli.
Fissato un angolo α sulla circonferenza goniometrica, si considera il punto P ad esso corrispondente e si definisce:
cos α = ascissa del punto P e
sen α = ordinata del punto P.
Si nota che, comunque sia ampio l'angolo α, risulta sempre : $-1 \leq \text{sen}\ \alpha \leq 1$ e $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$.
Queste limitazioni sono evidenti, dato che cos α e sen α sono ascissa e ordinata di un punto P che "gira" sulla circonferenza di centro 0 e raggio 1.

Le funzioni:

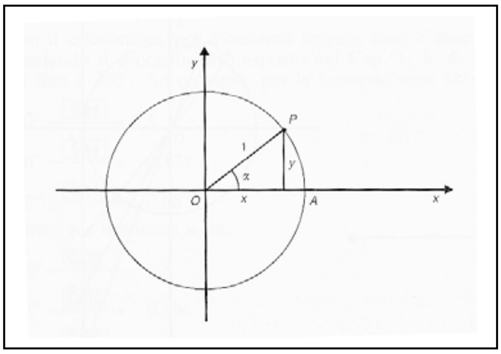
$\alpha \xrightarrow{sen} sen\alpha$

$\alpha \xrightarrow{\cos} \cos\alpha$

definite mediante circonferenza goniometrica prendono il nome di funzioni goniometriche.

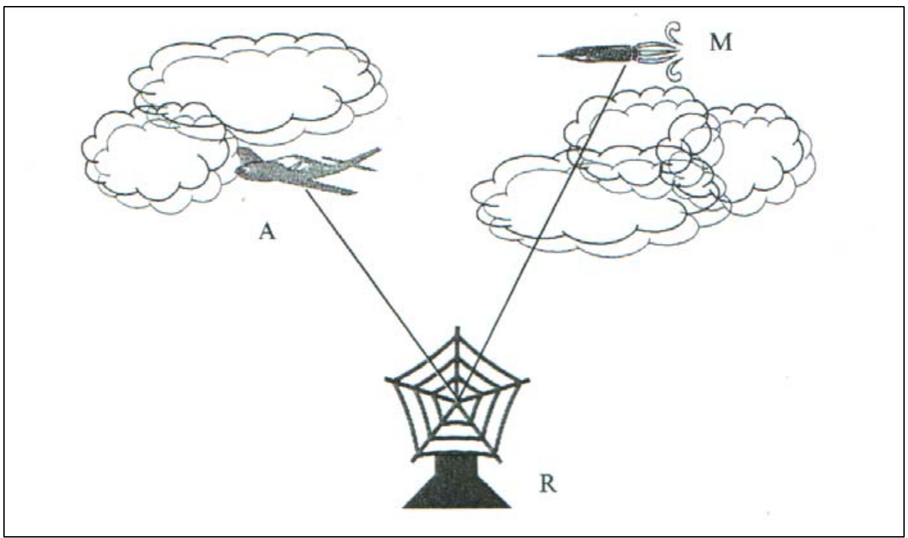
RELAZIONE CHE LEGA SENO E COSENO

Consideriamo un punto P che si muove sulla circonferenza di centro 0 e raggio 1, P ha sempre le coordinate x,y legate dall'equazione $x^2+y^2=1$.
Ora sulla circonferenza goniometrica, ogni raggio OP è lato di un angolo AOP e si ha :
$x = \cos\alpha$ e $y = \operatorname{sen}\alpha$, sostituendole in $x^2+y^2=1$ si ottiene :
$(\operatorname{sen}\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$, ovvero $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.



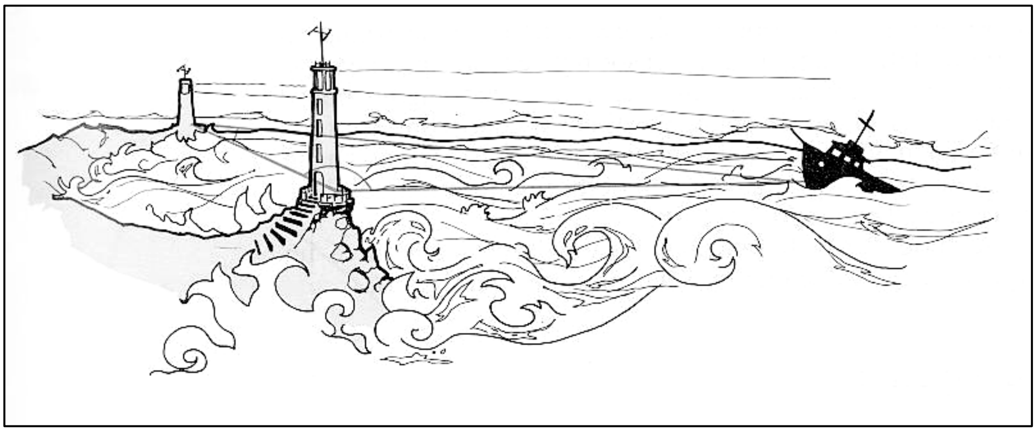
PROBLEMI CHE MOTIVANO LA RICERCA DI RELAZIONI TRA LATI ED ANGOLI DI UN TRIANGOLO QUALUNQUE

ESERCIZIO 1
Per guidare un missile antiaereo, la stazione radar da terra deve valutare in ogni istante la distanza tra l'aereo da colpire e il missile. Il radar, disposto in R, misura la distanza RA (radar – aereo) e quella RM (radar – missile) e misura l'angolo α tra queste due direzioni. Quello che ci rimane da calcolare è AM (distanza aereo – missile).
Non possiamo usare le formule a noi note se uno dei due angoli, in A o in M, non è retto. Supponendo che RA = 12 km RM = 20 km e α = 65°, quanto dista l'aereo dal missile ?



ESERCIZIO 2

Il radiogoniometro è uno strumento molto utile nella navigazione marittima e viene usato per determinare la direzione da cui proviene un segnale radio. Ad esempio, nel caso in cui accada che una nave N avverta di trovarsi in difficoltà e il segnale venga ricevuto da due capitanerie di porto, A e B, che distano tra loro 400 km in linea d'aria. Con il radiogoniometro le due capitanerie rilevano gli angoli $\alpha = 110°$ e $\beta=50°$. Ci si chiede: quanto dista la nave N da A e da B?

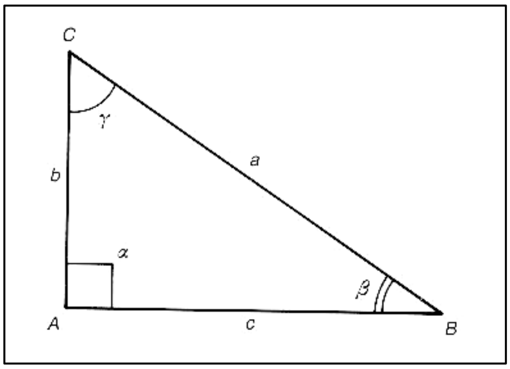


I problemi proposti sono risolubili? Con le conoscenze che abbiamo acquisito sinora non riusciamo a risolverli, abbiamo bisogno di qualcosa di più.

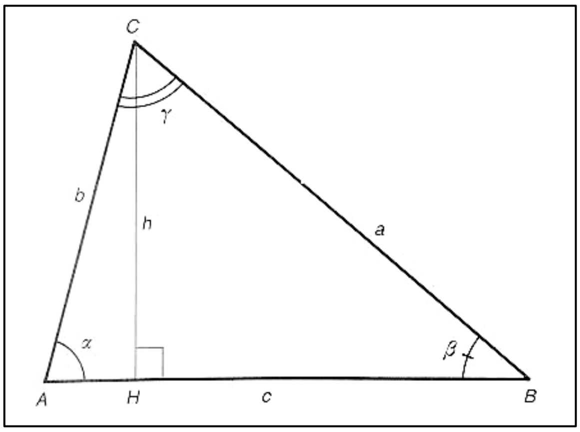
.

IL TEOREMA DEI SENI

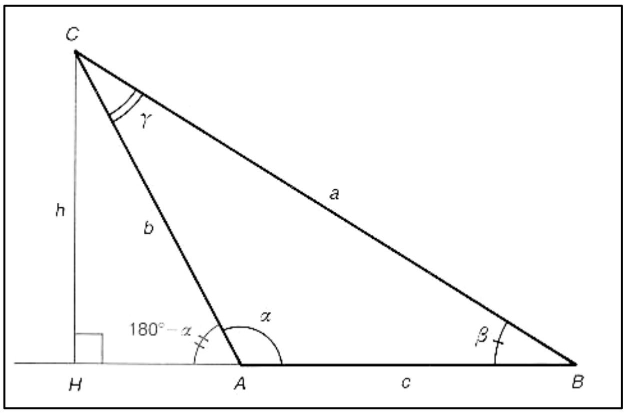
Preso un qualunque triangolo rettangolo ABC di lati a, b, c, ed angoli $\alpha = 90°$, β, γ sappiamo che: $\frac{b}{a} = sen\alpha$, ovvero b = a sen α.



Consideriamo un triangolo acutangolo ABC. Tracciamo l'altezza CH, di lunghezza h e consideriamo i triangoli rettangoli ACH e CHB; risulta che: h = a sen β e h = b sen α, ma allora: a sen β = b sen α, cioè $\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta}$.

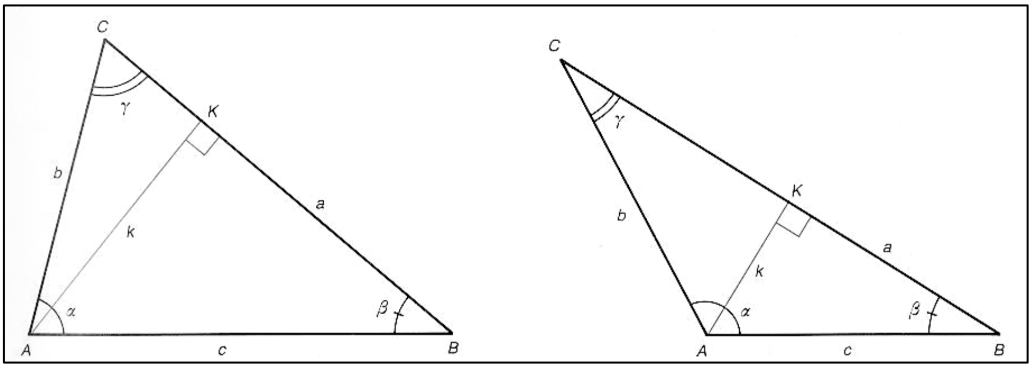


Questa relazione è valida anche per i triangoli ottusangoli, infatti preso ABC, triangolo ottusangolo in α e tracciata l'altezza CH otteniamo, nuovamente, due triangoli, CHB e CHA, per i quali possiamo scrivere : h = a sen β e h = b sen (180 – α), ma sapendo che sen (180 – α) = sen α si ottiene che : a sen β = b sen α, ovvero: $\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta}$.



Tale relazione è quindi valida per un qualunque triangolo: lega tra loro due angoli e due lati dello stesso triangolo, cerchiamo, ora una formula dove intervengono anche il terzo lato e il terzo angolo; è sufficiente tracciare un'altra altezza ad esempio AK di lunghezza k che si ottiene: k= b sen γ e k = c sen β allora b sen γ = c sen β e dunque : $\frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma}$.

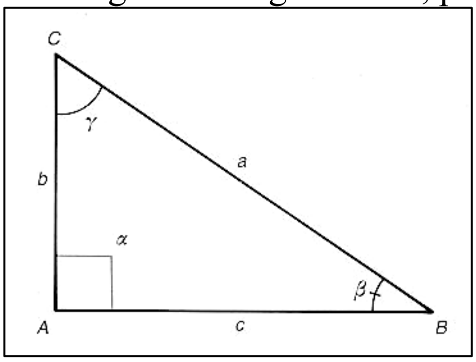
Confrontandola con la relazione ottenuta prima si può scrivere : $\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma}$.



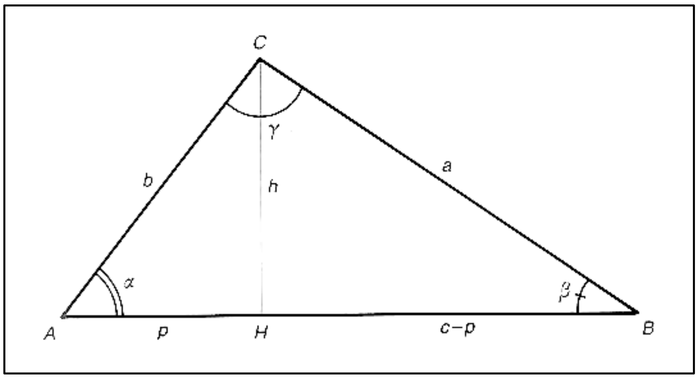
Questa relazione è nota come il "teorema dei seni": per un triangolo qualunque è costante il rapporto tra un lato e il seno dell'angolo opposto.
Poiché il teorema dei seni è valido per un qualunque triangolo è valido anche per i triangoli rettangoli. Infatti se α = 90° otteniamo: $\frac{a}{sen 90°} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma}$ essendo sen 90°=1 si ottiene: $\frac{b}{sen\beta} = a$ ossia b=a senβ e $\frac{c}{sen\gamma} = a$ ossia c = a sen γ, che sono relazioni a noi note.

IL TEOREMA DEL COSENO

Cerchiamo altre relazioni tra lati ed angoli di un triangolo qualunque : riferiamoci al triangolo rettangolo ABC, possiamo scrivere che $a^2=b^2+c^2$ e c = a cos β .

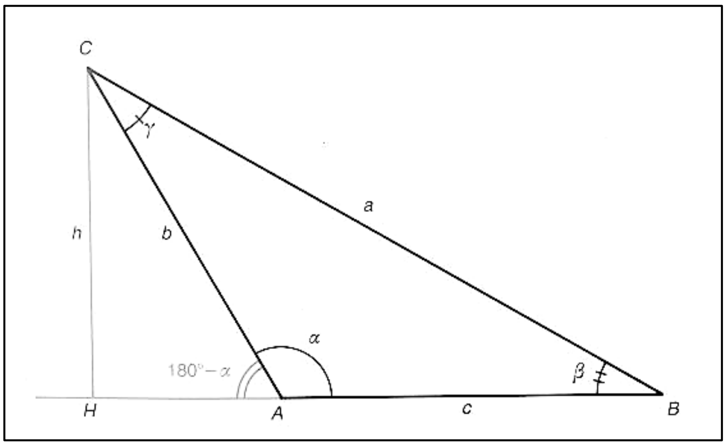


A questo punto passiamo ad un triangolo acutangolo ABC e tracciamo l'altezza CH di lunghezza h ed indichiamo con p la lunghezza AH. Si è così ottenuto due triangoli rettangoli per i quali valgono le seguenti relazioni : $b^2=h^2+p^2$ e p = b cos α per il triangolo AHC, mentre per il triangolo CHB si ha : $a^2=h^2+(c-p)^2$.



Sostituendo i valori trovati in precedenza si ottiene : $a^2=b^2+c^2-2bc \cos \alpha$.
Alla stessa relazione si arriva esaminando un triangolo ottusangolo; basta tenere presente che : $\cos(180° - \alpha) = -\cos \alpha$. Possiamo ripetere il ragionamento a partire da un'altra altezza del triangolo. In definitiva scopriamo che per un qualunque triangolo valgono :

$a^2=b^2+c^2-2bc \cos \alpha$,
$b^2=a^2+c^2-2ac \cos \beta$,
$c^2=a^2+b^2-2ab \cos \gamma$.



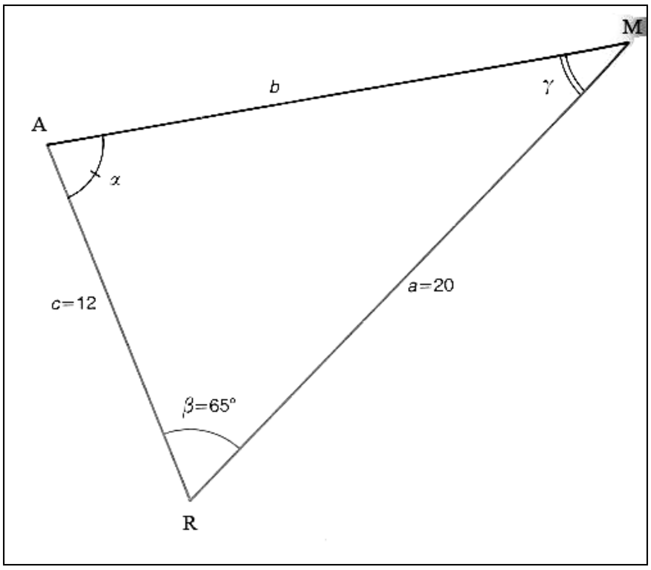
Queste relazioni costituiscono il teorema del coseno.
Osserviamo che se $\alpha = 90°$ dalla prima relazione risulta che : $a^2=b^2+c^2-2bc \cos 90°$ si ha $a^2=b^2+c^2$.
Si ottiene di nuovo il teorema di Pitagora, per questo motivo il teorema del coseno è anche detto teorema di Pitagora generalizzato. In alcuni testi il teorema del coseno è detto anche teorema di Carnot, in realtà tale teorema era noto fin dai tempi di Euclide, anche se in forma diversa; Carnot dette solo un contributo originale, generalizzandolo alla geometria dello spazio.

RISOLUZIONE DEI PROBLEMI
I teoremi del seno e del coseno ci permettono di risolvere il problema introdotto precedentemente.

ESERCIZIO 1 :

Il problema della guida radar del missile.

RA = 12 km RM = 20 km ARM = 65°

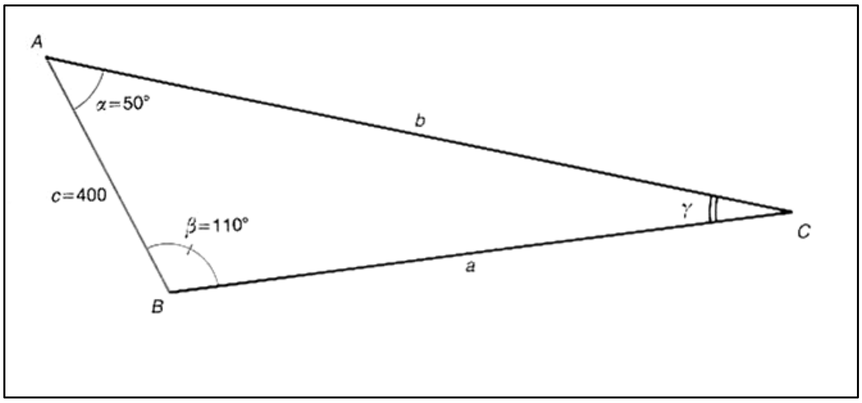


Per calcolarci la distanza AM = b, si fa uso della formula:
$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$,
sostituendo i valori noti si ottiene:
$b^2=12^2+20^2-2\ 20\ 12\cos 65°$, svolgendo i calcoli si trova: $b \approx 18{,}47$km.
Essendo noti tutti i lati e un angolo è ora possibile determinare l'angolo γ, che individua la rotta da seguire per raggiungere il bersaglio A : $\frac{b}{sen\beta}=\frac{c}{sen\gamma}$ ossia

$$sen\gamma=\frac{c}{b}sen\beta\ .$$

Quindi sen γ = 0,589 ossia γ=36°.
Noto γ è possibile determinare anche α e così abbiamo risolto il triangolo.

ESERCIZIO 2 :
Il problema di determinare la posizione di una nave a partire dai dati di due radio goniometri è schematizzato in figura dal triangolo ABN.
AB = c = 400 km
α = 50°
β = 110°
si vogliono conoscere le lunghezze a e b.



Osserviamo che noti α e β possiamo conoscere anche l'angolo γ:
γ = 180° - 110° - 50° = 20°.
Noti tre angoli e un lato si può utilizzare il teorema dei seni:
$\frac{a}{sen50°} = \frac{400}{sen20°}$ dunque si ha $a = 400\frac{sen50°}{sen20°} \approx 895{,}9$ km,

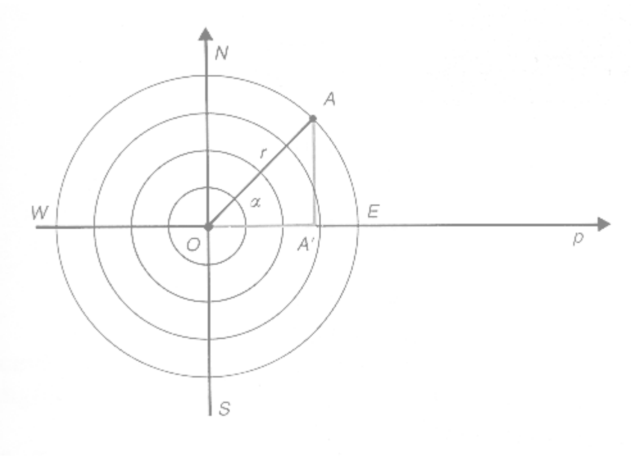
$\frac{b}{sen110°} = \frac{400}{sen20°}$ dunque si ha $b = 400\frac{sen110°}{sen20°} \approx 1099$ km.

Abbiamo così risolto alcuni problemi seguendo dei procedimenti analoghi: si disegna un triangolo di cui sono noti alcuni elementi e si determinano gli elementi incogniti a partire da quelli assegnati: questi procedimenti possono essere eseguiti per risolvere qualsiasi triangolo purché valga uno dei seguenti criteri di congruenza:

- si conoscono due lati e l'angolo compreso (teorema del coseno),
- si conoscono un lato e due angoli (teorema dei seni),
- si conoscono tre lati (teorema del coseno).

LA MISURA DEGLI ANGOLI IN RADIANTI

Un nuovo modo di misura gli angoli viene dalla ricerca di relazioni fra gli angoli al centro e corrispondenti archi di circonferenza.
Si può osservare che al raddoppiare dell'angolo al centro raddoppia anche la lunghezza del corrispondente arco; più in generale si sa che gli angoli al centro e i relativi archi sono direttamente proporzionali : $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{l}{m}$.

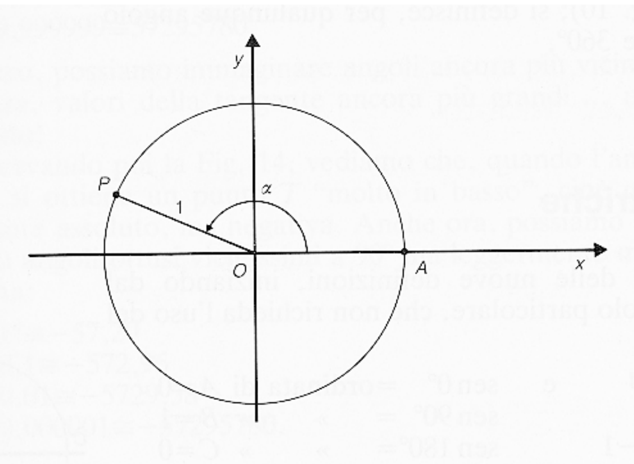


Se scegliamo, ad esempio, β = 360° allora l'arco corrispondente sarà l'intera circonferenza, lunga 2πr.

Si avrà allora : $\frac{\alpha}{360°} = \frac{l}{2\pi r}$ da cui $\frac{l}{r} = \frac{\pi}{180°}\alpha$.

Osserviamo che il rapporto $\frac{l}{r}$. Dipende solo dall'angolo α e non varia se varia il raggio, r, della circonferenza.

A questo rapporto $\frac{l}{r}$, che rimane sempre costante, che non dipende dal raggio della circonferenza scelta, si dà il nome di "misura dell'angolo in radianti".



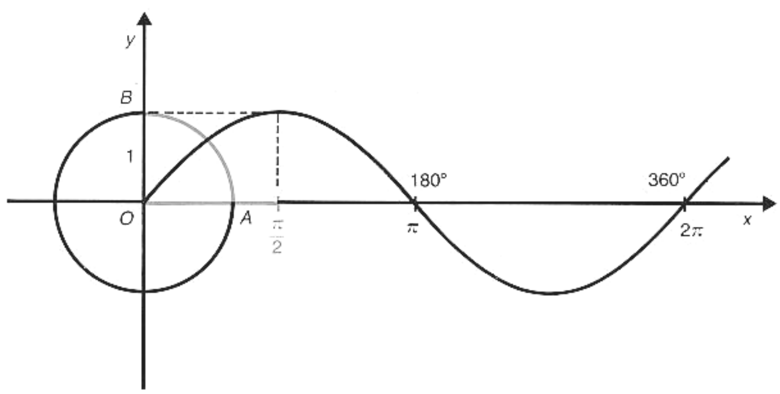
Quindi presa una circonferenza di raggio 1 e centro 0, che è anche il vertice dell'angolo AOP si ha che l'angolo intercetta sulla circonferenza un arco AP la cui lunghezza l indica proprio la misura dell'angolo in radianti. La misura degli angoli in radianti conduce a considerare, invece degli angoli, i corrispondenti archi sulla circonferenza di raggio unitario. Calcoliamo alcuni semplici casi di misura di un angolo in radianti.

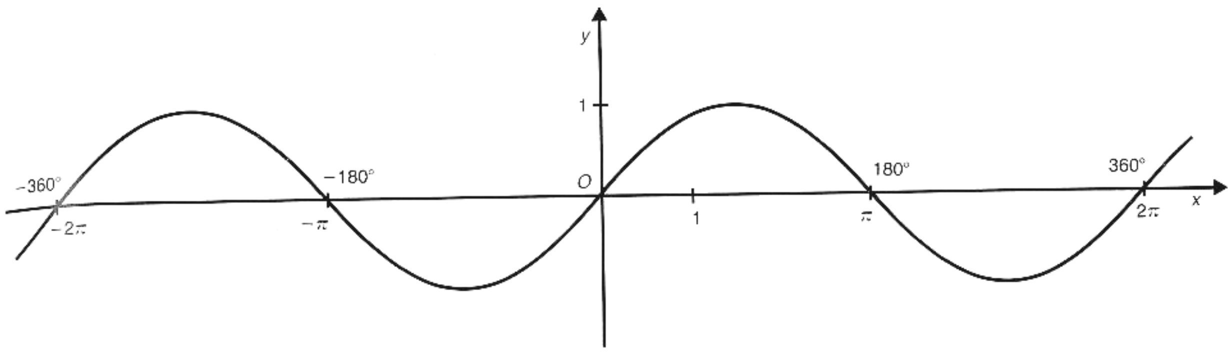
L'angolo giro a cui corrisponde l'intera circonferenza c=2π; dunque l'angolo giro misura 2π radianti; la sua metà, che corrisponde all'angolo piatto è π radianti e

l'angolo retto, metà di quello piatto è $\frac{\pi}{2}$ radianti ; l'angolo di 45°, metà dell'angolo retto, misura $\frac{\pi}{4}$ radianti e così via.
Comunque la relazione per passare dalla misura di un angolo in gradi a quella in radianti o viceversa è : $\frac{l}{r} = \frac{\pi}{180°}\alpha$; nel caso in cui r = 1 allora la relazione diventa : $l = \frac{\pi}{180°}\alpha$ ossia l : π = α : 180°.
Si può osservare che, poiché: $\frac{l}{r}$ è il rapporto tra due grandezze omogenee, cioè aventi la stessa unità di misura, il radiante è un numero puro.

COSTRUZIONE DEL GRAFICO DELLE FUNZIONI SENO E COSENO

Costruiamo il grafico della funzione seno riportando sull'asse delle x la misura dell'angolo in radianti, misurata dalla lunghezza dell'arco AP, e sull'asse delle y il valore del seno dell'arco.
Quando pensiamo al punto P che continua a girare sulla circonferenza, ci rendiamo conto che l'arco percorso assume valori sempre più grandi. Tuttavia, il suo estremo p si trova periodicamente nella stessa posizione ; per esempio si ha P = B quando l'arco percorso è : $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi, \frac{\pi}{2} + 4\pi, \ \dots$.
Si può anche pensare di cambiare il verso di rotazione di P sulla circonferenza; per distinguere questo caso, premettiamo il segno – alle misure degli archi percorsi.





Si arriva così a tracciare il grafico: la curva ottenuta è la sinusoide, grafico della funzione; y = sen x.

Osservando il grafico si nota che:

1) la x può assumere qualunque valore reale e si ottiene sempre un valore per la y; basta considerare x come misura di un arco AP sulla circonferenza goniometrica e y come ordinata del punto P;
2) la y, invece, assume solo valori che cadono nell'intervallo compreso tra -1 e 1;
3) per ogni valore di x risulta : sen x = sen (x + 2π); cioè la funzione è periodica, con periodo 2π; è per questo che il grafico è composto di tanti archi uguali che si ripetono.

Il grafico della funzione coseno può essere costruito analogamente e le considerazioni fatte per il seno valgono per il coseno. Il grafico della funzione y = cos x è detto cosinusoide.

Le funzioni y = sen x e y = cos x così introdotte prendono il nome di funzioni circolari, per ricordare che sono state ottenute a partire dalla circonferenza goniometrica.

OSSERVAZIONI SUI GRAFICI DELLE FUNZIONI

Studiamo qualche altra caratteristica delle funzioni seno e coseno basandoci sulle simmetrie più note : la simmetria rispetto all'asse delle x e quella rispetto all'asse delle y.

La simmetria rispetto all'asse delle x lascia inalterata l'ascissa dei punti, ma cambia segno all'ordinata.

Si passa y = sen x a y = - sen x e da y = cos x a y =-cos x.

La simmetria rispetto all'asse delle y lascia fissa l'ordinata dei punti cambiando il segno dell'ascissa. Si passa da y = sen x a y = sen (-x) e da y = cos x a y = cos (-x). Se si confrontano i grafici è immediato notare che il grafico delle due funzioni y = – sen x e y = sen (-x) sono equivalenti, così come i grafici delle funzioni y = cos x e y = cos (-x). Si dice allora che la funzione seno è una funzione dispari e quindi simmetrica rispetto all'origine degli assi cartesiani, mentre la funzione coseno è una funzione pari e quindi simmetrica rispetto all'asse delle y