U.D. LE SIMILITUDINI 1

Possono essere trattate a più livelli:

II LICEO: per via sintetica, con la geometria euclidea

III LICEO: se è il caso, da un punto di vista analitico, altrimenti proponendo delle attività di applicazione delle similitudini, analizzando e risolvendo mediante esse, semplici problemi riguardanti rette e coniche.

OLLOCAZIONE: CLASSE II LICEO SCIENTIFICO

3

REREQUISITI:

- CRITERI DI CONGRUENZA DEI TRIANGOLI
- PERPENDICOLARITÀ E PARALLELISMO
- CONCETTO DI TRASFORMAZIONE GEOMETRICA
- ISOMETRIE
- CONOSCENZE RELATIVE ALLA CIRCONFERENZA ED AL CERCHIO
- POLIGONI INSCRITTI E CIRCOSCRITTI
- PROPORZIONALITÀ
- OMOTETIA

1

BIETTIVI GENERALI: (FINALITÀ)

- IMPARARE A SVILUPPARE DEDUZIONI CHE COINVOLGANO IL CONCETTO DI SIMILITUDINE
- DARE UNA CARATTERIZZAZIONE GEOMETRICA A SITUAZIONI COMUNI DELLA VITA REALE DEL TIPO: VEDERE L'IMMAGINE INGRANDITA DI UN OGGETTO ATTRAVERSO UNA LENTE O QUELLA RIDOTTA DI UN OGGETTO FOTOGRAFATO

2'

BIETTIVI SPECIFICI:

OBIETTIVI COGNITIVI:
- CONOSCERE LE DEFINIZIONI DI SIMILITUDINE TRA TRIANGOLI E POLIGONI
- CONOSCERE I CRITERI DI SIMILITUDINE TRA TRIANG...

OBIETTIVI OPERATIVI: 2''
- INDIVIDUARE FIGURE SIMILI
- INDIVIDUARE PROPRIETÀ IN FIGURE SIMILI
- SAPER APPLICARE E RISOLVERE LE CORRETTE PROPORZIONI IN UNA SIMILITUDINE PER RISOLVERE PROBLEMI
- SAPER RICONOSCERE DOVE NON CI SONO SIMILITUDINI

NTESTI DISCIPLINARI IN CUI È EVENTUALMENTE UTILIZZABILE:

DISEGNO GEOMETRICO: DIVISIONE DI UN SEGMENTO IN SEZIONE AUREA
COSTRUZIONE DEL RETTANGOLO AUREO

STORIA DELL'ARTE: SI RITROVA IL RAPPORTO AUREO NELLE COSTRUZIONI GRECHE, NELL'ARCHITETTURA DEL RINASCIMENTO

MUSICA: LO STESSO RAPPORTO COMPARE NELLA STRUTTURA DEI CANTI GREGORIANI E SUCCESSIVAMENTE IN ALCUNE COMPOSIZIONI DI BEETHOVEN

CIENZE NATURALI: IL RETTANGOLO AUREO E LA SPIRALE LOGARITMICA, PRODOTTO FINALE DI INFINITI RETTANGOLI AUREI ANNIDATI L'UNO NELL'ALTRO, SONO PRESENTI NELLE STELLE MARINE, NELLE CONCHIGLIE, NELLA DISPOSIZIONE DEI SEMI NELLE PIGNE ED IN MOLTI ALTRI AMBITI DELLA NATURA

ETODOLOGIA: LEZIONI INTERATTIVE CON L'UTILIZZO DI SOFTWARE DI GEOMETRIA, IMMAGINI E FOTOGRAFIE DI MONUMENTI E FACCIATE DI EDIFICI ANTICHI E MODERNI

EMPI:

VILUPPO DEI CONTENUTI:

UNA NUOVA TRASFORMAZIONE GEOMETRICA: LA SIMILITUDINE E LE SUE CARATTERISTICHE PRINCIPALI

CRITERI DI SIMILITUDINE DEI TRIANGOLI

- APPLICAZIONI DELLA SIMILITUDINE AI TRIANGOLI RETTANGOLI E ALLA CIRCONFERENZA
- CRITERI DI SIMILITUDINE DEI POLIGONI
- VARIE ATTIVITA' DI APPLICAZIONE DELLE SIMILITUDINI:
  - ALLA RICERCA DEL RETTANGOLO PIU' BELLO
  - FORMATO A4: ARITMETICA E GEOMETRIA CON UN FOGLIO DI CARTA
  - ESPLORAZIONE NUMERICA: DAL RETTANGOLO AUREO ALLA SUCCESSIONE DI FIBONACCI

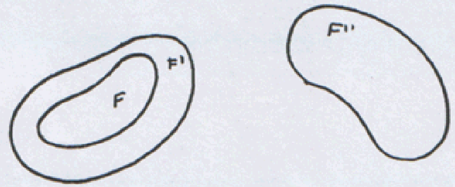
Per la classe III:

- ATTIVITA' DI APPLICAZIONE DELLE SIMILITUDINI: TUTTE LE PARABOLE SONO SIMILI?

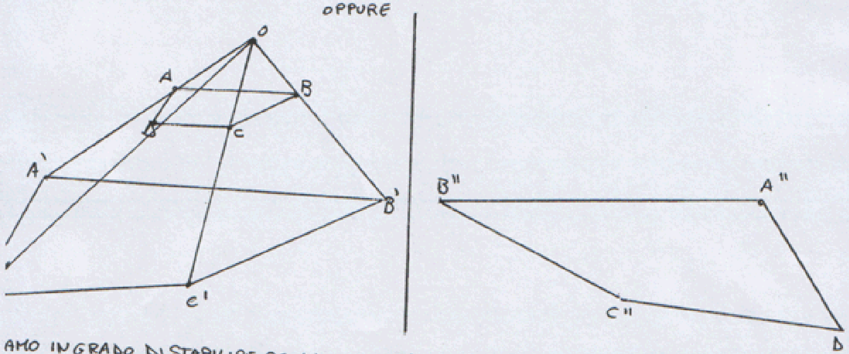
I DISEGNO, UNA FOTOGRAFIA POSSONO ESSERE INGRANDITI O RIMPICCIOLITI.
QUESTO PROCESSO GLI OGGETTI RAPPRESENTATI CONSERVANO LA STESSA FORMA, NTO CHE SIAMO ABITUATI A DIRE CHE SI TRATTA DELLO STESSO OGGETTO, ANCHE SE APPRESENTATO IN DIVERSE DIMENSIONI. PENSIAMO AD UNA PIANTA PICCOLA ED NA GRANDE CHE RAPPRESENTINO LA STESSA CITTA', OPPURE UN'OPERA D'ARTE ED NA SUA COPIA MOLTO BEN RIUSCITA.

HE COSA VIENE CONSERVATO IN UNA FIGURA QUANDO LA SOTTOPONIAMO AD UN NGRANDIMENTO O UNA RIDUZIONE? RIFLETTENDO UN POCO, CI ACCORGIAMO CHE N QUESTA TRASFORMAZIONE <u>VENGONO CONSERVATE LE PROPORZIONI DI OGNI PARTE DELL'OGGETTO RAPPRESENTATO, ANCHE SE CAMBIANO LE MISURE</u>: E QUESTO PERCHE' E DISTANZE FRA DUE PUNTI QUALSIASI VENGONO TUTTE MODIFICATE SECONDO UN APPORTO <u>COSTANTE</u> (SCALA).

UPPONIAMO ADESSO DI TRASFORMARE UNA FIGURA F IN UN'ALTRA F' NGRANDITA O RIMPICCIOLITA RISPETTO ALLA PRIMA, E IMMAGINIAMO DI TRASFORMARE UCCESSIVAMENTE F' IN F'' CON UNA QUALSIASI ISOMETRIA.



OPPURE



AMO IN GRADO DI STABILIRE SE LA FIGURA DI PARTENZA E QUELLA FINALE SI RRISPONDONO IN QUALCHE TRASFORMAZIONE A NOI NOTA?
DUE FIGURE SI CORRISPONDONO IN UNA ISOMETRIA? NO! (I SEGMENTI CORRISPONDENTI N SONO CONGRUENTI)
I CORRISPONDONO IN UNA OMOTETIA? NO! (I SEGMENTI CORRISPONDENTI NON SONO ARALLELI)
SI TRATTA DUNQUE DI UNA NUOVA TRASFORMAZIONE!

IAMO QUESTA NUOVA TRASFORMAZIONE "SIMILITUDINE".
TUITIVAMENTE POSSIAMO PENSARE CHE DUE FIGURE SIANO SIMILI QUANDO HANNO
STESSA FORMA. TUTTAVIA QUESTA DEFINIZIONE NON E' ACCETTABILE PER LA MATEMATICA
SOMIGLIANZA MATEMATICA E' UN PO' PIU' ESIGENTE DELLA SOMIGLIANZA DEL
NGUAGGIO COMUNE.

JESTE CONSIDERAZIONI CI PORTANO A FORMULARE UNA DEFINIZIONE UN PO'
U' RIGOROSA:

HIAMIAMO "SIMILITUDINE" LA TRASFORMAZIONE GEOMETRICA CHE SI OTTIENE
AL PRODOTTO DI UNA OMOTETIA CON UNA ISOMETRIA (IN QUALUNQUE ORDINE
UESTE TRASFORMAZIONI VENGANO APPLICATE)

UALI PROPRIETA' CI ASPETTIAMO CHE VALGANO PER LA SIMILITUDINE?
VVIAMENTE TUTTE QUELLE CHE VALGONO CONTEMPORANEAMENTE PER
NA OMOTETIA E PER UNA ISOMETRIA!

UNQUE CI ASPETTIAMO CHE LA SIMILITUDINE CONSERVI L'AMPIEZZA DEGLI ANGOLI
NON C'E' MOTIVO CHE VARINO, RIMANENDO ESSI INALTERATI DURANTE ENTRAMBE LE
RASFORMAZIONI),
L PARALLELISMO E L'INCIDENZA TRA RETTE (NEL SENSO CHE SE DUE RETTE SONO PARALLELE
CONTINUERANNO AD ESSERLO ANCHE DOPO LE TRASFORMAZIONI, IDEM PER L'INCIDENZA),
IL RAPPORTO TRA SEGMENTI (INFATTI L'ISOMETRIA CHE TRASFORMA UNA FIGURA F' IN F''
ONSERVA LA CONGRUENZA DEI SEGMENTI CORRISPONDENTI, QUINDI LE RELAZIONI CHE ESISTONO TRA
F ED F', OSSIA TRA LA FIGURA INIZIALE E LA SUA OMOTETICA, CONTINUANO A SUSSISTERE
NCHE TRA F ED F'')

A QUESTO PUNTO POSSIAMO RIASSUMERE LE PROPRIETA' PRINCIPALI CHE CARATTERIZZANO
LA SIMILITUDINE:

IL RAPPORTO TRA SEGMENTI CORRISPONDENTI E' COSTANTE ED E' UGUALE AL RAPPORTO
DI OMOTETIA IN VALORE ASSOLUTO, ESSO SI CHIAMA RAPPORTO DI SIMILITUDINE

GLI ANGOLI CHE SI CORRISPONDONO IN UNA SIMILITUDINE SONO CONGRUENTI

LA FIGURA SIMILE DI UNA RETTA E' UNA RETTA

SE DUE RETTE SONO PARALLELE ANCHE LE LORO CORRISPONDENTI NELLA SIMILITUDINE
LO SONO, SE DUE RETTE SONO INCIDENTI ANCHE LE LORO CORRISPONDENTI SONO
INCIDENTI ALLO STESSO MODO.

li proprietà sono dette "invarianti", nel senso che rimangono inalterate
urante la trasformazione di cui ci stiamo occupando.
Geometria il concetto di proprietà invariante ha una importanza
levolissima: si utilizza per dare la definizione di UGUAGLIANZA.
e oggetti si considerano uguali quando possiedono "certe" proprietà.
ndere rigoroso il concetto di uguaglianza significa precisare il senso da
tribuire all'aggettivo certe.

^

ò in geometria è possibile grazie al concetto di TRASFORMAZIONE.

UGUALI nel senso di IDENTICI ⟷ TRASFORMAZIONE IDENTICA

UALI nel senso di SOVRAPPONIBILI ⟷ ISOMETRIE

UALI nel senso di INGRANDITE - RIMPICCIOLITE ⟷ SIMILITUDINI

IPENSANDO ALLE TRASFORMAZIONI A NOI NOTE, POSSIAMO AFFERMARE CHE
UE FIGURE OMOTETICHE SONO ANCHE SIMILI?

! BASTA COMPORRE L'OMOTETIA CON L'ISOMETRIA CHE COINCIDE CON L'IDENTITA'
PER RITROVARE LA STESSA OMOTETIA.

UE FIGURE CONGRUENTI (CHE SI CORRISPONDONO IN UNA ISOMETRIA) SONO ANCHE SIMILI?

! SE COMPONIAMO L'ISOMETRIA CON L'OMOTETIA IN CUI $K=1$ CIOE' L'IDENTITA',
RITROVIAMO L'ISOMETRIA DI PARTENZA.

UESTI PRODOTTI, PER QUANTO VISTO, SONO DELLE SIMILITUDINI.

ROBLEMA: DATI DUE POLIGONI, COME FACCIAMO A SAPERE SE SONO SIMILI?

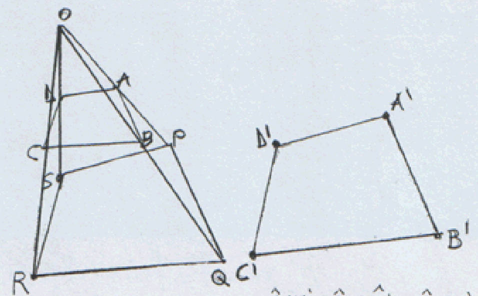
NTUITIVAMENTE BASTA OSSERVARNE LA FORMA, MA PER RISOLVERE IL PROBLEMA
I MANIERA RIGOROSA POSSIAMO UTILIZZARE QUESTO TEOREMA, CHE DIMOSTREREMO
ER I QUADRILATERI, MA LE CUI CONSIDERAZIONI POTRANNO ESSERE ESTESE AI
OLIGONI CON UN QUALSIASI NUMERO DI LATI.

TEOREMA:

SE DUE POLIGONI HANNO I LATI PROPORZIONALI E GLI ANGOLI ORDINATAMENTE
CONGRUENTI ALLORA SONO SIMILI.

Osservazione: possiamo prendere in considerazione solo la congruenza
di tre coppie di angoli, essendo la congruenza della
quarta una conseguenza

2



HP: $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{A'D'}{AD}$ $\vee$ $\hat{A} \cong \hat{A}'$; $\hat{B} \cong \hat{B}'$; $\hat{C} \cong \hat{C}'$ TH. $ABCD \sim A'B'C'D'$

IMOSTRAZIONE

'RENDIAMO UN QUALUNQUE PUNTO O DEL PIANO E COSTRUIAMO IL POLIGONO PQRS HE CORRISPONDE AD ABCD NELL'OMOTETIA DI CENTRO O E RAPPORTO $K = \frac{A'B'}{AB}$ >IMOSTRIAMO CHE PQRS ED A'B'C'D' SONO CONGRUENTI:

'ER LE PROPRIETA' DELL'OMOTETIA

$$\frac{PQ}{AB} = \frac{QR}{BC} = \frac{RS}{CD} = \frac{PS}{AD} = K$$

IA PER IPOTESI

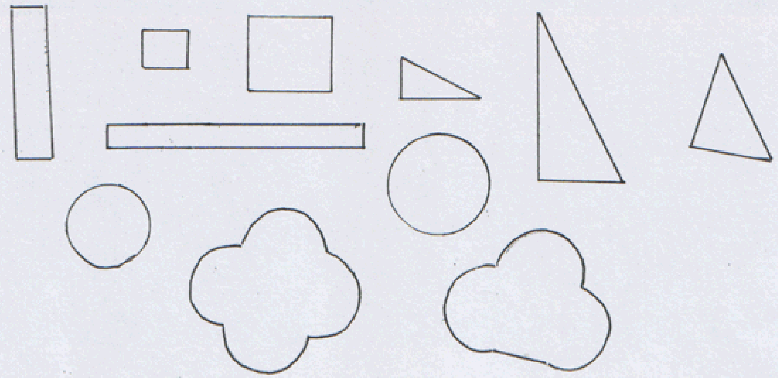
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{A'D'}{AD} = K$$

ERTANTO $PQ \cong A'B'$ $QR \cong B'C'$ $RS \cong C'D'$ $PS \cong A'D'$

VOLTRE POICHE' ABCD HA GLI ANGOLI ORDINATAMENTE CONGRUENTI SIA AD A'B'C'D' PER IPOTESI) CHE A PQRS (PROPRIETA' DELL'OMOTETIA) PQRS e A'B'C'D' HANNO :LI ANGOLI ORDINATAMENTE CONGRUENTI PER TRANSITIVITA'. I QUADRILATERI PQRS e 'B'C'D' SONO DUNQUE CONGRUENTI PERCHE' HANNO TUTTI I LATI E TUTTI GLI ANGOLI ORDINATAMENTE CONGRUENTI, PERTANTO ESISTE UNA ISOMETRIA IN CUI PQRS = A'B'C'D' SI CORRISPONDONO. ALLORA ABCD E A'B'C'D' SONO SIMILI, CORRISPONDENDOSI NEL PRODOTTO DI UNA OMOTETIA CON UNA ISOMETRIA.

:SERCIZIO

) Tra tutte queste figure, sapresti individuare quelle simili tra loro?



) Determina il valore di verità delle proposizioni seguenti:

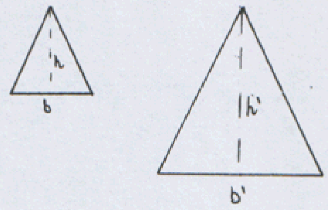
a. Due figure simili sono congruenti V F
b. Due figure congruenti sono simili V F
c. Due figure simili sono omotetiche V F
d. Due poligoni simili hanno i lati paralleli V F

) Completa le proposizioni seguenti.

In una similitudine:

a. Il rapporto fra segmenti corrispondenti ...
b. angoli che si corrispondono sono ...
c. Una retta si trasforma in ...
d. le trasformate di due rette incidenti sono ...
e. le trasformate di due rette parallele sono ...

1) C'è un legame tra il rapporto delle aree di due triangoli simili e il rapporto di similitudine? scoprilo!



$S = \frac{b \cdot h}{2}$ $S' = \frac{b' \cdot h'}{2}$ $\frac{S}{S'} = \frac{b' h'}{b h}$

ma se K è il rapporto di similitudine

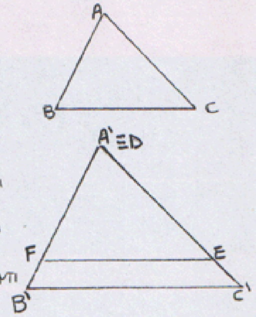
$\frac{b}{b'} = K$, $\frac{h}{h'} = K$ $\Rightarrow$ $\frac{S}{S'} = K^2$

CRITERI DI SIMILITUDINE DEI TRIANGOLI

'ER STABILIRE SE DUE POLIGONI SIANO SIMILI, BASTA VERIFICARE CHE ABBIANO LATI PROPORZIONALI E GLI ANGOLI ORDINATAMENTE CONGRUENTI.
QUINDI PER VERIFICARE SE DUE TRIANGOLI SIANO SIMILI OCCORRE CALCOLARE RAPPORTI FRA I LATI OMOLOGHI E CONFRONTARE TRE COPPIE DI ANGOLI.
TUTTAVIA ABBIAMO LA POSSIBILITÀ DI RENDERE PIÙ VELOCE LA VERIFICA RIDUCENDO IL NUMERO DI CONFRONTI, GRAZIE A TRE TEOREMI:

EOREMA (I CRITERIO DI SIMILITUDINE)

JE TRIANGOLI SONO SIMILI SE HANNO DUE ANGOLI ORDINATAMENTE CONGRUENTI.



IP: $\hat{A} \cong \hat{A}'$
$\hat{B} \cong \hat{B}'$

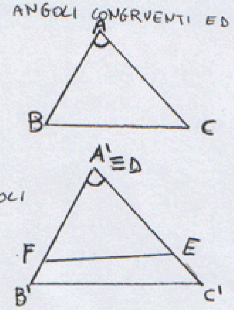
H $\overset{\triangle}{ABC} \sim A'B'C'$

DIMOSTRAZIONE

E I DUE TRIANGOLI AVESSERO ANCHE UNA COPPIA DI LATI CONGRUENTI, ESSI SAREBBERO CONGRUENTI (II O IV CRITERIO DI CONGRUENZA) PERCIÒ ANCHE SIMILI. SUPPONIAMO CHE CIÒ NON ACCADA. CONSIDERIAMO L'ISOMETRIA CHE TRASFORMA $\overset{\triangle}{ABC}$ IN $\overset{\triangle}{DEF}$ AD ESSO CONGRUENTE, IN MODO CHE D SI SOVRAPPONGA AD A', DE SIA SULLA SEMIRETTA PER A'C' ED IL LATO DF SULLA SEMIRETTA PER A'B'. POICHÉ $\hat{B}' \cong \hat{B}$ PER IPOTESI, $\hat{B} \cong \hat{F}$ PER COSTRUZIONE, ANCHE $\hat{B}' \cong \hat{F}$ (TRANSITIVITÀ), FE È QUINDI PARALLELO A B'C'. DUNQUE $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ E $\overset{\triangle}{DEF}$ SI CORRISPONDONO IN UNA OMOTETIA DI CENTRO A'. ALLORA A'B'C' È IL RISULTATO DELLA COMPOSIZIONE DI UNA ISOMETRIA CON UNA OMOTETIA, DUNQUE $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$

TEOREMA (II CRITERIO DI SIMILITUDINE)

DUE TRIANGOLI SONO SIMILI SE HANNO UNA COPPIA DI ANGOLI CONGRUENTI ED I LATI CHE LI FORMANO IN PROPORZIONE



HP: $\hat{A} \cong \hat{A}'$
AB : A'B' = AC : A'C'

TH: $\overset{\triangle}{ABC} \sim A'B'C'$

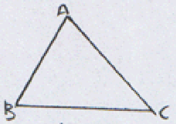
DIMOSTRAZIONE

SE IL RAPPORTO $\frac{AB}{A'B'}$ FOSSE UGUALE A 1, I DUE TRIANGOLI SAREBBERO CONGRUENTI PER IL PRIMO CRITERIO E PERCIÒ ANCHE SIMILI. IN CASO CONTRARIO, ESSENDO $\hat{A} \cong \hat{A}'$ È POSSIBILE TRASFORMARE CON UNA ISOMETRIA IL TRIANGOLO ABC NEL TRIANGOLO $\overset{\triangle}{DEF}$ IN CUI D ≡ A'.
AB : A'B' = AC : A'C' (IPOTESI) DF ≅ AB (PER COSTRUZIONE) E DE ≅ AC (PER COSTRUZIONE)
QUINDI DF : A'B' = DE : A'C'. LE RETTE FE E B'C' SONO QUINDI PARALLELE PER INVERSO DEL TEOREMA DI TALETE E PERCIÒ I TRIANGOLI A'B'C' E DEF SONO OMOTETICI.
DUNQUE $\overset{\triangle}{ABC}$ ED $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ SONO SIMILI PERCHÉ SI CORRISPONDONO NEL PRODOTTO DI UNA OMOTETIA CON UNA ISOMETRIA.

TEOREMA (III CRITERIO DI SIMILITUDINE)

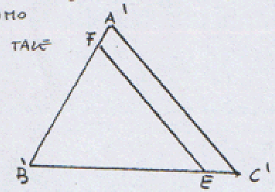
DUE TRIANGOLI SONO SIMILI SE HANNO I TRE LATI PROPORZIONALI

HP $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = K$ TH: $A\hat{B}C \sim A'\hat{B'}C'$



DIMOSTRAZIONE

CONSIDERIAMO L'OMOTETIA DI RAPPORTO K CON CENTRO IN UN VERTICE, AD ESEMPIO B', ED INDICHIAMO CON F ED E I PUNTI OMOLOGHI DI A' E C' IN TALE OMOTETIA



$\frac{A'B'}{FB'} = \frac{A'C'}{FE} = \frac{B'C'}{B'E} = K$

CONFRONTANDO CON L'IPOTESI DEDUCIAMO CHE

$AB \cong FB'$, $AC \cong FE$, $BC \cong B'E$ DUNQUE

$A\hat{B}C$ ED $F\hat{B'}E$ SONO CONGRUENTI PER IL TERZO CRITERIO DI CONGRUENZA DEI TRIANGOLI, DUNQUE ESISTE UNA ISOMETRIA NELLA QUALE SI CORRISPONDONO. ALLORA $A\hat{B}C$ ED $A'\hat{B'}C'$ SONO SIMILI.

ESERCIZIO

DIMOSTRA LE PROPOSIZIONI SEGUENTI

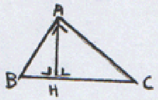
TUTTI I TRIANGOLI EQUILATERI SONO SIMILI

DUE TRIANGOLI ISOSCELI CHE HANNO UN ANGOLO ALLA BASE O L'ANGOLO AL VERTICE ORDINATAMENTE CONGRUENTI SONO SIMILI

DUE TRIANGOLI RETTANGOLI CHE HANNO UNA COPPIA DI ANGOLI ACUTI ORDINATAMENTE CONGRUENTI SONO SIMILI

LE APPLICAZIONI DELLA SIMILITUDINE

APPLICAZIONI AI TRIANGOLI RETTANGOLI



CONSIDERIAMO IL TRIANGOLO RETTANGOLO $A\hat{B}C$ CON ALTEZZA AH RELATIVA ALL'IPOTENUSA

$A\hat{B}C$ E $A\hat{B}H$ SONO SIMILI PERCHE' ENTRAMBI TRIANGOLI RETTANGOLI CON L'ANGOLO ACUTO $A\hat{B}H$ IN COMUNE, ANALOGAMENTE I TRIANGOLI $A\hat{B}C$ E $A\hat{C}H$ SONO SIMILI PERCHE' RETTANGOLI CON L'ANGOLO $A\hat{C}H$ IN COMUNE. ESSI AVRANNO ALLORA I LATI PROPORZIONALI E POSSIAMO SCRIVERE $BC : AB = AB : BH$ E $BC : AC = AC : CH$

QUESTA PROPORZIONE GIUSTIFICA IL SEGUENTE

TEOREMA: (PRIMO T. DI EUCLIDE)

IN OGNI TRIANGOLO RETTANGOLO CIASCUN CATETO E' MEDIO PROPORZIONALE FRA L'IPOTENUSA E LA PROIEZIONE DEL CATETO SULL'IPOTENUSA

TORNANDO AL TRIANGOLO RETTANGOLO  ANCHE $A\hat{B}H$ E $A\hat{C}H$ SONO SIMILI. INFATTI $A\hat{B}H$ $C\hat{A}H$ COMPLEMENTARI DELLO STESSO ANGOLO $B\hat{A}H$

DUNQUE $BH : AH = AH : HC$ E TALE PROPORZIONE GIUSTIFICA IL SEGUENTE

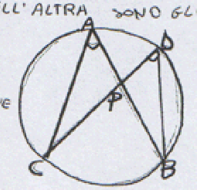
TEOREMA (SECONDO T. DI EUCLIDE)

IN OGNI TRIANGOLO RETTANGOLO L'ALTEZZA RELATIVA ALL'IPOTENUSA E' MEDIA PROPORZIONALE FRA LE PROIEZIONI DEI CATETI SULL'IPOTENUSA

N.B. QUESTI DUE TEOREMI SONO EQUIVALENTI AI TEOREMI DI EUCLIDE

APPLICAZIONI ALLA CIRCONFERENZA

TEOREMA: SE DUE CORDE DI UNA CIRCONFERENZA SI INTERSECANO, I SEGMENTI DELL'UNA SONO I MEDI ED I SEGMENTI DELL'ALTRA SONO GLI ESTREMI DI UNA PROPORZIONE



DIMOSTRAZIONE

DOBBIAMO DIMOSTRARE CHE VALE LA PROPORZIONE

$CP : BP = AP : DP$

CONSIDERIAMO I TRIANGOLI $C\hat{P}A$ E $B\hat{P}D$. IN ESSI

$C\hat{A}P \cong C\hat{D}B$ PERCHE' ANGOLI ALLA CIRCONFERENZA CHE INSISTONO SULLO STESSO ARCO $\overset{\frown}{CB}$.

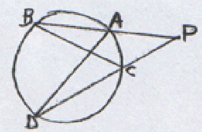
$C\hat{P}A \cong B\hat{P}D$ PERCHE' OPPOSTI AL VERTICE

I DUE TRIANGOLI SONO SIMILI PER IL PRIMO CRITERIO DI SIMILITUDINE E DUNQUE VALE LA PROPORZIONE $CP : BP = AP : DP$

OSSERVAZIONE: FARE ATTENZIONE AD INDIVIDUARE I SEGMENTI OMOLOGHI, ESSI SONO QUELLI OPPOSTI AGLI ANGOLI CONGRUENTI

TEOREMA: SE DA UN PUNTO ESTERNO AD UNA CIRCONFERENZA SI TRACCIANO DUE SECANTI, UNA SECANTE E LA SUA PARTE ESTERNA SONO I MEDI, L'ALTRA SECANTE E LA SUA PARTE ESTERNA SONO GLI ESTREMI DI UNA PROPORZIONE.

(PER "SECANTE" E "PARTE ESTERNA" INTENDIAMO RISPETTIVAMENTE I SEGMENTI CHE HANNO PER ESTREMI IL PUNTO ESTERNO P E I DUE PUNTI DI INTERSEZIONE CON LA CIRCONFERENZA PIU' LONTANO E PIU' VICINO A P, CIOE' PB E PA)



DIMOSTRAZIONE

DOBBIAMO DIMOSTRARE CHE $PD : PB = PA : PC$

CONSIDERIAMO I TRIANGOLI PAD E PBC. IN ESSI

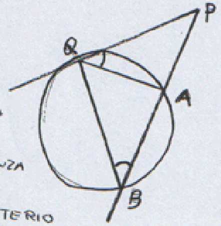
$B\hat{P}C \cong D\hat{P}A$ PERCHE' IN COMUNE (PROPRIETA' RIFLESSIVA DELLA CONGRUENZA)

$P\hat{D}A \cong P\hat{B}C$ PERCHE' ANGOLI ALLA CIRCONFERENZA CHE INSISTONO SULLO STESSO ARCO $\overset{\frown}{AC}$

DUE TRIANGOLI SONO SIMILI E DUNQUE VALE LA PROPORZIONE PD : PB = PA : PC

TEOREMA: SE DA UN PUNTO ESTERNO AD UNA CIRCONFERENZA SI TRACCIANO UNA SECANTE ED UNA TANGENTE, IL SEGMENTO DI TANGENTE E' MEDIO PROPORZIONALE FRA L'INTERA SECANTE E LA SUA PARTE ESTERNA

DIMOSTRAZIONE



DOBBIAMO DIMOSTRARE CHE PB : PQ = PQ : PA

CONSIDERIAMO I TRIANGOLI PBQ E PAQ. IN ESSI

$P\hat{P}Q \cong A\hat{P}Q$ PER LA PROPRIETA' RIFLESSIVA DELLA CONGRUENZA

$P\hat{B}Q \cong P\hat{Q}A$ PERCHE' ANGOLI ALLA CIRCONFERENZA CHE INSISTONO SULLO STESSO ARCO $\widehat{AQ}$

I DUE TRIANGOLI SONO SIMILI PER IL PRIMO CRITERIO E DUNQUE VALE LA PROPORZIONE PB : PQ = PQ : PA.

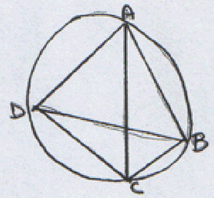
COME POTREMMO ENUNCIARE IN MODO DIVERSO I TEOREMI PRECEDENTI, COINVOLGENDO LE EQUIVALENZE TRA FIGURE GEOMETRICHE?

- IN UNA CIRCONFERENZA, DATE DUE CORDE CHE SI INTERSECANO, IL RETTANGOLO FORMATO DAI SEGMENTI IN CUI RESTA DIVISA UNA CORDA E' EQUIVALENTE AL RETTANGOLO I CUI LATI SONO I SEGMENTI IN CUI RESTA DIVISA L'ALTRA CORDA.
- DATE DUE SECANTI CONDOTTE DA UN PUNTO ESTERNO ALLA CIRCONFERENZA, IL RETTANGOLO FORMATO DALL'INTERA SECANTE E DALLA SUA PARTE ESTERNA E' EQUIVALENTE AL RETTANGOLO FORMATO DALL'ALTRA SECANTE E LA SUA PARTE ESTERNA
- DATA UNA SECANTE E UNA TANGENTE CONDOTTE DA UN PUNTO ESTERNO ALLA CIRCONFERENZA, IL QUADRATO COSTRUITO SUL SEGMENTO DI TANGENTE E' EQUIVALENTE AL RETTANGOLO FORMATO DALL'INTERA SECANTE E DALLA SUA PARTE ESTERNA

INOLTRE IN UNA CIRCONFERENZA VALE ANCHE IL SEGUENTE TEOREMA, DETTO DI TOLOMEO IN ONORE DEL MATEMATICO VISSUTO AD ALESSANDRIA D'EGITTO NEL SECONDO SECOLO DOPO CRISTO

TEOREMA DI TOLOMEO

SE UN QUADRILATERO E' INSCRITTIBILE IN UNA CIRCONFERENZA, IL RETTANGOLO CHE HA PER DIMENSIONI LE DIAGONALI E' EQUIVALENTE ALLA SOMMA DEI RETTANGOLI CHE HANNO PER LATI I LATI OPPOSTI DEL QUADRILATERO



INOLTRE DI QUESTO TEOREMA VALE ANCHE L'INVERSO:

TEOREMA (INVERSO DI TOLOMEO)

SE IN UN QUADRILATERO IL RETTANGOLO CHE HA PER DIMENSIONI LE DIAGONALI E' EQUIVALENTE ALLA SOMMA DEI RETTANGOLI CHE HANNO PER LATI I LATI OPPOSTI, ALLORA IL QUADRILATERO E' INSCRITTIBILE IN UNA CIRCONFERENZA.

ESERCIZIO:

DETERMINA IL VALORE DI VERITA' DELLE SEGUENTI PROPOSIZIONI

a. TUTTI I TRIANGOLI EQUILATERI SONO SIMILI V F
b. TUTTI I TRIANGOLI ISOSCELI SONO SIMILI V F
c. TUTTI I TRIANGOLI RETTANGOLI SONO SIMILI V F
d. TUTTI I QUADRATI SONO SIMILI V F
e. TUTTI I POLIGONI REGOLARI CON LO STESSO NUMERO DI LATI SONO SIMILI V F

LA SIMILITUDINE NEI POLIGONI

SAPPIAMO CHE DUE POLIGONI SONO SIMILI SE HANNO I LATI PROPORZIONALI E GLI ANGOLI ORDINATAMENTE CONGRUENTI. PERO' E' POSSIBILE, COME NEL CASO DEI TRIANGOLI, USUFRUIRE DI UN CRITERIO PER DIMINUIRE IL NUMERO DI VERIFICHE NECESSARIE.

TEOREMA (CRITERIO DI SIMILITUDINE PER I POLIGONI)

DUE POLIGONI DI UGUALE NUMERO DI LATI SONO SIMILI SE HANNO I LATI OMOLOGHI PROPORZIONALI E GLI ANGOLI ORDINATAMENTE CONGRUENTI, AD ECCEZIONE DI:

- TRE ANGOLI CONSECUTIVI, OPPURE
- DUE ANGOLI CONSECUTIVI ED IL LATO AD ESSI COMUNE, OPPURE
- DUE LATI CONSECUTIVI E L'ANGOLO FRA ESSI COMPRESO,

SUI QUALI NON SI FANNO IPOTESI

ATTIVITÀ DI APPLICAZIONE DELLE SIMILITUDINI:

ALLA RICERCA DEL RETTANGOLO PIÙ BELLO

QUESTA ATTIVITÀ PUÒ ESSERE PROPOSTA AI RAGAZZI, NEL CONTESTO DELLE TRASFORMAZION GEOMETRICHE NEL MONDO REALE, CON L'OBIETTIVO PRINCIPALE DI RINTRACCIARE LE APPLICAZIONI DELLE SIMILITUDINI ANCHE IN CONTESTI INUSUALI, QUALI L'ARTE, L'ARCHITETTURA, LA TECNICA.

N UNA PRIMA FASE DELL'ATTIVITÀ SI POTREBBE PROPORRE UNA ANALISI PRELIMINARE DEI FORMATI DEI FOGLI DI QUADERNI, LIBRI, FOGLI DA DISEGNO, FOGLI DI FORMATO A4 (LE CUI DIMENSIONI SONO DI 210 mm x 297 mm).
SI CALCOLA POI IL RAPPORTO TRA I DUE LATI DELLE FORME RETTANGOLARI CONSIDERATE. LA STESSA ATTIVITÀ POTREBBE ESSERE PROPOSTA IN UNA SECONDA FASE, STUDIANDO LE FACCIATE DI ALCUNI MONUMENTI ED EDIFICI STORICI, COME PER ESEMPIO IL FRONTONE DEL PARTENONE DI ATENE, L'ARCO DI COSTANTINO A ROMA ... DOPO QUESTA ANALISI SI FOCALIZZA L'ATTENZIONE DEI RAGAZZI SUL QUADRATO, SUL FOGLIO A4 E SUL RETTANGOLO AUREO (OSSIA QUEL RETTANGOLO TALE HE, RITAGLIANDO DA ESSO UN QUADRATO, DIA LUOGO AD UN SECONDO RETTANGOLO SIMILE QUELLO DI PARTENZA)
ER RAGIONI MISTERIOSE QUELLO AUREO VIENE DA SEMPRE CONSIDERATO IL ETTANGOLO PIÙ "BELLO", TANTO CHE I GRECI COSTRUIRONO MOLTI DEI LORO TEMPLI N MODO CHE ALTEZZA E LARGHEZZA RISPETTASSERO LO SCHEMA AUREO, COSÌ DA ESALTARE ARMONIA DELLE PROPORZIONI NELL'ARTE

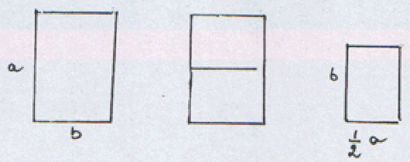
I POTREBBE POI CONSEGNARE AI RAGAZZI UNA SCHEDA DOVE SIANO DISEGNATI UNA ECINA DI RETTANGOLI DI FORMA DIVERSA, TRA I QUALI ALMENO UN RETTANGOLO A4, N QUADRATO E UN RETTANGOLO AUREO, E CHIEDERE DI INDIVIDUARE QUELLO RITENUTO I ASPETTO PIÙ GRADEVOLE.

LLA FINE SI POTREBBERO DISCUTERE IN CLASSE LE RISPOSTE OTTENUTE, ROBABILMENTE DI TIPO DIVERSO, SUPPORTATE DA MOTIVAZIONI TALVOLTA OGGETTIVE, TALVOLTA I TIPO PERSONALE

FORMATO A4: ARITMETICA E GEOMETRIA

CON UN FOGLIO DI CARTA.

QUAL È LA STORIA DEL FOGLIO A4, OVVERO IL FOGLIO DAL FORMATO PIÙ DIFFUSO? LA CARTA VIENE PRODOTTA ALL'ORIGINE IN FOGLI MOLTO GRANDI, IL COSIDDETTO FORMATO A_0. IL LATO PIÙ LUNGO DI QUESTI FOGLI VIENE POI PIEGATO A METÀ, OTTENENDO IL FORMATO A_1; QUESTI NUOVI FOGLI SONO A LORO VOLTA DIMEZZATI ALLO STESSO MODO, E COSÌ VIA: DIMEZZANDO SEMPRE IL LATO PIÙ LUNGO SI OTTENGONO IN SUCCESSIONE I FORMATI A_2, A_3 ED INFINE IL COMUNISSIMO FORMATO A_4. FIN QUI NIENTE DI PARTICOLARMENTE INTERESSANTE, SE NON FOSSE PER IL FATTO CHE <u>LE PROPORZIONI DEI FOGLI SONO SEMPRE LE STESSE</u>, INDIPENDENTEMENTE DAL FORMATO. CHIAMANDO I LATI COME NELLA FIGURA



SI VEDE SUBITO CHE LA PROPORZIONE FRA I LATI SI CONSERVA PASSANDO DA UN FORMATO AL SUCCESSIVO SE E SOLO SE VALE LA RELAZIONE

$$a : b = b : \frac{1}{2}a$$

CIOÈ SE E SOLTANTO SE $a^2 = 2b^2$. IN ALTRE PAROLE, IL RAPPORTO FRA LE MISURE DEI DUE LATI $\frac{a}{b}$ DEVE ESSERE ESATTAMENTE UGUALE A $\sqrt{2} = 1{,}414213562 3\ldots$ ESEGUENDO IL RAPPORTO TRA LE MISURE DEI LATI DEI FOGLI A4 (297mm x 210mm) OTTENIAMO: $\frac{297}{210} = 1{,}4142835\ldots$
N EFFETTI QUESTI DUE NUMERI SONO PIUTTOSTO VICINI, MA NON SONO ESATTAMENTE UGUALI: SE IL RAPPORTO FRA LE MISURE DEI LATI FOSSE UGUALE A $\sqrt{2}$ ED IL LATO CORTO MISURASSE 210 mm, ALLORA IL LATO LUNGO MISUREREBBE 296,9848.... mm. A QUESTO PUNTO SI POTREBBE PORRE AI RAGAZZI UNA DOMANDA:
SCEGLIENDO ALTRI INTERI a, b AL POSTO DI 297 E 210, PUÒ ACCADERE CHE $\frac{a}{b}$ SIA <u>ESATTAMENTE</u> UGUALE A $\sqrt{2}$?

OVVIAMENTE LA RISPOSTA È NEGATIVA E QUESTO FATTO È NOTO ALL'UMANITÀ DA OLTRE 2500 ANNI. È UNA QUESTIONE ESTREMAMENTE PROFONDA E IMPORTANTE, TANTO CHE IL GRANDE MATEMATICO INGLESE G. H. HARDY

CONSIDERAVA UNA DELLE DUE PERLE DELLA MATEMATICA GRECA
'ALTRA E' LA DIMOSTRAZIONE DELL'ESISTENZA DI INFINITI NUMERI PRIMI,
ATTRIBUITA AD EUCLIDE). SONO SIGNIFICATIVE LE PAROLE CHE USA PER
SCRIVERLE : " CIASCUNA DI ESSE CONSERVA LA FRESCHEZZA L'IMPORTANZA
QUANDO E' STATA SCOPERTA : DUEMILA ANNI NON VI HANNO LASCIATO UNA
UGA". LA DIMOSTRAZIONE DEL FATTO CHE LA DIAGONALE DI UN QUADRATO ED IL
IO LATO SONO INCOMMENSURABILI, CIOE' CHE NON ESISTE UN SOTTOMULTIPLO
OMUNE DEI DUE SEGMENTI, PROVOCO' UNA GRAVE CRISI DELLA FILOSOFIA
ITAGORICA, BASATA SULL'IDEA CHE GLI INTERI ED I LORO RAPPORTI FOSSERO
FFICIENTI A SPIEGARE L'UNIVERSO. UNA LEGGENDA VUOLE CHE IN ONORE
I QUESTA SCOPERTA FOSSE SACRIFICATA UNA ECATOMBE (100 BUOI) MENTRE
.TRE RIPORTANO LA MORTE DEL DISCEPOLO RESPONSABILE DELLA DIVULGAZIONE
IL SEGRETO.

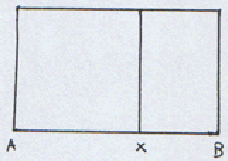
INQUE NESSUNA FRAZIONE $\frac{a}{b}$ CON a e b INTERI POSITIVI, E' ESATTAMENTE
UALE A $\sqrt{2}$.

procede per assurdo: supponiamo che esistano due interi positivi a e b,
imi tra loro, con la proprietà che $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$. Elevando al quadrato:
$^2 = 2b^2$. Essendo pertanto a pari, esiste un intero c tale che
$= 2c$. Ma allora $4c^2 = 2b^2$ cioè $2c^2 = b^2$ e quindi, per lo
esso motivo, anche b deve essere pari. Ma questo contraddice l'ipotesi
e a e b non avessero fattori comuni a parte 1. Dunque l'ipotesi
ell'esistenza di a e b è assurda.

LA SEZIONE AUREA E IL RETTANGOLO AUREO

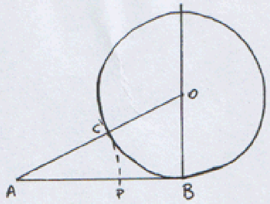
ESPLORAZIONE NUMERICA : DAL RETTANGOLO AUREO ALLA SUCCESSIONE DI FIBONACCI

IN QUESTA ATTIVITA', QUALORA I RAGAZZI ABBIANO MOSTRATO CURIOSITA' NEI
CONFRONTI DEL RETTANGOLO AUREO INTRODOTTO NELLE ATTIVITA' PRECEDENTI,
SI POTREBBE PROPORRE LA COSTRUZIONE DEL SEGMENTO AUREO COSÌ COME
COMPARE NEGLI ELEMENTI DI EUCLIDE. L'OBIETTIVO PRINCIPALE DI
QUESTA ATTIVITA' E' SOTTOLINEARE IL PASSAGGIO DAL REGISTRO GRAFICO A
QUELLO GEOMETRICO E POI ALGEBRICO, VEDENDO TALE COSTRUZIONE COME SOLUZIONE
EOMETRICA DELL'EQUAZIONE OTTENUTA DALLA PROPORZIONE CHE ESPRIME LA
IMILITUDINE DEL RETTANGOLO AUREO E QUELLO CHE RIMANE TOGLIENDO DA ESSO
N QUADRATO.
ER INTRODURRE LA SEZIONE AUREA, SI PUO' PARTIRE DA UN RETTANGOLO
RITAGLIARE DA ESSO UN QUADRATO. SE IL RETTANGOLO RIMASTO
' SIMILE A QUELLO DI PARTENZA ALLORA QUELLO INIZIALE E' DETTO "AUREO"



L RAPPORTO TRA IL LATO MAGGIORE E IL LATO MINORE DI QUESTO RETTANGOLO
I DICE "RAPPORTO AUREO" O "SEZIONE AUREA" E DI SOLITO E' INDICATO
ON LA LETTERA GRECA τ (TAU) (ANCHE SE ALCUNI PREFERISCONO USARE LA LETTERA φ
PHI), DALL'INIZIALE DEL NOME FIDIA, IL FAMOSO SCULTORE GRECO CHE AVEVA USATO LA
EZIONE AUREA ED IL RETTANGOLO AUREO NELLE SUE OPERE). IL MATEMATICO LUCA
'ACIOLI (1445-1509) HA CHIAMATO QUESTO RAPPORTO "DIVINA PROPORTIONE" E,
SPIRATO DA PIERO DELLA FRANCESCA (1416-1492) HA SCRITTO SU DI ESSO UN
RATTATO DAL TITOLO : "DE DIVINA PROPORTIONE"

COSTRUZIONE DELLA SEZIONE AUREA DI UN SEGMENTO AB:



- SI TRACCIA LA PERPENDICOLARE AD AB PER B

SI PRENDE IL PUNTO O IN MODO CHE OB SIA LA METÀ DI AB

SI TRACCIA LA CIRCONFERENZA DI CENTRO O E RAGGIO OB

SI CONGIUNGE O CON A E SI TROVA IL PUNTO C

SI TRACCIA LA CIRCONFERENZA DI CENTRO A E RAGGIO AC

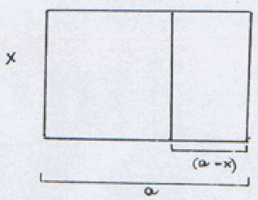
SI TROVA IL PUNTO P DI INTERSEZIONE TRA LA CIRCONFERENZA DEL PUNTO PRECEDENTE E IL LATO AB

LA SEZIONE AUREA DI AB È AP

TALE COSTRUZIONE RAPPRESENTA LA SOLUZIONE GEOMETRICA DELL'EQUAZIONE

$$x^2 = a(a-x)$$

OTTENUTA DALLA PROPORZIONE $a : x = x : (a-x)$ LA QUALE ESPRIME LA SIMILITUDINE TRA IL RETTANGOLO DI PARTENZA (DI LATO MAGGIORE a) E QUELLO CHE RIMANE TOGLIENDO UN QUADRATO (DI LATO x)



SE PONIAMO $a = 1$ SI OTTIENE L'EQUAZIONE $x^2 + x - 1 = 0$

LA CUI RADICE POSITIVA È IL NUMERO CERCATO

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

RAPPORTO $\frac{a}{x}$ DEL RETTANGOLO AUREO È IL NUMERO $\tau = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1,61803398\ldots$

NQUE $x = \frac{1}{\tau}$

LL'EQUAZIONE $x^2 + x - 1 = 0$ SI OTTIENE $x^2 + x = 1$ CIOÈ $x + 1 = \frac{1}{x}$

HE FORNISCE LA NOTEVOLE PROPRIETÀ $1 + \frac{1}{\tau} = \tau$

LTIPLICANDO PER τ SI OTTIENE $\tau + 1 = \tau^2$ E ANCORA

$\tau^2 + \tau = \tau^3$

$\tau^3 + \tau^2 = \tau^4$

...

CIOÈ OGNI POTENZA AD ESPONENTE INTERO DI τ È LA SOMMA DELLE DUE POTENZE PRECEDENTI. QUI OSSERVIAMO UNA PROPRIETÀ CHE "ASSOMIGLIA" A QUELLA CHE DEFINISCE LA CELEBRE SUCCESSIONE DEI NUMERI DI FIBONACCI: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

CON SORPRESA SI SCOPRE CHE IN REALTÀ VI È UN LEGAME PIÙ STRETTO CON LA SUCCESSIONE DEI NUMERI DI FIBONACCI. SI PUÒ ANCHE FARE OSSERVARE, MEDIANTE UNA ESPLORAZIONE NUMERICA, CHE IL RAPPORTO TRA DUE NUMERI DI FIBONACCI SUCCESSIVI, AL CRESCERE DI n, TENDE AL RAPPORTO AUREO, OVVERO:

$\frac{F_{n+1}}{F_n} \to \tau$ DOVE F_n È L'ENNESIMO NUMERO DI FIBONACCI

ATTIVITÀ DI APPLICAZIONE DELLE SIMILITUDINI

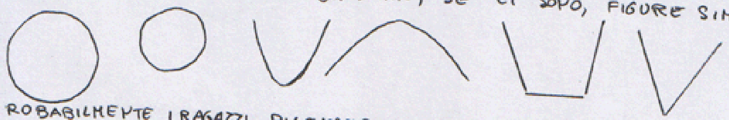
(PER UNA CLASSE TERZA, ESSENDO NECESSARIA LA CONOSCENZA DELLE EQUAZIONI DELLE CONICHE)

QUESTA ATTIVITÀ PUÒ ESSERE PROPOSTA AI RAGAZZI COME OCCASIONE PER ARGOMENTARE, CONGETTURARE E DIMOSTRARE. INOLTRE ESSA COSTITUISCE UNO SPUNTO PER EVIDENZIARE COME L'INTUIZIONE, CHE PURE È ALLA BASE DELLA SCOPERTA DI MOLTI CONCETTI MATEMATICI, TALVOLTA POSSA INDURRE IN AFFERMAZIONI ERRATE.

IN QUESTA ATTIVITÀ SI UTILIZZANO LE FUNZIONALITÀ DI UN SOFTWARE DI GEOMETRIA PER UNA VERIFICA IMMEDIATA DI UNA PROPRIETÀ CHE INIZIALMENTE NON È COSÌ EVIDENTE DAL PUNTO DI VISTA INTUITIVO: SUCCESSIVAMENTE SI CONVALIDA L'AFFERMAZIONE MEDIANTE UNA VERIFICA ANALITICA.

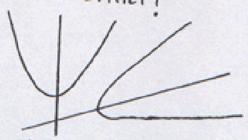
PROBLEMA: TUTTE LE PARABOLE SONO SIMILI?

RA LE FIGURE DISEGNATE INDIVIDUARE, SE CI SONO, FIGURE SIMILI



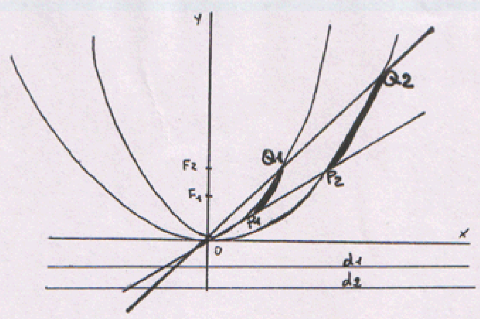
ROBABILMENTE I RAGAZZI RICONOSCERANNO LE CIRCONFERENZE COME FIGURE SIMILI E NON LE PARABOLE. A QUESTO PUNTO SI POTREBBE PROPORRE UNA DISCUSSIONE SUL CASO DELLE PARABOLE, CHE NON È AFFATTO EVIDENTE.

OSSERVIAMO DUE PARABOLE DISPOSTE IN MODO QUALUNQUE NEL PIANO: HANNO LA STESSA APERTURA? SONO SIMILI?



INTUITIVAMENTE NO, MA POSSIAMO ARGOMENTARE CONTRO QUESTA CONCEZIONE INTUITIVA.

ON UN SOFTWARE DI GEOMETRIA SI PUÒ INDIVIDUARE L'ISOMETRIA CHE RASFORMA LE PARABOLE DI PARTENZA IN ALTRE DUE CON VERTICI COINCIDENTI D APPARTENENTI ALLO STESSO SEMIPIANO RISPETTO ALLA COMUNE TANGENTE EI VERTICI.



` POSSIBILE VERIFICARE ANALITICAMENTE CHE LE DUE PARABOLE SI POSSONO TTENERE UNA DALL'ALTRA MEDIANTE UNA OMOTETIA AVENTE COME CENTRO L'ORIGINE EGLI ASSI E RAPPORTO DA DETERMINARE?

ON LO STRUMENTO "VERIFICA PROPRIETÀ" PRESENTE NEL SOFTWARE DI EOMETRIA, SI "SCOPRE" CHE IL SEGMENTO $\overline{P_1Q_1}$ È PARALLELO A $\overline{P_2Q_2}$ PER OGNI COPPIA DI RETTE PASSANTI PER IL VERTICE O.

NTRODUCENDO UN SISTEMA DI ASSI CARTESIANI DI ORIGINE COINCIDENTE ON IL VERTICE E ASSE DELLE ORDINATE COINCIDENTE CON L'ASSE DELLE ARABOLE, CONSIDERATA UNA GENERICA RETTA PASSANTE PER IL PUNTO O, QUESTA INTERSECA LE PARABOLE NEI PUNTI P_1 E P_2.

SI VERIFICA CHE IL RAPPORTO $\frac{OP_2}{OP_1}$ È COSTANTE E NON DIPENDE DALLA RETTA SCELTA. QUESTO DIMOSTRA CHE DUE GENERICHE PARABOLE SONO TRA LORO SIMILI.

CHIAMATE $y=a_1x^2$ E $y=a_2x^2$ LE EQUAZIONI DELLE DUE PARABOLE, INTERSECANDO CON UNA GENERICA RETTA $y=mx$ OTTENIAMO

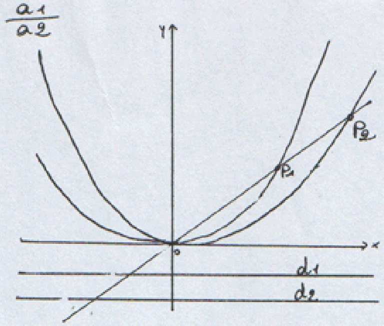
$$\begin{cases} y=mx \\ y=a_1x^2 \end{cases}$$

CHE FORNISCE I PUNTI $O(0,0)$ E $P_1=\left(\frac{m}{a_1}, \frac{m^2}{a_1}\right)$

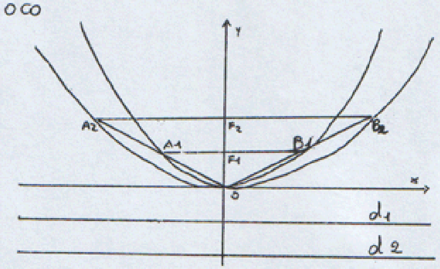
ANALOGAMENTE INTERSECANDO LA SECONDA PARABOLA CON LA STESSA RETTA SI OTTENGONO I PUNTI $O(0,0)$ E $P_2\left(\frac{m}{a_2}, \frac{m^2}{a_2}\right)$

PERTANTO $\frac{OP_2}{OP_1} = \sqrt{\frac{m^2+m^4}{a_2^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{m^2+m^4}{a_1^2}}} = \frac{a_1}{a_2}$

UINDI LE DUE PARABOLE SONO OMOTETICHE E IL RAPPORTO DI
MOTETIA VALE $\frac{a_1}{a_2}$



PER OTTENERE UNA FIGURA CHE SIA "CONVINCENTE" ANCHE DAL PUNTO DI VISTA INTUITIVO OCCORRE DISEGNARE PER CIASCUNA PARABOLA IL "LATO RETTO", CIOE' LA CORDA DELLA PARABOLA OTTENUTA INTERSECANDO QUEST'ULTIMA CON LA RETTA PERPENDICOLARE ALL'ASSE E PASSANTE PER IL FUOCO



L LATO RETTO DELLA PRIMA PARABOLA E' A_1B_1 E QUELLO DELLA SECONDA E' A_2B_2. I DUE TRIANGOLI $O\hat{A}_1B_1$ e $O\hat{A}_2B_2$ SONO OMOTETICI.

POSSIBILI SVILUPPI

SI PUO' ANALIZZARE RISPETTO ALLA SIMILITUDINE IL CASO DI TUTTE E ELLISSI E LE IPERBOLI EQUILATERE, TUTTE SIMILI TRA LORO.