Unità didattica:

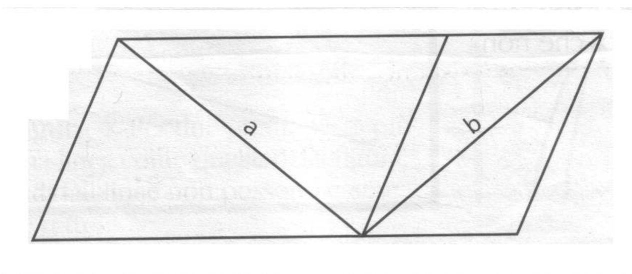
Congetturare e dimostrare

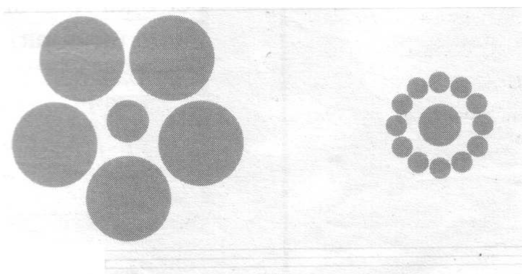
Introduzione.

Gli alunni che iniziano il biennio del Liceo Scientifico non sono in realtà nuovi allo studio della geometria, infatti già nella Scuola Media è stato loro insegnato a distinguere e a definire le principali figure del piano e dello spazio e a riconoscerne le proprietà. Rimangono perciò stupiti nel ritrovare figure e nomi che già avevano incontrato negli anni precedenti, e sono poi letteralmente sconcertati nel trovarsi a studiare teoremi la cui verità appare così ovvia da far sembrare del tutto inutile ogni dimostrazione.

Nel biennio viene, infatti, richiesto agli studenti di dimostrare molto, ma essi spesso non colgono il *senso* di quanto stanno facendo. Il dimostrare, poi, è sempre legato alla geometria, dove, una volta disegnata la figura, la maggior parte delle proprietà da dimostrare sono evidenti. Per molti studenti la dimostrazione è vissuta come esperienza legata ai primi insuccessi scolastici.

Diventa allora importante ritornare spesso su questo punto, e presentare situazioni in cui la sola osservazione ed apparenza visiva possono dare delle sorprese, come negli esempi seguenti:





Il segmento *a* sembra più lungo del segmento *b*, mentre in realtà hanno la stessa lunghezza. Il disco centrale di sinistra, circondato da dischi più grandi, sembra più piccolo di quello centrale di destra, invece le dimensioni dei due dischi sono uguali. Ecco quindi che emerge la **necessità** della dimostrazione.

Per i matematici la dimostrazione viene usata sia come strumento di comunicazione sia di validazione della loro produzione.

La dimostrazione viene usata dagli allievi come strumento per dimostrare che hanno capito, che hanno imparato, e non per dimostrare la validità dell'enunciato: questo non viene, infatti, messo in discussione. Gli allievi cercano essenzialmente di soddisfare l'insegnante, o una sua richiesta.
Per l'allievo la dimostrazione è essenzialmente un modello da imitare **formalmente**, è un modello fornito dall'insegnante o dal libro di testo per:

- risolvere un problema,
- per sostenere una tesi (non sua),
- per esporre una soluzione di un problema (che non nasce da una sua esigenza),
- per dare significato ad una attività proposta dall'insegnante.

L'acquisizione del rigore, e di un linguaggio rigoroso, deve essere un obiettivo da raggiungere nel lungo periodo e una conquista cui gli allievi giungono a partire dalle loro concrete produzioni verbali, messe a confronto e opportunamente discusse nella classe.
Le congetture sono il motore dell'attività matematica, quando si fa una congettura si prova prima ad argomentare la sua verosimiglianza, a sperimentarla su esempi, e quando ci si è convinti della sua verità, si prova a dimostrarla. Se non ci si riesce, si prova a demolirla con l'aiuto di un controesempio.

Il pensiero matematico si sviluppa grazie al processo "argomentare e congetturare". Si educa alla dimostrazione, elemento caratterizzante, facendo evolvere le concezioni degli allievi (stimolati da una situazione didattica) da una fase intuitiva ad una sistemazione in un linguaggio preciso, formulando le problematiche intuite dapprima in modo confuso in concetti rigorosi e definiti.
Per arrivare alla dimostrazione consapevole è necessario sviluppare le competenze argomentative, che hanno bisogno di un clima favorevole all'elaborazione di ipotesi e alla successiva discussione. Si deve avere la possibilità di formulare diverse ipotesi, avere la possibilità di sbagliare.
Le abilità di tipo logico-deduttivo, i processi di generalizzazione e il controllo della validità di tali processi attraverso la dimostrazione sono considerate fondamentali nei curricula di matematica di molti paesi, Italia compresa.
Un itinerario fondato sul concetto di dimostrazione è culturalmente stimolante.
Premesso questo, ritengo sia difficile costruire una unità didattica su "congetturare e dimostrare", in quanto queste attività dovrebbero essere il filo conduttore, l'approccio con cui affrontare, se non l'intero percorso scolastico, almeno il primo biennio del Liceo.

Unità didattica: congetturare e dimostrare.

Circa il ruolo della geometria nella didattica possiamo citare due affermazione, rispettivamente di Atiyah e di Kelley:

"*L'intuizione geometrica rimane il più potente canale per la comprensione della matematica*", e "*la geometria moderna può e deve liberare la fantasia e l'intuizione degli allievi per aprire loro nuove prospettive*".

Il pretesto per affrontare l'argomento sarà dato, quindi, da un problema posto nel contesto geometrico: "*Come varia l'area di un rettangolo variando la lunghezza dei lati*". Si userà, per la dimostrazione. il quadro algebrico.

È opportuno che gli studenti dapprima congetturino e facciano previsioni, successivamente esplorino esempi numerici concreti e, infine, utilizzando il linguaggio algebrico, esplicitino in forma matematicamente compiuta la proprietà studiata.

Collocazione temporale.

Questa attività può essere introdotta alla fine della seconda classe di un Liceo Scientifico in un contesto matematico in cui gli allievi siano stimolati a ***formulare congetture*** di fronte a una situazione problematica. Con esplorazioni successive, alcune di queste congetture saranno confutate, mentre quella corretta sarà corroborata.

Resta da vedere, in questo caso specifico, il *perché*, che non appare immediatamente evidente. Solo il passaggio al linguaggio algebrico permetterà di comprendere e ***dimostrare*** le ragioni per cui la congettura è vera.

Attività interessate e obiettivi.

1. produrre congetture e sostenerle con ragionamenti coerenti e pertinenti;
2. verificare una congettura in casi particolari con consapevolezza della distinzione tra verifica e dimostrazione;
3. confutare congetture prodotte;
4. confrontare le proprie congetture con quelle prodotte da altri;
5. analizzare la correttezza di un ragionamento in un dato contesto.

Prerequisiti.

Per affrontare lo studio di questa unità didattica sono richieste: una conoscenza elementare della geometria, conoscenza del calcolo letterale e delle disequazioni letterali.

Modalità di svolgimento.

E' opportuno che, per questa unità didattica ci sia il meno possibile di lezione frontale, ma che essa si articoli principalmente sotto forma di colloqui, sollecitazioni continue dell'insegnante nei confronti degli studenti ed, eventualmente, lavoro in gruppi nel momento in cui gli alunni provano a verificare le congetture formulate.

Descrizione dell'attività.

Prima fase

Presentazione del problema.

Si consideri un rettangolo; come varia la sua area se un lato diminuisce di $\frac{1}{10}$ *e l'altro aumenta di* $\frac{1}{10}$ *?*

A questo punto si invitano gli studenti a fornire possibili risposte, a formulare le proprie ipotesi, per il momento individuali.
Si avranno come possibili risposte:

- ***a.*** l'area non cambia;
- ***b.*** dipende da quale lato (il maggiore/il minore) aumenta/diminuisce.

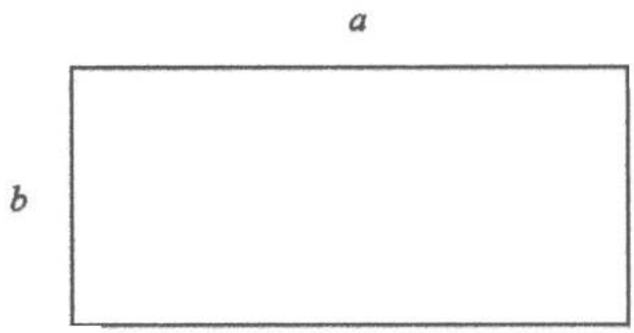
L'insegnante a questo punto invita gli studenti, anche divisi in piccoli gruppi, a fare degli esempi, attribuendo misure precise ai lati e riportando i risultati su tabelle. Il lavoro degli studenti viene opportunamente guidato dall'insegnante che suggerisce, nello stesso rettangolo, di provare ad aumentare [diminuire] prima il lato maggiore e poi quello minore.

Dopo una serie di calcoli e verifiche emergono i seguenti fatti:

1. c'è sempre una diminuzione dell'area;
2. si ottiene lo stesso risultato indipendentemente da quale lato (il maggiore/il minore) aumenti/diminuisca.

Di quanto diminuisce l'area? Di poco? Di tanto? E' possibile individuare un legame tra la variazione delle misure dei lati e quella dell'area? Gli alunni analizzano i risultati ottenuti riportati in tabella e provano a formulare congetture.

A questo punto si fa ricorso al linguaggio algebrico che permette di interpretare il problema in modo chiaro e incontrovertibile:



Se le dimensioni dei lati del rettangolo di partenza sono a e b (e quindi la sua *area* è ab), le dimensioni del secondo rettangolo sono $\frac{11}{10}a$ e $\frac{9}{10}b$; l'*area* vale quindi:

$$\frac{11}{10}a \cdot \frac{9}{10}b = \frac{99}{100}ab\,,$$

cioè diminuisce di $\frac{1}{100}$.

Si noterà che, non avendo attribuito valore numerico specifico alle dimensioni del rettangolo, questo risultato ha carattere di generalità. Si può, quindi tornare alle tabelle precedentemente compilate e verificare, se non fosse emerso al momento, che le aree dei rettangoli presi in considerazione diminuivano effettivamente di $\frac{1}{100}$. Si può nuovamente, tramite discussione con gli alunni, evidenziare e riconoscere nel lavoro fatto le varie fasi: ***esperienza, congettura, dimostrazione, verifica.***

Seconda fase

Generalizzazione del problema.

La seguente generalizzazione è occasione di discussione fra gli studenti sulle varie **strategie risolutive**.

"I lati del rettangolo, di misura a e b, vengono incrementati: uno secondo un fattore reale h (cioè a diventa $a + h \cdot a$) e l'altro secondo un fattore k (cioè b diventa $b + k \cdot b$).

Come varia l'area del rettangolo?"

Intanto, vediamo se è il caso di porre opportune limitazioni ai due fattori, perché il problema abbia ancora senso. Anche in questo caso, seppur velocemente, può essere il caso di far proporre delle risposte da parte dei ragazzi, con verifiche immediate. Emergerà (o si farà emergere con opportune sollecitazioni) che il problema ha senso per $h > -1$ e $k > -1$, poiché per $h, k < -1$ i lati del rettangolo avrebbero misura negativa e per $h, k = -1$ le dimensioni del rettangolo si ridurrebbero a zero.

Si vede poi che, se h e k sono entrambi positivi, l'area aumenta.

Ha senso, invece, porsi il problema quando h e k sono discordi.

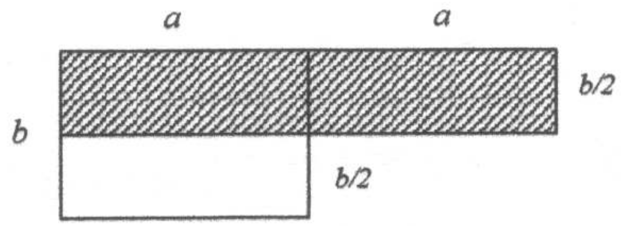
Possibili approcci risolutivi al problema.

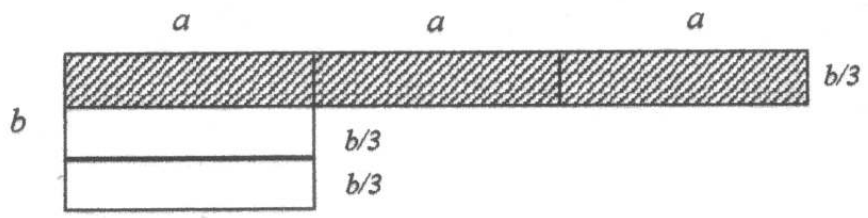
Si possono dividere gli alunni in due gruppi per breve tempo e far provare a ciascun gruppo un approccio diverso:

1. Esplorazione grafica (o pratica).

Gli alunni possono provare a raddoppiare, triplicare, ecc., un lato, ed osservare che l'area resta invariata se l'altro lato viene dimezzato, ridotto ad un terzo, ecc.

Quindi, l'area aumenta solo se il secondo lato diminuisce meno della metà, meno dei $\frac{2}{3}$, ecc.:





Nel primo caso si ha che $h = 1$ e $k = -\frac{1}{2}$ $\left[k > -\frac{1}{2}\right]$; nel secondo $h = 2$ e $k = -\frac{2}{3}$ $\left[k > -\frac{2}{3}\right]$.

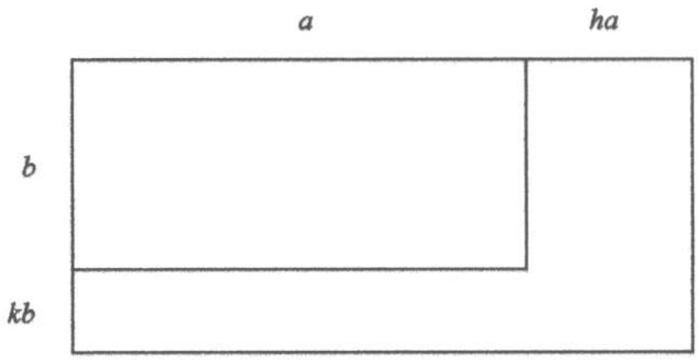
2. Esplorazione numerica.

Gli alunni possono, come già fatto precedentemente, costruire una tabella di valori (eventualmente tramite l'uso di un foglio elettronico qualora questo sia possibile), attribuendo diversi valori agli elementi del problema. Possono far variare tutti gli elementi, oppure, come già osservato prima ed eventualmente con opportuni suggerimenti dell'insegnante, rendersi conto che la soluzione è indipendente dalle dimensioni iniziali del rettangolo.

Possono inoltre accorgersi, sempre per quanto detto prima, che il problema è simmetrico e far variare quindi solo uno tra h e k.

Entrambe le esplorazioni possono sfociare, poi, una volta riunita la classe, nel seguente approccio:

3. Approccio algebrico.



Dette A ed A' rispettivamente l'area del rettangolo dato e l'area del rettangolo i cui lati sono stati incrementati, in generale si avrà che $A' > A$ se:

$$(a + ha)(b + kb) > ab$$

cioè se:

$$a(1 + h)b(1 + k) > ab$$

da cui si ricava:

$$(1 + h)(1 + k) > 1 \;\Rightarrow\; h + k + hk > 0 \;\Rightarrow\; k(h + 1) > -h\,.$$

Essendo $h > -1$, la quantità $(h + 1)$ è positiva, quindi si può dividere per essa e ricavare:

$$k > -\frac{h}{h + 1}.$$

Approfondimenti.

Gli studenti hanno già visto, essendo ormai alla fine del biennio come in matematica ogni affermazione deve essere dedotta da fatti di cui sia stata in precedenza accertata la verità. Accade quindi che, nel tentativo di giustificare ogni cosa si proceda all'indietro facendo riferimento a fatti sempre più elementari fino ad accorgersi che è utile stabilire una volta per tutte un ambiente di riferimento in cui siano chiare alcune affermazioni che si assumono vere senza giustificazioni a proposito di enti che sono accettati senza alcuna definizioni. Il procedimento descritto in modo ingenuo è comunque alla base dell'esigenza di stabilire un quadro certo che, in termini più precisi, viene chiamato "Sistema Assiomatico".

Un sistema assiomatico consiste di entità non definite: le *primitive*, e di affermazioni che ne regolano i rapporti e che si assumono vere senza alcuna giustificazione: gli *assiomi*. Tutto il resto deve discendere, a stretto rigor di logica, da assiomi e primitive.

Possiamo allora vedere la Geometria fin qui studiata come un esempio importante di teoria assiomatica. Si tratta della geometria che si fonda sui libri degli Elementi di Euclide, e che per questo prende il nome di Geometria euclidea.

Euclide fonda le sue argomentazioni su un certo numero di primitive: *punto, retta, piano,* e su un certo numero di assiomi.

Niente ci impedisce allora di introdurre ed esaminare esempi più semplici di sistema assiomatico, ad esempio una geometria finita: la "**Geometria dei Tre Punti**".

La geometria dei Tre Punti ha come primitive:

- le rette
- i punti

ed è governata dai seguenti assiomi:

1. esistono esattamente 3 punti;
2. per ogni coppia di punti distinti passa una e una sola retta;
3. non tutti i punti sono sulla stessa retta;
4. ogni coppia di rette ha almeno un punto in comune.

Nella geometria dei Tre Punti si possono dimostrare i seguenti teoremi:

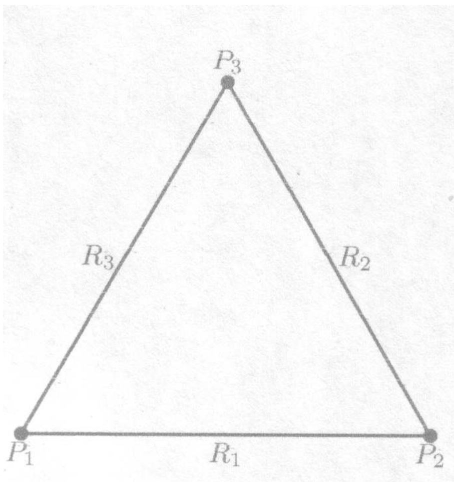
TEOREMA 1. *Due rette distinte si incontrano esattamente in un punto.*

DIMOSTRAZIONE. Per l'assioma 4 ogni coppia di rette ha almeno un punto in comune. Se viceversa due rette distinte passassero per due punti distinti si violerebbe l'assioma 3.

TEOREMA 2. *Nella geometria dei Tre Punti esistono esattamente tre rette.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché, per l'assioma 1, ci sono esattamente 3 punti e poiché, per l'assioma 2, ogni coppia di punti individua una sola retta, esistono al più tre rette. D'altro canto, per l'assioma 3, non tutti e tre i punti possono giacere su una sola retta e quindi le rette sono almeno 3.

Si può costruire un modello per la geometria dei Tre Punti mediante un triangolo i cui vertici P_1, P_2, P_3 rappresentano i Tre Punti della geometria, mentre i lati R_1, R_2, R_3 rappresentano le rette:



Verifica e recupero.

Per quanto detto nell'introduzione, ovvero per la difficoltà di strutturare una unità didattica sul tema "Congetturare e dimostrare" si rende problematico anche il prevedere una verifica e le successive attività di recupero. Il tema del congetturare e dimostrare sarebbe infatti più costruttivo se portato avanti costantemente durante tutto il percorso scolastico. Questo stimolerebbe la costruzione di una forma di pensiero matematico e fornirebbe continue occasioni di verifica e recupero.

Tuttavia, una possibile verifica di quanto fatto potrebbe consistere nel proporre ai ragazzi, in questo caso a livello individuale o al massimo in piccoli gruppi, una volta introdotta la geometria dei Tre Punti:

- la dimostrazione del TEOREMA 1;
- la formulazione di una congettura sul numero di rette nella geometria dei Tre Punti;
- la verifica dei suddetti teoremi nel modello individuato.