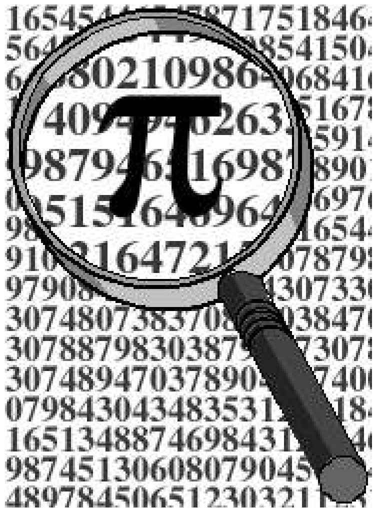
Unità didattica

Il Calcolo di "π"



LORENZO TANZINI

SSIS Toscana
INDIRIZZO FIM – VI CICLO
A.A. 2005/2006

"Il calcolo di π"

Materia: Matematica

Metodologia: far emergere e presentare problemi, creare esempi che portino ad una maggiore conoscenza e dimestichezza con l'oggetto di apprendimento che si deve trattare.

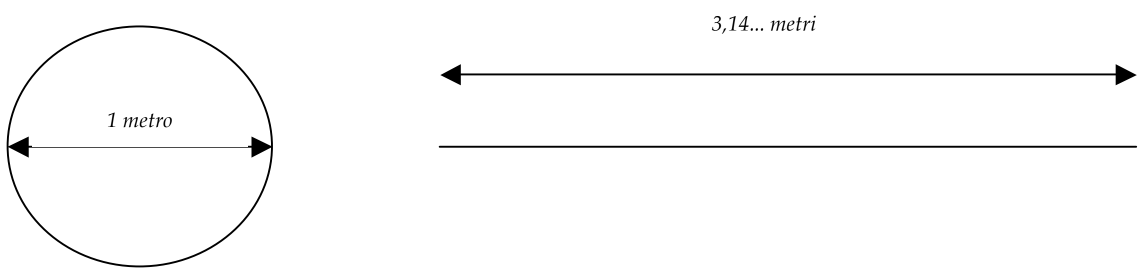
$$\pi = 3{,}1415926535897932384626433832...$$

Il calcolo di π è uno dei problemi più affascinanti ed ardui con cui si sono cimentati illustri Matematici fin dai tempi più remoti.
Il numero π è presente, direttamente o indirettamente, in tutti i testi di matematica ritrovati, compresi quelli vecchi di 4000 anni. La conoscenza che ne avevano le civiltà antiche è talvolta limitata o quasi nulla, ed è soltanto negli ultimi 250 anni che il simbolo è stato usato regolarmente nel suo significato moderno:

- π è il rapporto tra la circonferenza *C* di un cerchio ed il suo diametro *d* (*d* è il doppio del raggio *r*), cioè:

$$\pi = \frac{C}{d} = \frac{C}{2r}$$

Quando si "svolge" una circonferenza di raggio *r*, si ottiene un segmento di lunghezza $2\pi r$. Nel caso di un cerchio di diametro unitario, la lunghezza del segmento è uguale a π.

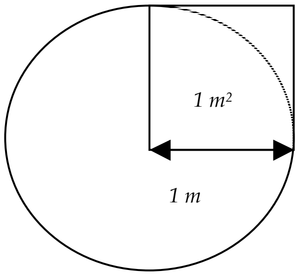


oppure:

- π è il rapporto tra la superficie di un cerchio ed il quadrato del suo raggio:

$$\pi = \frac{S}{r^2}$$

Si deduce da questa seconda formula che π è la superficie in metri quadrati di un cerchio di raggio 1 metro.



Ma l'incontro dell'umanità con π (che è sempre avvenuto grazie alle geometria) fa sorgere, fin dai tempi dell'antichità greca, difficili problemi, tra cui il più famoso è quello della *QUADRATURA DEL CERCHIO*.

Questa scoperta condusse i migliori spiriti a interessarsi della sua tematica, portandoli a sviluppi profondi e sottili. In moltissimi documenti di epoche antiche troviamo traccia di regole empiriche che dovevano servire per la soluzione di problemi aventi a che fare con il simbolo π.

Esaminiamo questa "vita primitiva" di π nei luoghi di cultura dove si cercò di calcolarlo.

Presso i Sumeri, gli Ebrei e i Cinesi antichi si assumeva come lunghezza della circonferenza il triplo di quella del diametro; ciò equivale a porre, come diremmo oggi,

$$\pi = 3.$$

Tra le più antiche documentazioni esistenti relative a π ricordiamo un testo babilonese del 200 *a.C.* circa in cui si trova il valore

$$\pi = 3 + \frac{1}{8}.$$

Un'approssimazione anche migliore è quella degli Egiziani. Il loro procedimento per trovare l'area di un cerchio con diametro 9 è illustrato dal problema **50** [48] del *papiro Rhind* (1650 *a.C.* circa).

Esempio (campo circolare con diametro 9 khet):

il metodo indicato per calcolare l'area di un cerchio consiste nell'effettuare le seguenti operazioni:

1. sottrarre un nono del diametro dal diametro stesso;
2. moltiplicare il risultato per se stesso.

Questo procedimento è notevolmente semplice. In notazione moderna la formula proposta è:

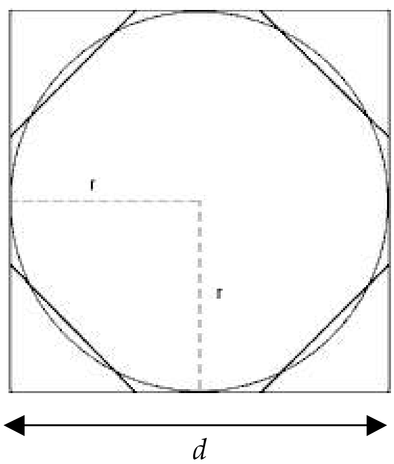
$$A = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2 \qquad \text{con} \qquad d = 9$$

Il campo contiene 64 setat di terra.

Poiché gli Egiziani riconducevano tutti i loro calcoli a inversi di numeri interi, la formula del Papiro di Rhind è la migliore tra quelle che essi consideravano.

Come l'hanno trovata? Non lo sapremo mai con precisione. Tuttavia ci si può immaginare sia stata ricavata con considerazioni di tipo geometrico, nel modo seguente.

Circoscriviamo al cerchio il quadrato di lato d.



L'area del quadrato risulta d^2. Suddividiamo il quadrato in 9 quadrati più piccoli, ciascuno di lato $\frac{1}{3}d$.

L'area di ognuno di questi quadrati è quindi $\frac{1}{9}d^2$.

L'area del cerchio è approssimativamente uguale all'area di sette piccoli quadrati, ossia $7\left(\frac{1}{9}\right)d^2 = \frac{63}{81}d^2$.

Considerando allora $\frac{64}{81}d^2$, invece di $\frac{63}{81}d^2$, senza allontanarsi troppo dal valore ricavato, si ha il vantaggio pratico di avere un quadrato perfetto:

$$\left[\left(\frac{8}{9}\right)d\right]^2.$$

Questo valore può essere scritto come $\left(d - \frac{d}{9}\right)^2$, che rappresenta il risultato desiderato.

Ricordiamo però che il metodo egiziano non faceva comunque uso di una costante come π: in effetti l'algoritmo sopra descritto era utilizzato soltanto per risolvere un tipo di problema pratico.

In ogni caso confrontando la formula nota oggi per l'area del cerchio con quella del metodo egiziano, si può valutare l'approssimazione della costante:

$$A_{cerchio} = \pi r^2 \qquad (r = raggio\ del\ cerchio)$$

$$A_{cerchio} = \left(\frac{8}{9}d\right)^2 \qquad formula\ egiziana$$

da cui:

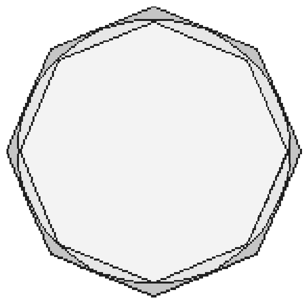
$$\pi = \left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{256}{81} = 3{,}16...$$

che è l'approssimazione cercata.

Lo studio della misura del cerchio fu ripreso nel IV-III secolo *a.C.* dai Greci, oltre mille anni dopo la soluzione egiziana. I Greci fin dall'inizio erano interessati più che ai problemi pratici alla esplorazione delle idee: in quest'epoca aurea del pensiero non ci si limitò più al calcolo di qualcosa, alla quantità, ma ci si iniziò ad interrogare sulla ragione.

La prima valutazione rigorosa nota di π risale al matematico ***Archimede di Siracusa*** (circa 250 *a.C.*), il quale fece avanzare la nostra conoscenza di π in modo notevole. Nel suo libro intitolato "*Sulla misura del cerchio*" egli comincia con lo stabilire che il rapporto tra la superficie di un cerchio e il quadrato del suo raggio è uguale al rapporto tra la circonferenza e il suo diametro.

Egli usò uno schema geometrico:



partendo da due poligoni regolari, l'uno inscritto e l'altro circoscritto ad una circonferenza, e raddoppiando successivamente il numero dei lati, sino a pervenire ai due poligoni regolari (rispettivamente inscritti e circoscritti) di 96 lati, Archimede dimostrò che:

$$3+\frac{10}{71}<\pi<3+\frac{10}{70}$$

ossia:

$$3{,}1408\ldots<\pi<3{,}1428\ldots$$

Per molti secoli nessuno è stato in grado di migliorare il metodo di Archimede, anche se numerosi sono stati coloro che hanno usato questo metodo generale per ottenere approssimazioni più accurate.

Un progresso sostanziale rispetto all'ingegnoso metodo proposto da Archimede lo si ottenne soltanto nel XVII sec.

Alla fine del 1500 ***François VIÈTE*** usò lo sperimentato metodo di Archimede dei poligoni inscritti e circoscritti.

Partendo da considerazioni geometriche sulla superficie di un poligono a 2^n lati, Viète trovò un modo per descrivere π come prodotto infinito:

$$\boxed{\pi=2\times\frac{2}{\sqrt{2}}\times\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\times\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\times\ldots}$$

Riguardo a tale prodotto, però, non si pose quello che oggi diremmo il problema della convergenza (questo genere di preoccupazioni verrà solo più tardi).

Il termine "2" corrisponde all'area di un quadrato inscritto nel cerchio di raggio 1. Il termine:

$$2 \times \frac{2}{\sqrt{2}} = 2 \times \frac{1}{\cos \frac{\pi}{4}}$$

corrisponde all'area dell'ottagono. Si moltiplica per $\frac{1}{\cos \frac{\pi}{8}}$ per passare al poligono di 16 lati, poi per $\frac{1}{\cos \frac{\pi}{16}}$ per passare al poligono di 32 lati, ecc.

Ecco i valori forniti da questa formula:

$$V_1 = 2 \times \frac{2}{\sqrt{2}} = 2{,}8284271246$$

$$V_2 = 2 \times \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = 3{,}0614674589$$

$$V_3 = \ldots = 3{,}1214451522$$

$$V_4 = \ldots = 3{,}1365484905$$

$$V_5 = \ldots = 3{,}1403311569$$

$$V_6 = \ldots = 3{,}1412772509$$

...

Nel calcolo effettivo di π l'equazione si rivela comunque di scarsa utilità pratica perché, come nel metodo di Archimede, si guadagnano tre cifre ogni cinque passaggi.

Uno degli ultimi tentativi di approssimare π con considerazioni geometriche elementari è dovuto al matematico olandese ***Wikkebord SNELLIUS*** (1621), il quale determinò un'approssimazione più esatta di quella che Archimede aveva ottenuto con poligoni di 96 lati.

Storia di π ai tempi dell'Analisi

La nascita dell'analisi moderna (calcolo differenziale ed integrale) è l'occasione della scoperta di nuove definizioni di π che si svincolano dalla geometria. Le formule trovate sono ormai puramente aritmetiche: prodotti, somme o frazioni infinite. In un primo tempo queste formule non presentano il minimo interesse pratico, poiché convergono troppo lentamente.

Tuttavia, questi profondi progressi conducono poco dopo alle potenti formule delle arcotangenti, che domineranno la scena fino al 1973.

Il π che si scopre è:

*"**un nuovo essere matematico puro**"*

di cui la componente geometrica è divenuta secondaria: così, solo un legame molto indiretto unisce il cerchio e la serie:

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots$$

che vale $\frac{\pi}{4}$.

Nel 1655 il matematico inglese ***John WALLIS***, con una lunga serie di interpolazioni e procedimenti induttivi e senza l'ausilio del calcolo infinitesimale, fornì la formula:

$$\boxed{\pi=2\times\frac{2\times 2}{1\times 3}\times\frac{4\times 4}{3\times 5}\times\frac{6\times 6}{5\times 7}\times\dots\times\frac{2m\times 2m}{(2m-1)\times(2m-1)}\cdots}$$

considerata pietra miliare nella storia del calcolo di π. Pur avendo la forma di un prodotto di infiniti termini è la prima che coinvolge solo operazioni razionali, senza calcoli di radici come nella formula di Viète.

Anche questa formula converge molto lentamente a π; per avere tre cifre esatte bisogna eseguire un numero considerevole di prodotti.

Alla fine del 1600, con l'invenzione del calcolo infinitesimale, vennero scoperte molte formula nuove per π.

Una di esse si può facilmente ricavare tenendo presente le seguenti uguaglianze:

$$arctgx=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=\int_0^x\left(1-t^2+t^4-t^6+\dots\right)dt=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\dots$$

Sostituendo $x=1$ si ottiene la nota ***Formula di Gregory-Leibniz***:

$$\boxed{\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\dots}$$

Questa serie converge comunque molto lentamente, tanto che sarebbero necessari centinaia di termini anche per calcolare due cifre decimali esatte di π.

La formula può essere migliorata facendo uso dell'identità trigonometrica:

$$\frac{\pi}{4} = arctg\left(\frac{1}{2}\right) + arctg\left(\frac{1}{3}\right)$$

(che segue dalla formula di addizione della tangente) dalla quale si ottiene:

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \ldots\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \ldots\right)$$

che converge più rapidamente.

Una formula di questo tipo ma ancora più efficiente fu trovata nel 1706 dall'inglese ***John MACHIN***:

$$\boxed{\pi = 4\left(4arctg\frac{1}{5} - arctg\frac{1}{239}\right)}$$

Grazie a questa formula, Machin è il primo matematico a calcolare 100 decimali di π.

Nel 1873 ***William SHANKS*** usò uno schema simile per calcolare 707 cifre decimali, anche se successivamente venne dimostrato che i calcoli erano esatti fino alla 527-esima posizione decimale.

Nello stesso periodo vennero scoperte molte altre formule dello stesso genere che, nonostante le importanti implicazioni teoriche, non si rivelarono molto efficienti per il calcolo di π. Uno dei motivi dei continui tentativi di valutare π risiedeva nel fatto di verificare l'eventuale ripetizione della parte decimale del numero, potendolo così esprimere come rapporto di due interi.

La questione si chiarì alla fine del XVIII secolo quando, nel 1761, i matematici ***Johann Heinrich LAMBERT*** e ***Adrièn Marie LEGENDRE*** dimostrarono che π è un numero irrazionale.

Alcuni matematici continuarono comunque a chiedersi se π potesse essere ottenuto come soluzione di una equazione algebrica a coefficienti interi; il problema venne definitivamente chiarito nel 1882 da ***Ferdinand VON LINDERMANN*** che dimostrò la trascendenza di π.

"*Nessuna definizione finita di* π *può essere data in termini di operazioni aritmetiche elementari (somma, differenza, prodotto, quoziente ed estrazione di radice)*".

Questo risultato pose fine anche al famoso problema classico della quadratura del cerchio: infatti i numeri costruibili per via elementare con riga e compasso sono necessariamente algebrici.

Intorno al 1950, con lo sviluppo delle tecnologie dei calcolatori, sono state calcolate migliaia e poi milioni di cifre per π. Il matematico indiano ***Srinivosa RAMANUJAN*** intorno al 1910 scoprì alcune serie infinite nuove, che vennero rese note solo successivamente: una di queste è la formula:

$$\boxed{\pi = \frac{9801}{2\sqrt{2}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!(1103+26390n)}{(n!)^4\cdot 396^{4n}}\right)^{-1}}$$

che venne utilizzata da ***W. GOSPER*** nel 1985 per calcolare 17 milioni di cifre di π.

Nel 1976 ***Eugene SALAMIN*** e ***Richard BRENT*** hanno scoperto indipendentemente un nuovo algoritmo per π, basato sulla media aritmetica-geometrica e su alcune idee che risalivano al 1800, dovute a Gauss (che però non fu consapevole dell'interesse del suo lavoro per il calcolo di π). La loro è la prima formula a convergenza rapida verso π.

L'algoritmo, di tipo iterativo, converge in modo quadratico a π, ovvero, ad ogni iterazione, sono fornite approssimativamente un numero doppio di cifre corrette.

L'algoritmo richiede l'estrazione di radici quadrate con alta precisione, operazioni non richieste, ad esempio nella formula di Machin.

Nel 1985 i fratelli ***BORWEIN*** hanno ottenuto altri algoritmi, tra i quali due che convergono rispettivamente in modo cubico e quartico.

Quest'ultimo, con lo schema di Salamin-Brent è stato utilizzato nel corso dei primi anni '90 da ***Yasumasa KANADA*** per diverse computazioni di π; in una delle ultime (1999) Kanada ha calcolato 206 miliardi di decimali con un super computer Hitachi.

Più recentemente è stato dimostrato che esistono algoritmi che generano aprossimazioni convergenti a π di ordine m, $\forall m$. Tuttavia, questi algoritmi di ordine superiore non sono più veloci dello schema di Salamin-Brent o di quello quartico di Borwein: anche se sono necessarie un numero inferiore di iterazioni per ottenere un certo livello di precisione, ogni iterazione è più "costosa".

Primi incontri con π

- quando cerchiamo di determinare la lunghezza di una corda necessaria per circondare un grosso albero;
- il numero di assi che bisognerà mettere una a fianco all'altra per ottenere un barile di dato raggio;
- la superficie di suolo che delimita un cerchio tracciata con una cordicella o la quantità di acqua contenuta in una cisterna cilindrica, conica o sferica.

Questi esempi illustrano la più meravigliosa proprietà di π:

"ESSO è sempre là, dappertutto con la sua infinita profondità matematica. Anche se non amiamo la matematica, se cerchiamo ad ogni costo di sfuggirle, π ci riacciufferà, ed essa con lui. π ci assilla e ci trascina nel mondo affascinante dell'ordine geometrico e astratto."

Curiosità riguardanti π

1. ***le cifre di π e la musica.***

A prima vista, se π è normale (cioè se ogni successione compare con la stessa frequenza che se si estraessero i decimali a caso, come gli esperimenti fatti finora sembrano indicare), non c'è nulla da aspettarsi sul piano musicale. Se π presentasse veramente un interesse musicale, non saremmo in grado di goderne completamente; infatti, se ogni cifra fornisse un secondo di musica, i 206 miliardi di decimali di cui disponiamo oggi, fornirebbero un brano musicale della durata di più di 6000 anni.

2. *il vostro compleanno in π.*

L'idea che si possa trovare qualsiasi combinazione di cifre nel decimali di π a condizione di andarla a cercare abbastanza lontano, ha condotto alla messa a punto di programmi che trovano in π la data del vostro compleanno o il vostro numero di telefono.

In filosofia della Matematica, gli intuizionisti hanno regolarmente utilizzato i decimali di π per esporre la loro concezione costruttivista degli oggetti matematici, che rappresentano per loro innanzitutto degli oggetti mentali.
Essi hanno inoltre affermato che prima di aver scoperto sette "7" consecutivi nei decimali di π, nessuno può sostenere, come si è naturalmente tentati di fare, che la sequenza "7777777" sia presente nella sequenza infinita dei decimali di π, oppure no.
Per gli intuizionisti, siamo noi che costruiamo π, e il principio del terzo escluso (che afferma che ogni proprietà è vera oppure è falsa) non si applica, nello stesso modo in cui non si applica ai personaggi di fantasia.
In effetti, nessuno sostiene che il bisnonno di Jean Valjean o era biondo o non lo era: la questione non ha senso per il fatto che Hugo non ne fa menzione ne "I Miserabili".
Per un intuizionista, π è come il bisnonno di Jean Valjean; ciò che si conosce è vero, ciò che non si conosce non è né vero né falso.

Qualche coincidenza: dobbiamo meravigliarci?

Ecco alcune stranezze osservate in π:

1. lo "0" fa la sua comparsa per la prima volta soltanto nella 32ª posizione, dopo la virgola, dopo che tutte le altre cifre si sono presentate già almeno una volta nei primi 13 decimali. Perché questo ritardo dello "0"?

2. sommando i primi 20 decimali di π dopo la virgola, si ottiene 100. Si deve cercare una spiegazione a questo fatto singolare?

3. sommando le prime 144 cifre decimali di π si ottiene 666. Dobbiamo concludere che π è diabolico?

4. se si considera il quadrato magico 5×5 riprodotto sotto e si sostituisce ogni numero n con il decimale di π di posto n ("1" è sostituito da "3", "2" è sostituito da "1", ecc...) si ottiene una tabella in cui le somme dei numeri delle righe sono uguali a quelle dei numeri delle colonne:

17	*24*	*1*	*8*	*15*	**65**
23	*5*	*7*	*14*	*16*	**65**
4	*6*	*13*	*20*	*22*	**65**
10	*12*	*19*	*21*	*3*	**65**
11	*18*	*25*	*2*	*9*	**65**
65	**65**	**65**	**65**	**65**	

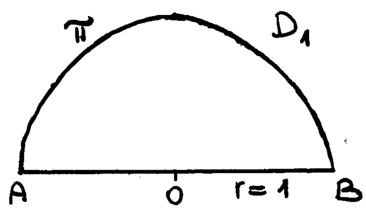
2	*4*	*3*	*6*	*9*	**24**
6	*5*	*2*	*7*	*3*	**23**
1	*9*	*9*	*4*	*2*	**25**
3	*8*	*8*	*6*	*4*	**29**
5	*3*	*3*	*1*	*5*	**17**
17	**29**	**25**	**24**	**23**	

Paradossi che riguardano π

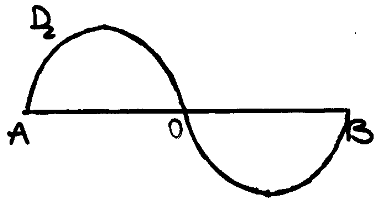
A titolo di divertimento, ecco alcuni giochi e paradossi relativi a π, con cui i ragazzi possono dilettarsi.

a. Dimostrazione che $\pi = 2$:

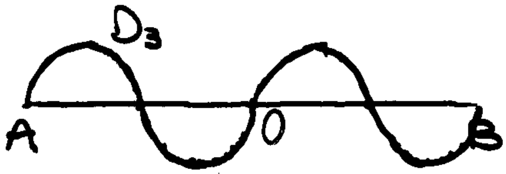
consideriamo una semicirconferenza di raggio 1 e diametro *AB*. La lunghezza dell'arco di questa semicirconferenza, che chiameremo D_1, è π.



Consideriamo ora due semicirconferenze di raggio $\frac{1}{2}$ e indichiamo con D_2 questa nuova curva.



La lunghezza di D_2 è sempre π, perché la prima semicirconferenza ha lunghezza $\frac{\pi}{2}$, come la seconda. Continuiamo in questo modo, costruendo D_3, D_4, ecc.



Le curve D_1, D_2, … hanno tutte lunghezza π. Esse tendono al segmento AB, curva limite di tutte queste curve, e diametro di D_1, di lunghezza 2. Si conclude perciò che $\pi = 2$.

Questa conclusione è FALSA poiché la lunghezza di una curva limite non è il limite delle lunghezze.
Si dimostra che la lunghezza di una curva limite (se esiste e non è detto che ci sia) è sempre minore o uguale al limite delle lunghezze (ancora se questo limite esiste), ma non si può dimostrare l'uguaglianza dei due limiti.
Il paradosso nasce da un passaggio al limite ingiustificato e ingiustificabile. L'intuizione ingenua che la curva limite abbia come lunghezza il limite delle lunghezze è un'intuizione errata.

b. Dimostrazione che π è un numero razionale:

Abbiamo visto che i passaggi al limite sono pericolosi. Eccone un altro esempio.
Vediamo la dimostrazione che π è un numero razionale, cioè è il quoziente di due numeri interi.
– Consideriamo la successione delle approssimazioni decimali di π e indichiamo con π_n la n-esima approssimazione. Si ha:

$$\pi_0 = 3; \quad \pi_1 = 3{,}1; \quad \pi_2 = 3{,}14; \quad \pi_3 = 3{,}141; \ldots$$

Il ragionamento è ricorsivo:

- π_0 è razionale, perché è un intero;
- π_1 è razionale, perché $3{,}1 = \frac{31}{10}$;
- supponiamo che π_n sia razionale, cioè della forma $\pi_n = \frac{p}{q} \quad con \quad q = 10^n$.

Aggiungendo la cifra decimale successiva c, il numeratore diventa $10p + c$ e il denominatore diventa $10q$.

Infatti:

$$\pi_1 = 3{,}1 = \frac{31}{10} = \frac{10 \cdot 3 + 1}{10}$$

$$\pi_2 = 3{,}14 = \frac{314}{100} = \frac{10 \cdot 31 + 4}{100}$$

$$\pi_3 = 3{,}141 = \frac{3141}{1000} = \frac{10 \cdot 314 + 1}{1000}$$

$$\pi_4 = 3{,}1415 = \frac{31415}{10000} = \frac{10 \cdot 3141 + 5}{10000}$$

$$\vdots$$

Pertanto il numeratore è del tipo $10p + c$, essendo c la cifra decimale successiva.

Ne segue che:

$$\pi_{n+1} = \frac{10p + c}{10q} = \frac{10p + c}{10 \cdot 10^n} = \frac{10p + c}{10^{n+1}}$$

che è anch'esso decimale della forma 10^{n+1}.

Utilizzando il ragionamento per ricorrenza, si arriva al risultato che tutti i π_n sono razionali, e dunque anche π. C.V.D.

Questa dimostrazione è senz'altro falsa, poiché essa si applica a tutti i numeri reali e dunque a $\sqrt{2}$, che è conosciuto come numero irrazionale da più di 2000 anni.

Perché la dimostrazione è falsa?

La conclusione del ragionamento ricorsivo è che "tutti i π_n sono razionali" (cosa che tra l'altro non ha bisogno di essere dimostrata per ricorrenza, poiché per definizione le approssimazioni decimali di π sono numeri razionali), ma questo non permette di concludere

che π (il numero limite della successione dei π_n) è razionale: l'essere razionale non è una proprietà che si conserva nel passaggio al limite.
L'errore nel ragionamento consiste nel non avere la consapevolezza che, nelle ultime tre parole, "… e dunque π", si utilizza una operazione non lecita nel passaggio al limite.

"Ogni passaggio al limite di una proprietà deve essere giustificato."

Riflettiamo su un altro esempio di passaggio al limite non giustificato che produce un assurdo.

Esempio.

Gli insiemi: $\{0\}$; $\{0,1\}$; $\{0,1,2\}$; $\ldots$; $\{0,1,\ldots,n\}$

sono tutti insiemi finiti. Dunque, passando al limite, l'insieme $\{0,1,\ldots,n\}$ di tutti i numeri interi è un insieme finito, cosa palesemente assurda.

Conclusioni

Un'ultima fondamentale motivazione per il calcolo di π è quella della "sfida": π è senza dubbio la più famosa delle costanti matematiche che ogni "civiltà" tecnica si trova a dover conoscere a fondo.

In effetti è sorprendente come la costante π intervenga, ad esempio nel calcolo delle probabilità.

Nel 1733 il naturalista francese ***Georges Louis Leclerc***, conte di Buffon, fondatore della probabilità geometrica, pose il quesito:

Problema dell'ago di Buffon.

Se si getta a caso un ago di lunghezza ***l*** su un tavolo su cui sono tracciate rette parallele a distanza ***d*** (***d>l***) l'una dall'altra, qual è la probabilità che l'ago intersechi una delle righe?

Buffon ne pubblicò la soluzione solo nel 1777 nell'opera "***Essai d'Arithmétique morale***".

Sorprendentemente la soluzione coinvolge π; la probabilità P cercata è, infatti:

$$\boxed{P = \frac{2l}{\pi d}}$$

Se è sorprendente la presenza di π nella formula relativa al problema dell'ago di Buffon, lo è altrettanto, o forse più, quella nella risoluzione del cosiddetto:

Problema di Cesaro.

Se due numeri naturali sono scelti a caso, qual è la probabilità che essi siano primi tra loro?

Il problema fu posto e risolto nel 1881 dal matematico italiano ***E. CESARO***, il quale stabilì che la probabilità P richiesta vale:

$$\boxed{P = \frac{6}{\pi^2}}$$

Anche questa formula è stata utilizzata per trovare sperimentalmente valori di π.

"π è un motore per lo spirito scientifico"