SSIS Toscana - Sede di Siena
VI ciclo
A.A. 2005/2006
Indirizzo FIM - II anno

I Problemi di Massimo e Minimo

Laboratorio di Didattica della Matematica

Leonardo Teglielli

UNITÁ DIDATTICA

TITOLO	I Problemi di Massimo e Minimo
MATERIA	Matematica
COLLOCAZIONE	V Liceo Scientifico (tradizionale o PNI) II Liceo Scientifico (tradizionale o PNI)
PERIODO	II Quadrimestre

PREREQUISITI

- ✓ Funzioni continue in una variabile reale e proprietà
- ✓ Calcolo differenziale in una variabile reale
- ✓ Massimi e minimi di funzioni in una variabile
- ✓ Rappresentazione di funzioni in un sistema di coordinate Cartesiane ortogonali
- ✓ Geometria Euclidea del piano e dello spazio

OBIETTIVI GENERALI

- ✓ Matematizzare situazioni riferite a problemi
- ✓ Utilizzare consapevolmente e criticamente le procedure di calcolo e il formalismo matematico
- ✓ Attribuire significato ai simboli contestualmente al problema
- ✓ Inquadrare storicamente qualche momento significativo della storia del pensiero matematico
- ✓ Colmare il distacco fra matematica e realtà

OBIETTIVI SPECIFICI

CONOSCENZE (sapere)

- Sapere cosa significa determinare il massimo e il minimo di una quantità variabile in funzione di un'altra
- Riconoscere le caratteristiche delle funzioni nell'ambito di un problema

COMPETENZE (sapere fare)

- Tradurre un problema in forma analitica utilizzando il formalismo matematico
- Applicare opportunamente algoritmi di calcolo
- Riconoscere l'esistenza del massimo e del minimo di una funzione
- Determinare il massimo e il minimo a seconda delle circostanze con metodi analitici e sintetici

CAPACITÁ (analisi e sintesi)

- Saper interpretare un problema ed essere in grado di trovarne la strategia risolutiva
- Operare scelte consapevoli e coerenti
- Saper interpretare le soluzioni in modo appropriato
- Essere in grado di effettuare previsioni

METODOLOGIA

Lo studio dei problemi di massimo e minimo viene solitamente affrontato nell'ultima classe dei Licei Scientifici come applicazione del calcolo differenziale. Esso svolge un ruolo fondamentale nell'applicazione della matematica alla risoluzione di problemi sia matematici sia pratici legati a scelte e ottimizzazioni.
Tuttavia è di fatto ridotto e vissuto dagli alunni come un'insieme di regole e procedure da imparare a memoria ed applicare in maniera meccanica, e non come un efficace strumento di indagine da usare in modo critico.
Spesso inoltre ci si dimentica che tali problemi sono nati storicamente in seno alla geometria prima dell'avvento dell'analisi che anzi ha costituito spesso un mezzo per arrivare a scoprire proprietà e caratteristiche delle figure geometriche piane e solide difficili se non impossibili da dedurre sinteticamente.
Da qui l'idea di poter inserire alcuni dei contenuti in una seconda Liceo Scientifico dove solitamente si affronta la geometria Euclidea del piano.

La metodologia che si intende adottare, parte dalla condivisione dei saperi naturali sui problemi di massimo e minimo.
Naturalmente si inizia con alcune domande cui si chiede una risposta scritta immediata:

1. quando hai incontrato per la prima volta le parole "massimo e minimo"?
2. cosa pensi che sia un "problema di massimo e minimo"? sapresti fare degli esempi?

È ovvio che non si possono prevedere quali saranno le risposte, ma dobbiamo cercare di far emergere problemi che portino a scoprire quale sia l'oggetto di apprendimento che intendiamo trattare.
Capita spesso di trovarsi di fronte a questioni che riguardano scelte di ottimizzazione:

1. Quale è il percorso più breve fra due città?
2. Quale forma dovrebbe avere una barca per offrire la minima resistenza all'acqua?
3. Quando un'azienda realizza il massimo guadagno rendendo minimo l'impiego delle risorse a sua disposizione?
4. Quale forma deve avere uno scaldabagno per disperdere la minima quantità di calore?

Allora la domanda "che cosa è un problema di massimo e minimo", trova la sua risposta in modo naturale: <u>c'è sempre una grandezza di varia natura che cambia e occorre trovare in quali circostanze essa è massima o minima a seconda della situazione problematica che si intende risolvere</u>.
Una volta individuato l'oggetto di apprendimento, si propongono problemi, si cercherà di guidare gli alunni verso la loro matematizzazione e di ricercare la soluzione sia facendo uso critico e consapevole degli strumenti a loro disposizione (il calcolo differenziale e le proprietà delle funzioni), sia proponendo strumenti alternativi (dimostrazioni sintetiche).

Tutto ciò ha il fine di accrescere negli studenti l'interesse e l'importanza nei confronti della dimostrazione, oggi spesso trascurata soprattutto in ambito geometrico, e a renderli consapevoli che gli strumenti dell'analisi, quelli che comunemente chiamano "calcoli" costituiscono mezzi atti a dimostrare.
Inoltre relativamente a qualche problema si è cercato di collocarlo storicamente e di far vedere come la sua risoluzione si sia protratta per secoli lungo la storia della matematica.
Nel percorso sono stati inseriti degli approfondimenti con lo scopo di evidenziare che la matematica non è una disciplina "a sé" come spesso viene dato a intendere e come molte volte i ragazzi a scuola la vivono, ma invece investa con i suoi problemi la vita di oggi e quella del passato. Lo scopo è anche quello di colmare il distacco fra matematica e realtà, cercare di motivare l'interesse per la

matematica, avvicinare e abituare i ragazzi di oggi al pensiero scientifico, stimolare in essi la capacità di porsi domande e problemi di ogni genere cercando vie risolutive nelle quali la matematica è un mezzo che facilità le cose.
Nell'intervento didattico si mirerà, principalmente a favorire il dialogo, il confronto sui problemi proposti e le scelte effettuate, il dibattito sulle soluzioni trovate.
Nell'attività di verifica, da effettuare in classe a gruppi e in un momento unitario, ho cercato di proporre non semplici esercizi di verifica, ma problemi nei quali invitare i ragazzi a riflettere, a motivare le scelte effettuate, a interpretare le soluzioni trovate.

MEZZI E STRUMENTI

Lavagna tradizionale
Lavagna luminosa
Libri di testo
Letture varie
Fotocopie e dispense
Calcolatore elettronico (PC)

TEMPI

Trattazione dei contenuti: 8 ore
Verifiche: 4 ore

SVILUPPO DEI CONTENUTI

I presenti contenuti non seguono un ordine cronologico e sequenziale, ma sono stati strutturati in modo da poter essere sviluppati in modo indipendente l'uno dall'altro.

IL PERCORSO PIÙ BREVE TRA DUE VILLAGGI. ILTEOREMA DI ERONE

Il presente argomento può essere trattato sia in II Liceo che in V, in quanto presuppone solamente delle semplici conoscenze di geometria piana.

Partiamo da un problema:

dalla stessa parte di un fiume si trova una pianura in cui sono situati due villaggi. Una persona deve andare da un villaggio all'altro attingendo lungo il cammino acqua dal fiume.

Quale è il cammino più breve che dovrà fare?

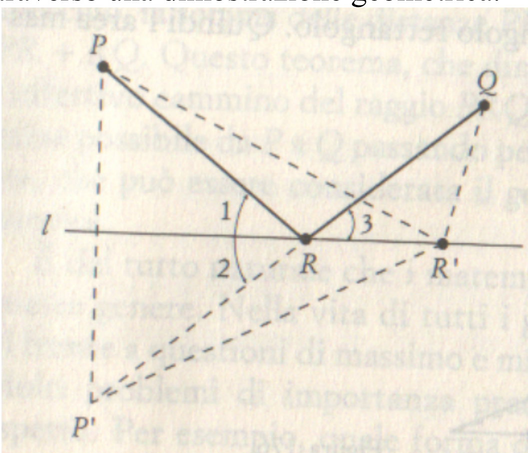
Cerchiamo di formulare il problema in termini matematici.

Innanzi tutto supponiamo che tratto di fiume interessato sia rettilineo e assimiliamo i due villaggi a due punti.

Allora arriviamo alla formulazione matematica del problema che prende il nome di Teorema di Erone:

dati una retta l e due punti P e Q dalla stessa parte di l, per quale punto R di l è minima la distanza PR+QR ?

Il problema si risolve bene attraverso una dimostrazione geometrica.



Consideriamo il punto *P'* simmetrico di *P* rispetto alla retta *l*.

Congiungiamo *P'* con *Q* e chiamiamo *R* il punto di intersezione fra *l* e il segmento *P'Q*.

Dimostriamo che *R* è il punto cercato.

Infatti preso un qualsiasi altro punto *R'* della retta *l* dobbiamo dimostrare che si ha:

$PR+QR<PR'+QR'$.

Ricordando la proprietà dell'asse di un segmento e le disuguaglianze nei triangoli otteniamo:

$PR+QR=P'R+QR=P'Q<P'R'+R'Q=PR'+QR'$.

Il punto *R* così come è costruito è il punto cercato.

Andiamo a vedere meglio quali sono le proprietà di *R*.

Gli angoli 1 e 2 sono congruenti perché *R* è sull'asse di *PP'*,

Gli angoli 2 e 3 sono congruenti perché opposti al vertice,

quindi risultano congruenti anche 1 e 3.

Allora R è tale che gli angoli che i segmenti *PR* e *QR* formano con la retta *l* sono congruenti.

Sappiamo trovare una situazione analoga che ci richiama il problema appena visto?

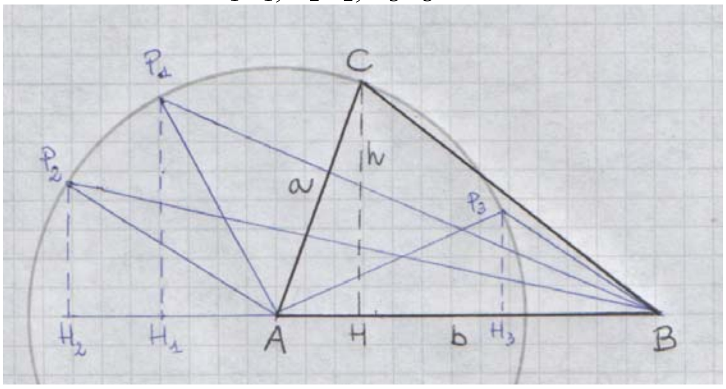
La situazione la si riscontra in fisica nella riflessione di un raggio luminoso emesso da una sorgente puntiforme su uno specchio piano (con la sorgente dalla stessa parte della superficie riflettente).

IL TRIANGOLO DI AREA MASSIMA

Un problema, stavolta di geometria, offre lo spunto per una serie di considerazioni di vario tipo e può essere un modo per introdurre i metodi dell'analisi per la ricerca dei massimi e dei minimi.

Il problema è il seguente:
fra i triangoli aventi due lati di misura assegnata, quale è quello di area massima?

Procediamo innanzi tutto per via intuitiva.
Consideriamo un triangolo qualsiasi e indichiamo per comodità a e b sia i lati che le loro misure.
Prendiamo il lato b come base.
Tracciamo la circonferenza di centro A e raggio a.
Prendiamo a scelta dei punti P_1, P_2, P_3, sulla circonferenza e consideriamo i triangoli AP_1B, AP_2B, AP_3B.
Di ogni triangolo tracciamo le altezze P_1H_1, P_2H_2, P_3H_3.



Domande:

1. quali elementi dei triangoli cambiano e quali no?
2. come varia l'area dei triangoli?
3. quale ti sembra quello che ha l'area maggiore di tutti?

La conclusione è presto trovata: l'area del triangolo è $A = \frac{1}{2} b \cdot h$ e sarà massima quando è massima l'altezza, ovvero quando $h=a$, cioè per un triangolo rettangolo di cateti a e b.

La via intuitiva alla soluzione si può anche effettuare con CABRI GEOMETRIE

Passiamo quindi alla ricerca della soluzione ricorrendo al calcolo differenziale e alle proprietà delle funzioni.
Partiamo dalle risposte alla terza domanda.
Nei vari triangoli che abbiamo disegnato, cambiano l'angolo compreso fra i lati assegnati, il terzo lato BC, e l'altezza.
Cerchiamo di ottenere l'espressione dell'area del triangolo in funzione di questi elementi:
Indichiamo con α sia l'angolo, sia la sua misura in radianti.
Indichiamo con x sia il lato BC che la sua misura.
Indichiamo con h sia l'altezza che la sua misura.
Otteniamo:

$A(\alpha) = \frac{1}{2} ab sen\alpha$ se scegliamo l'angolo,

$A(x)=\sqrt{\left(\frac{a+b+x}{2}\right)\left(\frac{a+b+x}{2}-a\right)\left(\frac{a+b+x}{2}-b\right)\left(\frac{a+b+x}{2}-x\right)}$ se si sceglie il lato *BC* e si richiama la formula di Erone,

$A(h)=\frac{1}{2}bh$ se si sceglie l'altezza.

Tutte le espressioni esprimono l'area come funzione dell'elemento scelto e sono evidenti le diverse caratteristiche delle funzioni ottenute. La scelta quindi è fondamentale, da essa dipende inevitabilmente la complessità della funzione che si ottiene.
Per risolvere il problema occorre determinare il massimo delle funzioni trovate, tenendo conto che l'elemento della figura (la variabile indipendente delle funzioni) ha delle limitazioni imposte dal problema stesso, e interpretare il risultato geometricamente.

Come esempio focalizziamo l'attenzione su $A(\alpha)=\frac{1}{2}absen\alpha$.

Vista come funzione, α rappresenta ogni possibile valore reale, ma in realtà, riferendosi alle proprietà dell'elemento scelto, quali valori potrà assumere?
Essendo un angolo di un triangolo potrà assumere tutti i valori compresi nell'intervallo $(0,\pi)$ in quanto "la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto".
E i valori estremi? Esaminiamo cosa succede. In corrispondenza di tali valori il triangolo degenera in un segmento, l'area sarà nulla. Infatti in corrispondenza di tali valori la funzione determinata assume il valore zero. Comunque sia possiamo prenderli e dire alla fine che α può variare in $[0,\pi]$.
In definitiva lo scopo del problema si riassume nel determinare il massimo della funzione

$A=\frac{1}{2}absen\alpha$ nell'intervallo $[0,\pi]$.

Considerazioni analitiche:

- è una funzione continua sui reali
- l'intervallo è chiuso e limitato
- il teorema di Weierstrass assicura l'esistenza del massimo (e del minimo) su tale intervallo.

Si procede alla ricerca del massimo coi metodi analitici:

a) ricerca dei punti stazionari interni all'intervallo
b) confronto dei valori assunti dalla funzione nei punti stazionari e agli estremi
c) determinazione del valore massimo.

Conclusione: il triangolo di area massima si ottiene per $\alpha=\frac{\pi}{2}$, in tal caso il triangolo è rettangolo di cateti a e b ed ha area pari a $\frac{1}{2}ab$.

Ovviamente nel caso si consideri la funzione $A(x)$, le limitazioni per *x* si ottengono ricordando la disuguaglianza triangolare, e per l'altezza osservando che non può superare il valore del lato *a*.

PROPOSTE PER L'ATTIVITÁ DI VERIFICA

1. Si consideri l'insieme dei triangoli per i quali la somma della base e dell'altezza ad essa relativa misuri 3 cm. Determinare quello di area massima.
   Commentare il risultato ottenuto.
2. Utilizzando il percorso che preferisci dimostra quale è, fra tutti i triangoli che hanno area assegnata e lato assegnato, quello per cui è minima la somma degli altri due lati.

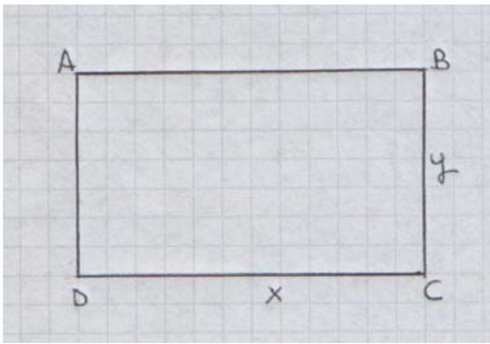
IL PROBLEMA DEI RETTANGOLI ISOPERIMETRICI

Il problema dei rettangoli isoperimetrici, insieme al suo duale (la cui soluzione viene data per via analitica), permette di scoprire una interessante proprietà relativa al quadrato. Inoltre la sua interpretazione algebrica è un modo per legare le proprietà delle figure a quelle dei numeri.

Il problema isoperimetrico dei rettangoli consiste nel determinare fra tutti i rettangoli di perimetro assegnato, quale abbia l'area massima.

Il problema ha un analogo algebrico. Sappiamo dire quale sia?
Assegnando il perimetro automaticamente si assegna la somma dei due lati del rettangolo cioè il semiperimetro; l'equivalente algebrico del problema è allora: dati due numeri reali positivi aventi somma costante, quando è massimo il loro prodotto?

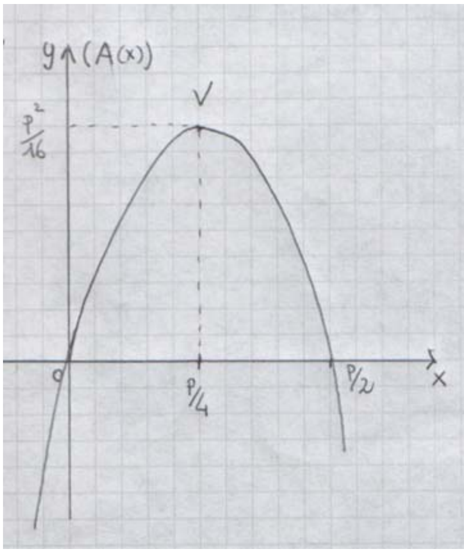
Procediamo alla risoluzione per via analitica.
Sia p il perimetro assegnato di un generico rettangolo.
Indichiamo con x e y sia i lati che le loro misure, nello specifico x rappresenta la base e y l'altezza del rettangolo $ABCD$.



L'area sarà $A = x \cdot y$. Siamo in presenza di una funzione che dipende da due variabili. Dobbiamo eliminarne una e se ci ricordiamo che il perimetro $p = 2(x+y)$, ecco che

$A(x) = x\left(\frac{p-2x}{2}\right) = \frac{xp}{2} - x^2$.

La funzione è facilmente individuabile: si tratta di una parabola passante per l'origine concava con vertice in $V\left(\frac{p}{4}, \frac{p^2}{16}\right)$. Rappresentiamola



Facciamo, prima di giungere alle conclusioni, delle considerazioni su x, (la nostra incognita) in relazione al grafico della parabola.
x rappresenta la misura della base e come tale dovrà essere un numero positivo, inoltre non può superare il valore del semiperimetro.

In corrispondenza dei valori 0 e $\frac{p}{2}$ il rettangolo degenera infatti in un segmento.

Dobbiamo quindi considerare il grafico della parabola nell'intervallo $\left[0, \frac{p}{2}\right]$.

In tale intervallo cade l'ascissa del vertice che è l'unico punto di massimo della parabola.

Il rettangolo di area massima ha la base di misura $x = \frac{p}{4}$, l'altezza $y = \frac{p}{4}$, e l'area $A = \frac{p^2}{16}$.

Si tratta quindi di un quadrato.

Proviamo a questo punto a invertire il problema.

<u>Manteniamo costante l'area e vediamo cosa accade al perimetro.</u>

Traduciamo di nuovo il problema in forma analitica:
$x \cdot y = S$, dove S è il valore dell'area assegnata,
$p(x) = 2(x + y) = 2\left(x + \frac{S}{x}\right)$ esprime il perimetro.

La funzione che esprime il perimetro ci interessa, tenendo conto sempre che le misure sono positive, per $x>0$.
Cosa accade per $x=0$?
Ricorrendo ai limiti: $\lim_{x \to 0} p(x) = +\infty$

Da un punto di vista geometrico se assegno la misura dell'area, il rettangolo non può essere degenere, quindi ciò spiega il perché la funzione *p(x)* non è definita per $x=0$.
Studiando la funzione si perviene alla conclusione che essa ha minimo per $x = \sqrt{S}$, in corrispondenza del quale troviamo $y = \sqrt{S}$, e $p = 4\sqrt{S}$.
Il rettangolo di perimetro minimo è il quadrato.
Da sottolineare il fatto che il teorema di Weierstrass non garantisce l'esistenza del massimo e del minimo per $x>0$ essendo l'intervallo non limitato.
Traiamo come conclusione che: <u>fra i rettangoli di area assegnata il quadrato ha il perimetro minimo</u>.

> Analogamente l'equivalente algebrico: <u>dati due numeri reali positivi aventi prodotto costante, la loro somma è minima quando i due numeri sono uguali.</u>

Concludendo:

- tra i rettangoli di dato perimetro il quadrato ha area massima
- tra i rettangoli di area assegnata il quadrato ha perimetro minimo.

PROPOSTE PER L'ATTIVITÁ DI VERIFICA

1. Fra i numeri naturali aventi somma 519 quali sono quelli per cui il prodotto è massimo? E fra i razionali?
2. Come deve essere il prodotto fra due numeri naturali affinché la loro somma sia minima?

IL PROBLEMA DEGLI ISOPERIMETRI NEL PIANO E IL PROBLEMA DI DIDONE

Il problema degli isoperimetri nel piano e il problema di Didone per come sono proposti in questo percorso, che prevede la loro soluzione per via sintetica, possono essere trattati in II e in V Liceo.

Iniziamo con la lettura di due brani.

La Matematica e il problema immobiliare

C'era una volta una regina africana che peregrinava con il suo seguito di sudditi alla ricerca di un regno. La regale signora era piuttosto angosciata dal problema; non le sembrava molto serio, per una persona del suo rango, starsene a spasso senza una reggia, ne un giardino, ne un trono... Inoltre non poteva neanche presentarsi da parenti o suoi colleghi re, col rischio di essere ignominiosamente sbeffeggiata! Cominciò allora a documentarsi su come riuscire a risolvere la questione. Comprò libri di favole, di miti e di leggende, ma non trovò nulla di adeguato: le ricette richiedevano invariabilmente una fata o un mago e qualche incantesimo, ingredienti che, come è noto, non si rimediano tanto facilmente...
Dopo lunghe peregrinazioni (sempre seguita dal codazzo di sudditi mugugnanti) arrivò, ormai scoraggiata, ad una splendida spiaggia tunisina. I sudditi immediatamente si spogliarono e si tuffarono e dichiararono che da lì non si sarebbero più mossi, regina o non regina. Didone si rese conto che doveva tentare il tutto per tutto. Ma che fare? Banche non esistevano, di mutui neanche a parlarne... Senza molte speranze, si vestì da regina e andò a intercedere presso il legittimo proprietario, il re del luogo, sperando nella sua clemenza. Ma la fortuna, finalmente, si ricordò di Didone: il re fu affascinato dalla bellezza della nostra eroina. Prima cercò di farsi pagare in natura, poi vista la reazione non proprio amichevole tentò di recuperare e di far colpo con un po' di umorismo fuori luogo. Le promise che le avrebbe regalato tanta terra quanta potesse contenerne con una pelle di toro.
Didone era bella ma non stupida, e non si lasciò sfuggire l'occasione. Chiese un paio di forbici, tagliò in striscioline sottilissime la pelle, le annodò e con il filo ottenuto recintò un bel pezzo di terreno con vista sulle Eolie...
Quindi si sedette (con i suoi sudditi festanti), finalmente in casa propria, soddisfatta del suo operato. (La nostra povera Didone non immaginava che di lì a poco, mentre stava ancora costruendo la sua villetta sul mare con tripli servizi, sarebbe arrivato lo skipper Enea a romperle le uova nel paniere).
Nella fretta di approfittare dell'offerta del re, Didone aveva agito d'istinto e con la strisciolina di pelle aveva recintato un terreno con la forma di un semicerchio. Intanto i suoi sudditi, capita l'idea della regina, si accapigliavano discutendo su come fare per racchiudere la superficie più grande possibile. E non terminò lì: anche dopo, i sudditi continuarono a litigare su quale fosse la forma migliore. E la loro discussione si estese ai popoli vicini, e arrivò in Grecia, e i greci cominciarono a discutere, e poi gli italiani, e i francesi, e i tedeschi...

Un passo dall'Eneide

...mercatique solum, facti de nomine Byrsam,
taurino quantum possent circumdare tergo.
(...comprarono tanta terra quanto una pelle di toro potesse circondarne,
per questo la città ha pure il nome di Birsa.)
(Eneide, L. I, 367-368)

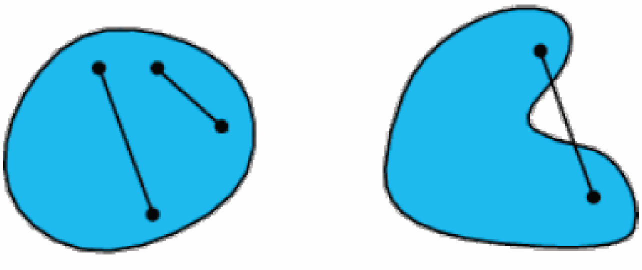
Quella dell'introduzione è una favola romanzata e umoristica, ma la storia di Didone è raccontata da Virgilio nell'Eneide.
La leggenda narra che la regina fenicia Didone in fuga da Tiro approdò sulle coste dell'attuale Tunisia e chiese al re Jarba, proprietario di quelle terre, di vendergli un pezzo di terra su quelle coste per edificare una città. Il re rispose che le avrebbe regalato tutta la terra che lei fosse riuscita a circondare con una pelle di bue. Didone fece tagliare la pelle a strisce sottilissime con le quali formò un filo, quindi circondò la costa con il filo disposto a semicerchio e fondò la città di Cartagine. È chiaro che visto che la terra le veniva regalata doveva prenderne più che poteva. Ella si trovò a risolvere un problema, passato alla storia come Problema di Didone.

- Sappiamo formulare il problema di Didone in termini matematici?

data una retta *r* e una lunghezza *L*>0, tra tutte le curve piane di lunghezza *L* che hanno entrambi gli estremi su *r*, trovare quella che racchiude la massima area.
La retta rappresenta ovviamente la spiaggia di Cartagine.
Accanto al problema di Didone, gia gli antichi Greci si erano posti un altro problema passato alla storia come problema isoperimetrico.
Mettiamo il caso che la leggenda di Didone sia vera in parte e che ella dovesse racchiudere, con la stessa pelle di bue, un terreno non sulla costa ma nell'entroterra.

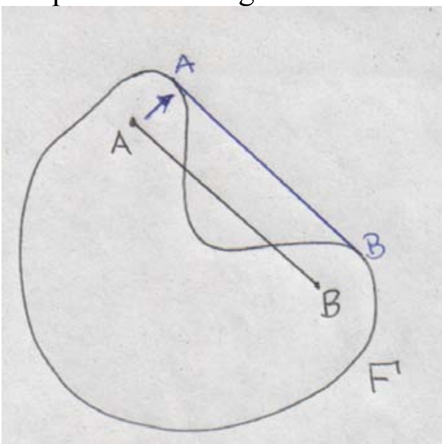
- Come avrebbe disposto il filo?
- Siamo in grado di formulare il problema isoperimetrico in termini matematici?

fissata una lunghezza *L*>0, tra tutte le curve piane di lunghezza *L* trovare quella che racchiude l'area massima.
Naturalmente i Greci avevano intuito quali fossero le figure che risolvevano i due problemi (il semicerchio e il cerchio) e che gli stessi erano in qualche modo collegati, tuttavia non riuscirono a darne una dimostrazione rigorosa.
Vari tentativi furono fatti da Archimede, Pappo, Galileo, Eulero, Hilbert, ma solo tra il 1838 e il 1841 il matematico tedesco Steiner fornì (non senza qualche difficoltà) la soluzione con un approccio esclusivamente geometrico, semplice e intuitivo.
Più tardi agli inizi del 1900 ne venne invece data una dimostrazione ricorrendo a strumenti dell'analisi (calcolo della variazioni).
Nel presente percorso ripercorriamo i ragionamenti di Steiner che tra l'altro mettono in chiara evidenza il legame tra il problema degli isoperimetri e quello di Didone.
Primo passo
Partiamo innanzi tutto dal presupposto che la figura che risolve il problema degli isoperimetri esista.
Cioè assegnata una qualsiasi lunghezza *L*>0 sia sempre possibile trovare una curva che racchiuda l'area massima. Ammettere l'esistenza di tale figura non è poi così scontato.
Infatti una semplice osservazione ci induce a riflettere.
Consideriamo un esagono regolare di perimetro fissato iscritto in un cerchio. Dividendo a metà ciascun lato e congiungendo i punti medi con la circonferenza, otteniamo un poligono regolare di 12 lati che ha lo stesso perimetro ma area maggiore dell'esagono, procedendo allo stesso modo si ottengono poligoni di 24, 48, 96, …, 6*n* lati tutti isoperimetrici ma con aree via via maggiori.
Siccome il processo non ha mai fine, tale figura non esiste!
Tuttavia le aree di questi poligoni sono tutte minori di quella del cerchio in cui sono iscritti, quindi un limite superiore esiste.
Del resto l'intuizione ci fa pensare che fissato il perimetro l'area di una qualsiasi figura non può aumentare più di tanto, ma tra intuire e dimostrare c'è un abisso.
Secondo passo
Ammessa l'esistenza della soluzione ci chiediamo: come dovrà essere fatta questa figura?
Occorre arrivare a capire che la figura non può avere "insenature", cioè deve essere convessa.
Convessa significa che presi due qualsiasi punti della figura il segmento che li unisce deve essere contenuto all'interno della figura stessa.

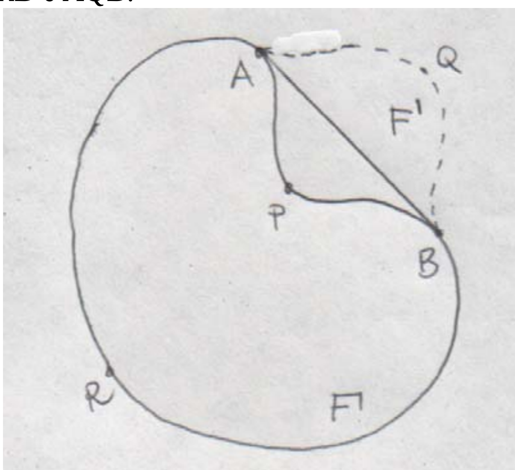


Cerchiamo di dimostrarlo.

Supponiamo per assurdo che la figura *F*, soluzione del problema, non sia convessa. Allora avrà almeno una rientranza, cioè esiste un segmento *AB* che cade un po' fuori e un po' dentro *F*. Con una traslazione si può sempre fare in modo che gli estremi del segmento cadano sul bordo della figura e quindi che il segmento sia tutto fuori dalla figura.



Ribaltiamo simmetricamente l'arco *APB* di *F* rispetto ad *AB*. Si ottiene l'arco *AQB* che ha la stessa lunghezza di *APB*. Consideriamo a questo punto la figura *F'* delimitata dall'unione degli archi *ARB* e *AQB*.



La lunghezza del contorno di *F'* è uguale a quella di *F*, ma *F'* racchiude un'area maggiore. Questo è assurdo perché *F* racchiude l'area massima.

<u>Terzo passo</u>

Esiste un legame tra le soluzioni dei due problemi? L'intuizione, non dimostrata, dai Greci che la soluzione al problema isoperimetrico fosse un cerchio e quella del problema di Didone un semicerchio fa pensare che le due figure siano una il doppio dell'altra.

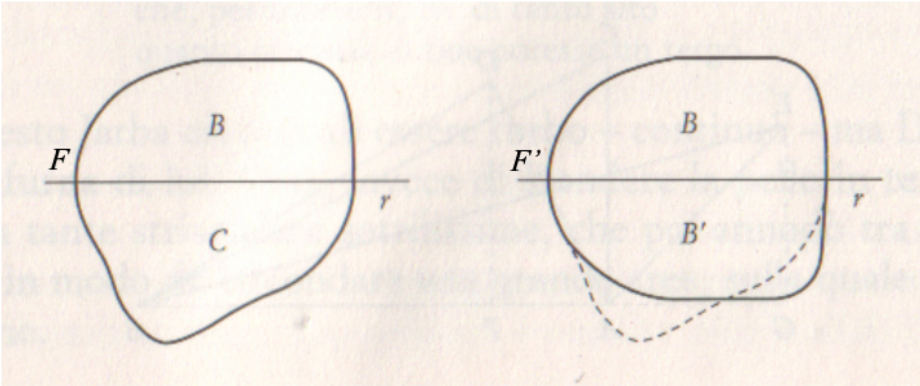
Proviamo a dimostrare che **la figura che risolve il problema isoperimetrico è il doppio della figura che risolve il problema di Didone.**

Sia *F* la figura che risolve il problema isoperimetrico. Si consideri una retta *r* che divide in due parti uguali il contorno di *F*; allora la retta divide in due parti uguali anche l'area racchiusa da *F*.

Indichiamo con *B* e *C* sia le due parti in questione sia la misura della loro area.

Supponiamo per assurdo che *B*>*C*.

Sia *B'* la figura simmetrica di *B* rispetto a *r*.



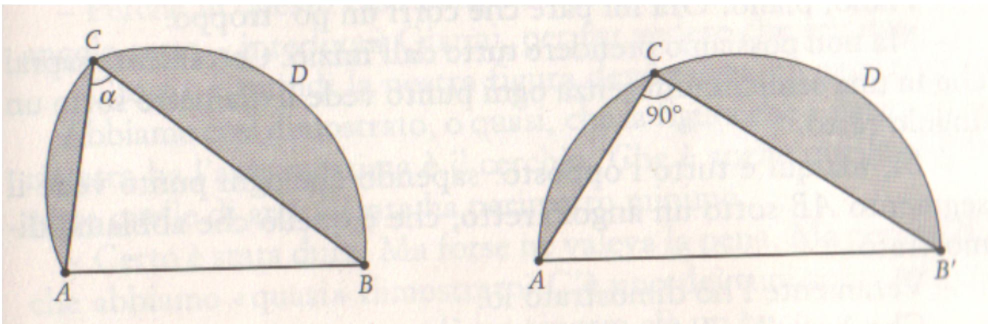
È chiaro che *B*, *B'*, e *C* hanno il contorno di ugual misura. Se adesso consideriamo la figura *F'* costituita dalle parti *B* e *B'*, essa ha stesso perimetro di *F* ma area maggiore e ciò è assurdo.

Si arriva all'assurdo supponendo anche $B<C$, quindi in definitiva $B=C$.

Questo implica che la metà di *F* è la figura di area massima racchiusa da una curva di lunghezza *L/2* che ha i due estremi su una retta, cioè la metà di *F* risolve il problema di Didone.

Quarto passo

L'ultimo dei ragionamenti di Steiner risolve i due problemi: **la figura che risolve il problema di Didone è un semicerchio.**



Sia *D* la figura che risolve il problema di Didone. Prendiamo sul bordo di *D* un punto *C* e consideriamo il triangolo *ABC*.

Dimostriamo che è rettangolo in *C*.

Se per assurdo l'angolo *C* non fosse retto, potremo "muovere" le due regioni di *D* delimitate dai lati *AC* e *BC* e dai rispettivi archi di *D* fino a che non lo diventi. In tale manovra (la "manovra di Steiner" appunto) non si alterano ne le lunghezze dei lati *AC* e *BC*, ne l'area delle regioni suddette.

Cosa succede però all'area del triangolo? Aumenta o diminuisce?

Ci troviamo di fronte al problema: come varia l'area di un triangolo avente due lati assegnati.

La conclusione è presto trovata: consideriamo un triangolo qualsiasi e indichiamo per comodità *a* e *b* sia i lati che le loro misure. Prendiamo il lato *b* come base.

L'area del triangolo è $\frac{1}{2} b \cdot h$ e sarà massima quando è massima l'altezza, ovvero quando $h=a$, cioè per un triangolo rettangolo di cateti *a* e *b*.

Concludendo: il triangolo rettangolo ha area massima fra quelli aventi due lati assegnati. Nella manovra di Steiner l'area del triangolo è quindi aumentata facendo così aumentare l'area di *D*. Assurdo perché *D* è la figura di area massima.

Quindi *ABC* è rettangolo in *C*, l'arco *AB* della figura è una semicirconferenza, *D* è un semicerchio e la figura che risolve il problema degli isoperimetri è un cerchio.

Qui termina il percorso di Steiner. In realtà ammettendo l'esistenza della soluzione al problema degli isoperimetri egli nel suo percorso non fa altro che dimostrare il teorema: "se la soluzione al problema isoperimetrico esiste questa è un cerchio".
E abbiamo visto quanto questa supposizione sia essenziale nelle dimostrazioni.
Non dimostrandone l'esistenza, Steiner fu a lungo criticato dalla comunità matematica del tempo.
Concludendo è doveroso dire che Steiner non si arrese di fronte alle critiche, più tardi espose una nuova dimostrazione cui nessuno trovò niente da obiettare.

Concludiamo con un ultimo risultato interessante e importante.
Cerchiamo di invertire il problema isoperimetrico.
Assegniamo la misura dell'area. Fra tutte le figure che hanno quell'area, quale è quella di perimetro minimo?
Se volessimo dare un nome a questo problema potremmo chiamarlo "problema dell'equiestensione".
A intuito quale sarà questa figura?
È prevedibile che la risposta sia il cerchio.
Siamo in grado di dimostrarlo?
La risposta è nel:
Teorema della proprietà duale: la figura che risolve il problema isoperimetrico risolve anche il problema dell'equiestensione e viceversa.
Dimostrazione.
Sia *F* la soluzione del problema isoperimetrico. Per assurdo supponiamo che esiste una figura *D* equiestesa a *F* ma con perimetro minore. Aumento *D* fino ad ottenere una nuova figura *E* con lo stesso perimetro di *D*. aumentando il perimetro è aumentata anche l'area, quindi l'area di *E* supera quella di *F* e ciò è assurdo.
Viceversa sia *F* la figura che ha perimetro minore fra quelle ad essa equiestese. Sempre per assurdo supponiamo esista una figura *D* isoperimetrica a *F* ma con area maggiore. Restringo *D* fino ad ottenere *E* che abbia la stessa area di *D*. Restringendo, anche il perimetro è diminuito, cioè il perimetro di *E* risulta più piccolo di quello di *D* e quindi di *F*. Di nuovo ciò è impossibile.

La figura che risolve il problema isoperimetrico per una classe di figure risolve anche il problema duale, (cioè ha perimetro minimo fra quelle della stessa classe di area fissata).

PROPOSTE PER L'ATTIVITÁ DI VERIFICA

1. Nel problema di Didone abbiamo rappresentato la spiaggia con una linea retta; ma che succede se invece si prova a risolvere il problema contro un bordo diverso da una retta? Quale pensi che sia la soluzione?
2. Sapresti enunciare l'equivalente del problema isoperimetrico per lo spazio e ipotizzane la soluzione?
3. Si vogliono costruire delle scatole di carta tutte dello stesso volume minimizzando il consumo di carta.
   a) Quale è la forma migliore?
   b) Quale sarà la forma migliore se si decide di farle cilindriche?

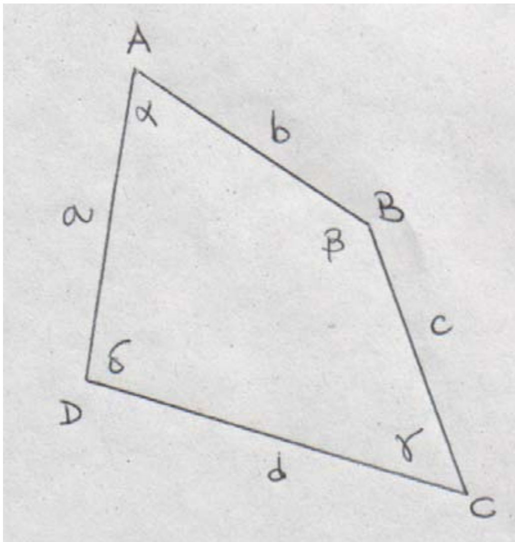
c) E se vengono costruite a forma di prisma a base quadrata?
d) Che relazione esiste fra le figure trovate ai due punti precedenti e la sfera?

LE DISUGUAGLIANZE ISOPERIMETRICHE NEL PIANO

Il presente argomento trova la sua collocazione in una V Liceo. Si tratta di alcuni risultati che arrivano a risolvere con l'uso di disuguaglianze (nel caso più semplice ottenibili con facili ragionamenti, nei casi più complessi ricorrendo a strumenti di analisi superiore), il problema degli isoperimetri.

Partiamo con una semplicissima domanda.
Nell'insieme di tutti i quadrilateri del piano con lo stesso perimetro, esiste quello di area massima?
L'intuizione ci fa pensare che in generale se fissiamo il perimetro l'area di una qualsiasi figura non può aumentare più di tanto.
Proviamo comunque a ragionare sul problema posto.

Sia *ABCD* un qualunque quadrilatero.



Calcoliamo l'area. Per il teorema dei seni,

$$S = \frac{1}{2} absen\alpha + \frac{1}{2} cdsen\gamma \text{ e}$$

$$S = \frac{1}{2} bcsen\beta + \frac{1}{2} adsen\delta .$$

Sommando si ottiene

$$2S = \frac{1}{2}\left(absen\alpha + cdsen\gamma + bcsen\beta + adsen\delta\right),$$

ossia

$$S = \frac{1}{4}\left(absen\alpha + cdsen\gamma + bcsen\beta + adsen\delta\right).$$

Senza alterare il valore del perimetro, cerchiamo di ottenere mediante maggiorazioni delle quantità più grandi dell'area.

Le uniche proprietà cui ricorreremo sono: $|senx| \le 1$ e $2|x||y| \le x^2 + y^2$.

Maggiorando i seni degli angoli si ottiene:

$$S \le \frac{1}{4}(ab + cd + bc + ad) = \frac{1}{4}(a+c)(b+d) = \frac{1}{8}(a+c)(b+d) + \frac{1}{8}(a+c)(b+d) \le$$

$$\le \frac{1}{16}\left[(a+c)^2 + (b+d)^2\right] + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2(a+c)(b+d) = \frac{1}{16}\left[(a+c)^2 + 2(a+c)(b+d) + (b+d)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{16}(a+b+c+d)^2 = \frac{1}{16}p^2 .$$

Concludendo $S \le \frac{1}{16}p^2$.

La disuguaglianza trovata rappresenta la disuguaglianza isoperimetrica per i quadrilateri, il senso è importante: dato un qualsiasi quadrilatero di perimetro assegnato *p*, la sua area non può superare il valore massimo $\frac{1}{16}p^2$.

Il valore massimo dell'area sarà assunto dal quadrilatero per cui $S = \frac{1}{16}p^2$.

Ricordiamo che $S = \frac{1}{4}\left(absen\alpha + cdsen\gamma + bcsen\beta + adsen\delta\right)$, se $a = b = c = d$ e

$\alpha = \beta = \gamma = \delta = \frac{\pi}{2}$, si ha proprio $S = \frac{1}{16}p^2$, cioè il quadrilatero cercato è il quadrato.

Tra tutti i quadrilateri isoperimetrici il quadrato ha area massima.

Con questo teorema abbiamo capito quale sia la strada per arrivare alla soluzione di un problema più generale, il problema isoperimetrico: **fissata una lunghezza *L*>0, tra tutte le curve piane di lunghezza *L* trovare quella che racchiude l'area massima.**
Si considera una classe di figure piane e si cerca di ottenere una disuguaglianza che leghi area e perimetro dalla quale dedurre che fissato il perimetro l'area non può aumentare più di tanto (è superiormente limitata). Ciò è sufficiente a dimostrare l'esistenza della figura di area massima all'interno della classe in questione. Infine il segno di uguale vale soltanto per la figura cercata. Con questo metodo non solo si dimostra l'esistenza ma anche quale sia la figura.

Dopo i quadrilateri consideriamo l'insieme di tutti i poligoni di *n* lati isoperimetrici. Se per i quadrilateri la soluzione è il quadrato per i poligoni sarà un poligono regolare di *n* lati, infatti si arriva a dimostrare che: **tra tutti i poligoni di n lati isoperimetrici quello di area massima è il poligono regolare**.
Dopo i poligoni dobbiamo considerare le figure a contorno curvilineo.
Il risultato cui si arriva è la disuguaglianza isoperimetrica nel piano: **sia *L*>0 una lunghezza assegnata. Consideriamo una qualsiasi curva di lunghezza *L* e sia *S* l'area racchiusa. Allora vale la disuguaglianza $S \leq \frac{L^2}{4\pi}$.**
La disuguaglianza isoperimetrica nel piano assicura l'esistenza della figura di area massima.
Il segno di uguaglianza dà la figura, ma questa è proprio il cerchio per il quale $S = \frac{C^2}{4\pi}$ (*C* ovviamente è la misura della circonferenza).

PROPOSTE PER L'ATTIVITÁ DI VERIFICA

1. Alla luce del risultato relativo ai poligoni regolari di *n* lati che hanno la proprietà di avere area massima fra quelli ad essi isoperimetrici, sapresti ricavare la disuguaglianza isoperimetrica per la classe dei poligoni di *n* lati?

APPROFONDIMENTI

1. LA CINTA MURARIA DELLE CITTÁ FORTIFICATE

Il presente approfondimento propone di mostrare come il problema di Didone e quello isoperimetrico trovino riscontro nella realtà e siano stati utilizzati per risolvere problemi pratici.
Nell'antichità., come nel Medioevo, spesso le città erano circondate da una cinta muraria per la difesa.
Una volta stabilita l'area sulla quale edificare le case degli abitanti e le altre strutture necessarie per rendere la città autosufficiente in caso d'assedio, o nel caso di necessità improvvisa, sorgeva il problema di costruire le mura difensive per una agevole difesa.
Quali erano i criteri con cui costruire e mura?

- Mura resistenti
- Mura percorribili e accessibili con facilità
- Mura non troppo lunghe in modo che i soldati non si sparpagliassero troppo, che potessero essere costruite in poco tempo con dispendio minimo di denaro e risorse umane, che potessero essere difese anche da un congruo numero di soldati.

Alla luce di queste considerazioni, quale è la forma migliore per la cinta muraria di una città sita nell'entroterra o lungo un fiume?
Un cerchio o un semicerchio se ci ricordiamo il problema di Didone e quello isoperimetrico e i loro duali.
Come conferma andiamo a vedere alcune piantine di città.

	Pianta della città di Pavia durante la battaglia del 1524
	Pianta della città di Colonia durante il Medioevo

	Pianta di Milano

2. LE BOLLE DI SAPONE: IL PROBLEMA ISOPERIMETRICO NELLO SPAZIO

Questo approfondimento si propone, partendo da una domanda riguardante la forma delle bolle di sapone, di arrivare alla formulazione del problema isoperimetrico nello spazio.

Perché le bolle di sapone sono sferiche?

Riportiamo il dialogo fra i due amici, Gianni il letterato e Pinotto il matematico, così come si trova nel libro di Enrico Giusti "la matematica in cucina" pagg. 186-187:

Quando si soffia si esercita una pressione che fa gonfiare la bolla, e siccome la pressione spinge allo stesso modo da tutte le parti, la bolla assume una forma sferica, sempre per la simmetria del problema, o se vuoi per il principio di ragion sufficiente.

– Un momento – interruppe Gianni – qui però mi pare che il mai abbastanza lodato principio di ragion sufficiente cada in difetto. Non è vero che tutte le direzioni siano equivalenti, perché c'è il peso che tira in basso.

– Giusto, e infatti se si guarda molto attentamente, le bolle di sapone non sono perfettamente sferiche, perché la forza di gravità – il peso, come dici tu – le deforma tirandole verso il basso. D'altra parte la pellicola che costituisce le bolle di sapone è così sottile, praticamente è spessa quanto una molecola, e il suo peso è così piccolo, che in prima approssimazione possiamo trascurarlo. Dunque, trascurando la gravità, le bolle di sapone sono perfettamente sferiche.

– E qui di nuovo non sono d'accordo. Quando si staccano dalla cannuccia, specialmente quelle grosse, non prendono affatto una forma sferica, ma anzi cambiano continuamente forma come se cercassero quella migliore. Solo dopo qualche tempo, più breve per quelle piccole, più lungo per le grandi, diventano delle vere sfere. E qui il nostro principio di ragion sufficiente, o meglio il tuo principio di simmetria, va a farsi benedire, perché non c'è affatto una simmetria di configurazione.

– Anche questo è giusto, e in effetti all'inizio la forma varia.

– Già, ma perché diventano sferiche?

– Qui entra in gioco un'altra proprietà delle bolle di sapone, di cui se ti ricordi avevamo già parlato. Ma siccome vedo dalla tua faccia che ti sei già bello e scordato tutto, riprendiamo le cose dall'inizio. Inzuppiamo la cannuccia nell'acqua saponata e cominciamo a gonfiare. Anzi, fallo tu, che se no non posso parlare.

Per una volta obbediente, Gianni prese una cannuccia e cominciò a soffiare una bolla di sapone.

– Piano – consigliò Pinotto – come vedi, man mano che l'aria viene soffiata dentro la bolla, questa si gonfia, sempre restando di forma quasi sferica. A un certo punto, dopo aver soffiato una certa quantità di aria, si stacca e vola via. E qui comincia la matematica. L'aria soffiata fa sì che la bolla abbia un certo volume, ma quale sarà la sua forma? Questa dipende dal fatto che la bolla di sapone, o meglio la pellicola liquida che la contiene, preme verso l'interno, cercando di disporsi nella maniera più compatta possibile, cioè di rendere minima la sua superficie. Di conseguenza, la forma della bolla di sapone sarà quella che a parità di volume rende minima la sua superficie. Questo problema è puramente matematico, e può essere formulato senza riferimento a bolle di sapone o altro:

quale è il finale del discorso di Pinotto?

fra tutti i corpi di volume dato, qual è quello di superficie minima?

o in modo equivalente, ricordando il teorema della proprietà duale: "**fra tutti i corpi di superficie data, quale è quello di volume massimo?**"
Questo è il problema isoperimetrico nello spazio, la cui soluzione è naturalmente la sfera.
Infatti Gianni dice e Pinotto conclude:

– Ma questo lo abbiamo già visto nello scaldabagno; si tratta della sfera.

– Lo abbiamo detto, ma non abbiamo nemmeno tentato di dimostrarlo, perché non è per niente facile.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] Enrico Giusti, *La matematica in cucina*, Bollati Boringhieri 2004
[2] Courant R., Robbins H., *Che cos'è la matematica?*, Bollati Boringhieri 1971
[3] Piero D'Ancona & Eugenio Montefusco **Il dubbio di Didone**
Dipartimento di Matematica G. Castelnuovo Università degli Studi di Roma La Sapienza
http://www.mat.uniroma1.it/people/dancona
http://www.mat.uniroma1.it/people/montefusco
[4] Walter Maraschini Mauro Palma, *ForMat, SPE Liceo*, la formazione matematica per il triennio, Paravia