

L'esperimento di Briatore e Leschiutta

Nel 1975 due orologi atomici furono posti uno a Torino e l'altro sul

Plateau Rosa, sul gruppo del Cervino, a quota 3250 m rispetto a Torino.

L'orologio 1 (Torino) emetteva un segnale di sincronismo iniziale (evento A_1)

che viaggiava alla velocità della luce e che, giunto a z_2 , faceva partire l'orologio 2 (evento A_2).

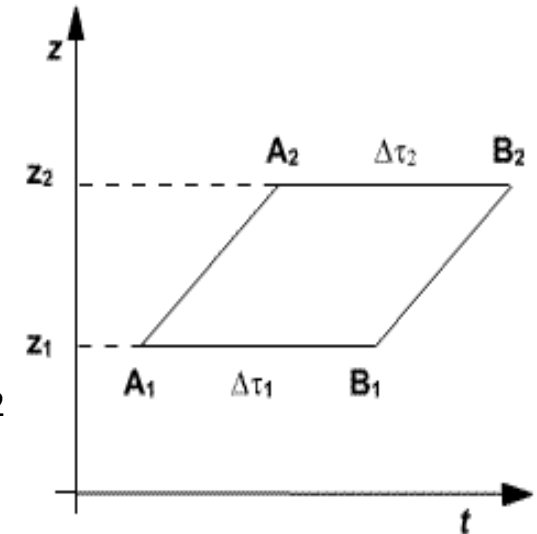
Dopo 68 giorni, l'orologio 1 mandava il segnale di fine esperimento (evento B_1) che giungeva all'altro orologio e terminava la misura (evento B_2).

Risultò che $\Delta\tau_2 - \Delta\tau_1 = 2,4 \text{ ms}$, MA DAL DIAGRAMMA ORARIO RISULTA $\Delta\tau_1 = \Delta\tau_2$

L'accelerazione di gravità, di diverso valore, **non** modifica il funzionamento degli orologi atomici, perché questi sono insensibili fino ad accelerazioni ben maggiori.

L'orologio 2, riportato a Torino, marciava in perfetto accordo con l'altro: è improbabile che eventuali danni, dovuti al trasporto nel viaggio di andata, si fossero esattamente compensati nel viaggio di ritorno.

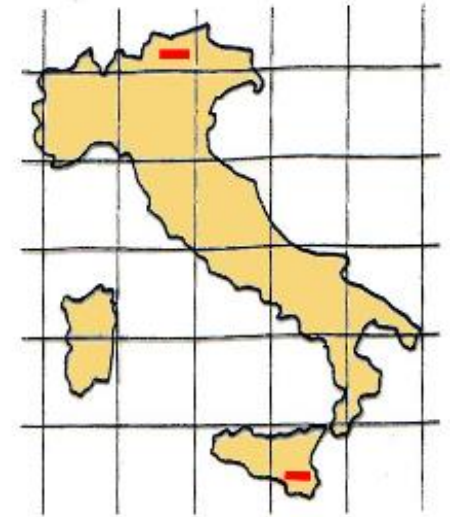
ALLORA, **IL DIAGRAMMA "NON" È UNA RAPPRESENTAZIONE FEDELE DELLO SPAZIO-TEMPO!**



Dato che la Terra non è piatta, ...

Una mappa, una carta geografica è “fedele” se il rapporto tra una distanza misurata sulla carta e quella corrispondente nella realtà è costante (la scala della carta).

Le carte che rappresentano la Terra non “possono” mai essere fedeli, perché la Terra è (circa) una sfera, che **non è sviluppabile su un piano**.



I meridiani **non** sono segmenti paralleli tra loro: convergono ai poli!

È possibile calcolare la **lunghezza di 1° di parallelo a Bolzano e a Siracusa**, ottenendo rispettivamente, 76,9 km e 90,4 km, ben diversi!

Però, **sulla carta vengono rappresentati uguali**, perché i meridiani vengono rappresentati equidistanti tra loro.

... il suo campo gravitazionale non è uniforme!

L'ascensore di Einstein (vagone ferroviario) è un RI solo "localmente",

"vicino" al baricentro O.

"Lontano" da O, dato che il campo gravitazionale terrestre non è uniforme,

(ma radiale, entrante e va con la legge dell'inverso del quadrato della

distanza), la forza apparente non cancella la forza di gravità.

Resta un effetto residuo, di "MAREA".

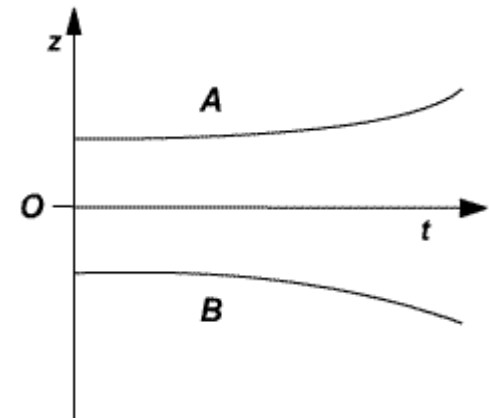
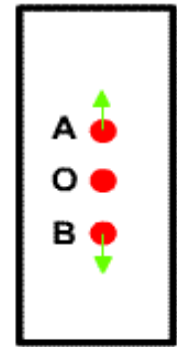
Non vale il PI: le palline, **lasciate libere da ferme**, si spostano

"da sole": le loro curve orarie partono parallele e poi divergono.

I loro diagrammi orari non sono rette parallele.

Dunque, quelle che abbiamo tracciato finora non sono

rappresentazioni "fedeli" dello spazio-tempo, perché QUESTO è CURVO!



Limiti del PR – effetto marea

In un RI in caduta libera, la gravità si può far

sparire, ma solo localmente.

Dato che, vicino alla Terra, \vec{g} non è perfettamente

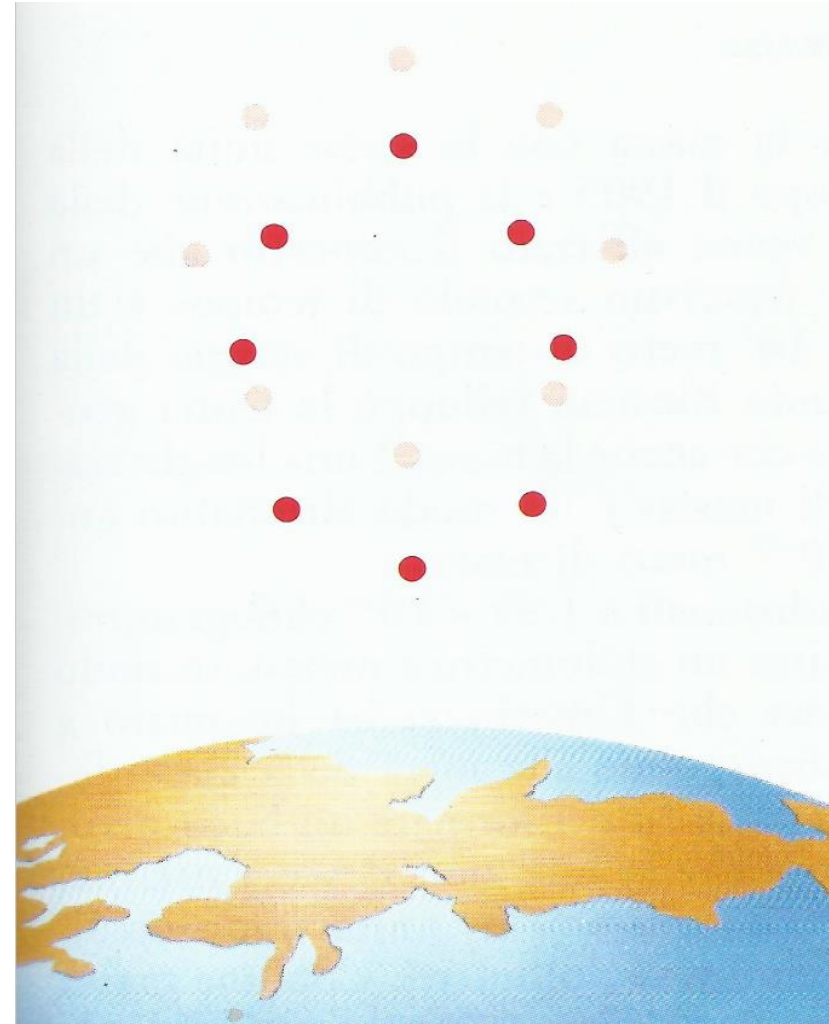
uniforme, vi sono sempre gli effetti di marea.

Non si può avere una mappa fedele dello spazio-tempo,

Se non localmente, per piccoli spazi e piccoli intervalli di

tempo, dato che lo spazio-tempo è curvo, per la

presenza della massa della Terra.



Che cos'è una geodetica?

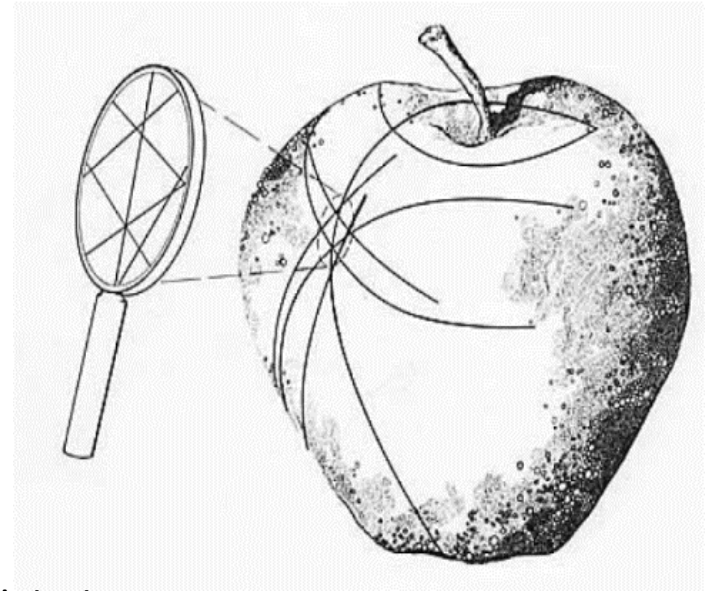
Prendiamo una mela, sulla cui superficie una penna (o una formica, o un coltello) traccia una linea. Tale linea è certamente curva, ma è anche una linea “dritta”?

La mela, ma anche qualsiasi superficie geometrica curva, in qualunque numero di dimensioni, ci mostra un mondo nel quale ogni linea è curva, ma dove alcune sono ‘meno curve’ di altre.

Una formica cammina scrupolosamente in linea retta quanto può, senza deviare né verso destra né verso sinistra. Tale linea è una **geodetica**.

In genere, la geodetica non è una curva piana. Solo per la sfera è sempre vero, perché le geodetiche sono i cerchi massimi.

Per il cilindro sono eliche o circonferenze, nel caso del cono sono eliche (le circonferenze no!), oltre che, per entrambi, le generatrici.



Curvatura gaussiana di una superficie

Preso un punto P , sia n la normale S in P , e il fascio di piani per n . Ciascun piano taglia la superficie secondo una certa curva, in un dato intorno di P . Questa curva avrà in P una certa curvatura $c = 1/R$. La curvatura varia da una curva all'altra.

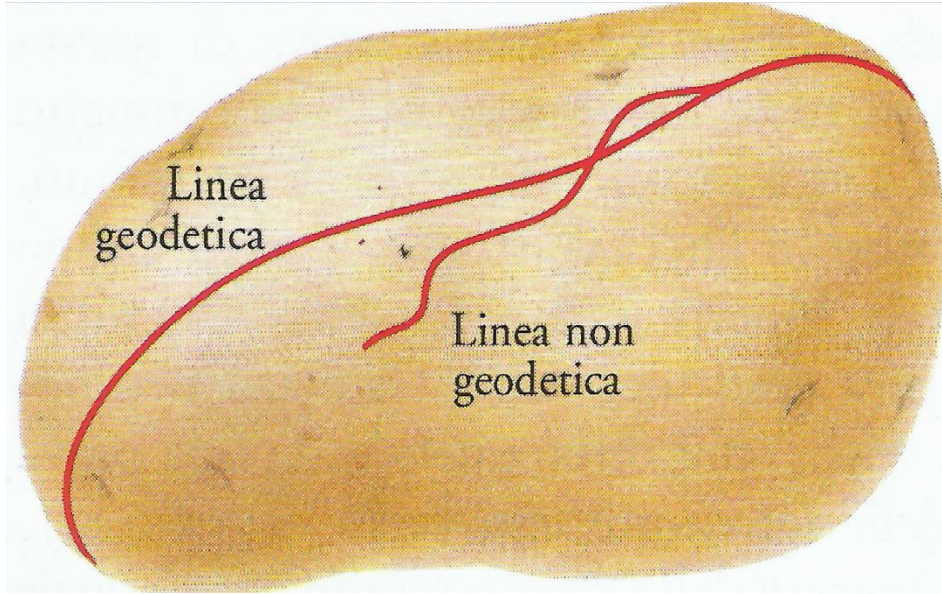
Le curvatures principali in P (cioè il max e il min di $1/R$) corrispondono alle curvatures di due sezioni tra loro ortogonali. Ad es. nel caso di un cilindro circolare retto il min è 0 (lungo una generatrice) ed il max è il reciproco del raggio di base (lungo la circonferenza normale alla generatrice). Nel caso di una sfera, le curvatures delle sezioni sono tutte uguali, dato che le geodetiche sono i cerchi massimi.

Gauss dimostrò (è il suo “theorema egregium”) che il PRODOTTO DELLE CURVATURE MAX E MIN È INVARIANTE, ed ha quindi SIGNIFICATO INTRINSECO: CURVATURA GAUSSIANA.

Un piano, un cilindro e un cono hanno C.G. ovunque nulla. Una sfera di raggio r ha ovunque C.G. positiva e pari a $\frac{1}{r^2}$. Un punto di sella di un iperboloide a una falda ha curvatura negativa.

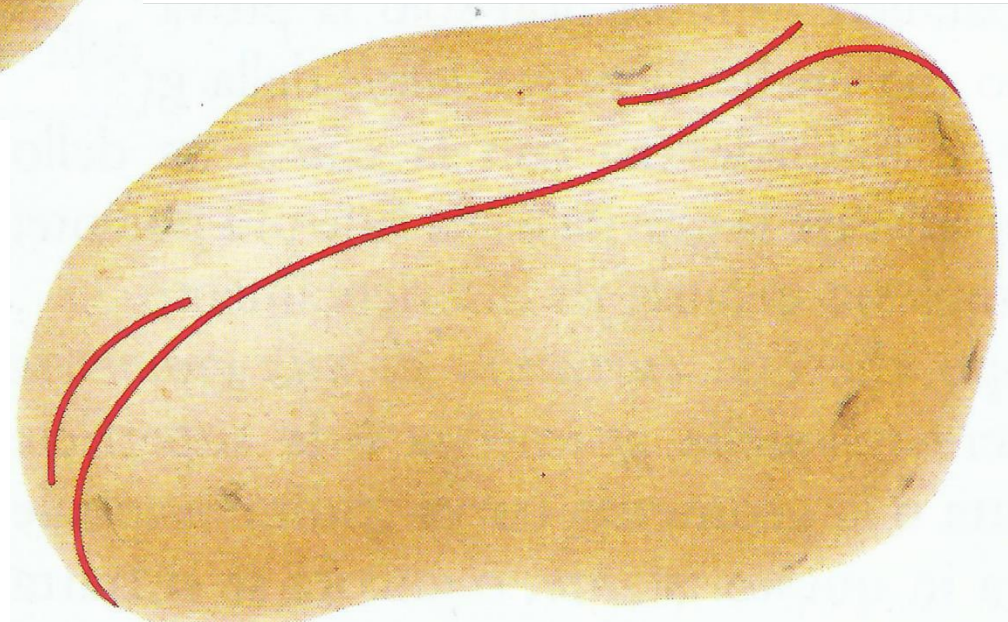
La somma degli angoli interni di un triangolo su una superficie a curvatura negativa è minore di π , su una superficie a curvatura nulla è π , su una superficie a curvatura positiva è maggiore di π .

Geodetiche e curvatura in una patata



Sulla superficie curva di una patata, sia una linea geodetica che una linea non geodetica sono curve, ma soltanto la geodetica è anche diritta, nel senso che per tutta la sua lunghezza non devia né verso sinistra né verso destra.

Sulla superficie di una patata in cui due geodetiche si incurvano una verso l'altra, la curvatura è positiva; nelle zone in cui si allontanano, la curvatura è negativa. Se la curvatura è nulla, le geodetiche sono parallele.



Il principio della geodetica

La geodetica ha lunghezza geometrica minima, tra tutte quelle che collegano i suoi estremi (non troppo lontani tra loro). Nello spazio-tempo, questo equivale a dire “lunghezza” (tempo proprio) massima, corrispondente alla caduta libera.

PRINCIPIO DELLA GEODETICA (PG): LA ROTTA DI UN CORPO IN CADUTA LIBERA E' UNA GEODETICA DELLO SPAZIO-TEMPO.

Ascensore (vagone) in caduta libera: le palline A e B, lasciate libere, non restano ferme e neppure si muovono di MRU, cioè i loro diagrammi orari non sono rette parallele.

Questo si spiega con le **forze di marea**, ma si può anche dire che **non è possibile disegnare due grafici di moti naturali che siano due geodetiche parallele, perché lo spazio-tempo è curvo. La curvatura è positiva quando due rotte (di caduta libera), che partono vicine e parallele, si incurvano avvicinandosi, è negativa in caso contrario ed è nulla se restano parallele.**

$$\frac{1}{R_c} = \frac{8}{3} \pi \frac{G}{c^2} \rho$$

La curvatura dello spazio-tempo in prossimità della superficie della Terra è negativa, perché la distanza tra le geodetiche aumenta. Il raggio di curvatura vale $R_c \approx 1,7 \cdot 10^{11}$ m e dipende solo dalla densità media ρ della Terra stessa. Questa è una versione semplificata ma del tutto corretta delle equazioni della RG di Einstein.

La materia dice allo spazio-tempo come curvarsi, lo spazio-tempo dice alla materia come muoversi (J. A. Wheeler)

Secondo Einstein, le linee orarie dei corpi in moto naturale (di caduta libera) sono geodetiche dello spazio-tempo (PG), perciò, dato che le geodetiche non sono rette parallele, questo implica che lo spazio-tempo è curvo. È la presenza delle masse a causare la curvatura dello spazio-tempo (equazioni di Einstein).

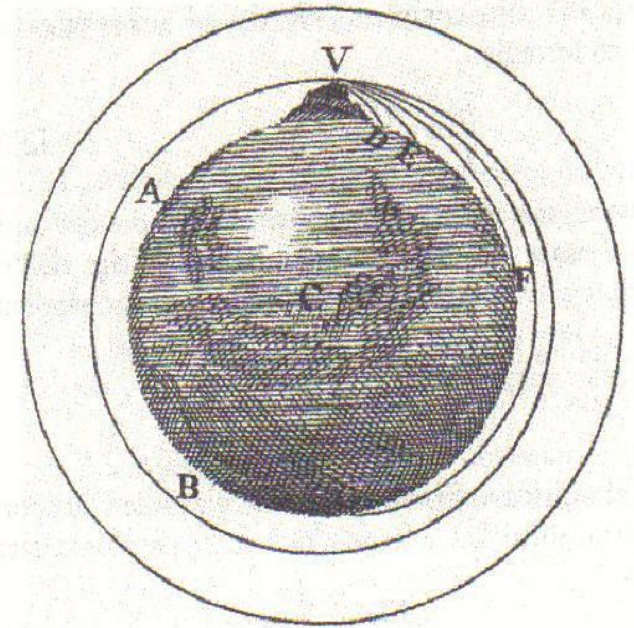
La gravità non esiste: è un effetto apparente, visibile per un corpo che venga forzato a deviare dal suo moto “naturale” (caduta libera), ma non è una forza reale! Lo “stato naturale” è la caduta libera, o volo libero o libera fluttuazione, che è uguale per tutte le masse in quanto è determinata dalla geometria dello spazio-tempo.

Bisogna abituarsi a rovesciare il consueto punto di vista: quando appoggio una matita sul tavolo, questa è deviata dal suo moto naturale, che è quello di caduta libera. Per deviarla dal suo moto naturale il tavolo deve applicare una forza. Newton diceva che questa forza era dovuta ad un'altra che la contrasta, cioè la *gravità*.

Einstein dice che *non c'è nessun'altra forza*: il fatto è semplicemente che il tavolo frena la matita dal suo moto naturale, la caduta libera. Esattamente come occorre applicare una forza per far muovere una cosa lungo una circonferenza, altrimenti tenderebbe ad andare dritta, così qui si deve applicare una forza per impedire alla matita di seguire il suo moto di caduta libera, cioè la geodetica dello spazio-tempo.

Proiettile e satellite

Nella meccanica newtoniana, corpi diversi, che si muovono con differenti velocità, vengono tutti deflessi dalla linea retta ideale con la stessa accelerazione: non esiste differenza tra la caduta di un proiettile e il moto di un satellite. Newton ha un RIF globale, ma, all'interno di esso, nessun proiettile o satellite è mai libero dalla gravità.



Einstein, al contrario, fa uso di molte regioni locali, in ognuna delle quali la geometria è lorentziana e lo spazio-tempo è piatto come in RR.

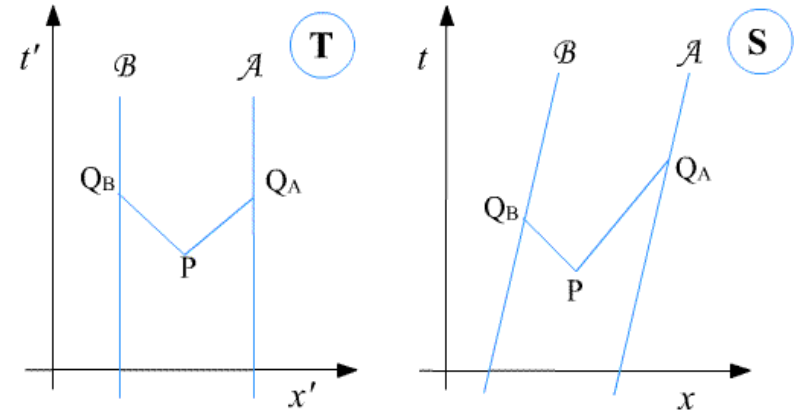
Invece di avere un unico sistema di riferimento globale con forze gravitazionali, abbiamo molti sistemi di riferimento locali senza forze gravitazionali, cioè localmente inerziali.

Superfici curve e tessere piane



La simultaneità è relativa

Un treno percorre un binario rettilineo a velocità costante. A metà del treno si trova una sorgente luminosa, che, ad un certo istante, invia un impulso in entrambe le direzioni: verso la testa \mathcal{A} e verso la coda \mathcal{B} del treno.



Nei diagrammi orari nel **RI solidale al treno (T)**, le due verticali sono le linee orarie di \mathcal{A} e di \mathcal{B} e le rette a 45° sono quelle dei segnali luminosi (come al solito, si possono scegliere le unità in modo che la velocità della luce sia unitaria), e **nel RI della stazione (S)**.

Gli eventi rilevanti sono: P = partenza dei segnali Q_A = arrivo del segnale in \mathcal{A}
 Q_B = arrivo del segnale in \mathcal{B}

Nel RI “T” gli eventi Q_A e Q_B sono simultanei, dato che P è equidistante dalle due rette verticali.

Nel RI “S” il treno viaggia verso destra con velocità costante $< c$, perciò le linee orarie della testa e della coda sono rette inclinate ($\alpha > 45^\circ$), tra loro parallele.

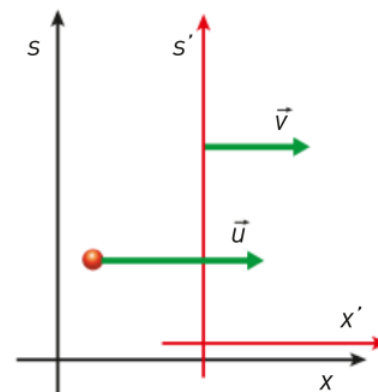
L’evento P ha ancora luogo a metà strada tra \mathcal{A} e \mathcal{B} , la luce viaggia alla stessa velocità, e perciò Q_A e Q_B non sono simultanei.

Trasformazione relativistica delle velocità

Se un riferimento inerziale S' si muove con velocità v rispetto ad un riferimento inerziale S e un oggetto ha velocità u' rispetto a S' , allora la velocità u dell'oggetto rispetto a S è:

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$

che si riduce a $u = u' + v$ per $c \rightarrow \infty$



Dinamica relativistica

- Il PI vale in tutti i RI
- Dato che la simultaneità è relativa, il principio di azione e reazione non vale
- Dato che esiste una velocità limite, le velocità si trasformano in modo diverso da quello galileiano
- La legge dell'angolo retto non vale, perciò, anche in conseguenza del punto precedente,
- se vogliamo che valgano ancora le conservazioni di \vec{p} e di K , dobbiamo definirle diversamente.

La quantità di moto e l'energia cinetica relativistiche

La quantità di moto relativistica si conserva e vale

$$\vec{p} = m\vec{v}\gamma = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

L'energia cinetica relativistica vale

$$K = mc^2 (\gamma - 1)$$

L'inerzia dell'energia

L'energia relativistica si conserva e vale

$$E = mc^2 \gamma \quad \text{dove} \quad \gamma = 1 \text{ se } v = 0$$

Vale inoltre la seguente relazione (invariante)

$$E^2 - c^2 p^2 = m^2 c^4$$

(7. Astrofisica e Cosmologia)

- La scala delle distanze: la parallasse
- La distanza ricavata dalla luminosità
- La massa delle galassie e la densità di materia
- La legge di Hubble
- Il principio cosmologico (PC)
- Il modello di Universo a curvatura costante
- Il redshift cosmologico
- La legge di Hubble come approssimazione
- La dinamica cosmologica
- Evoluzione della densità di materia
- L'orizzonte
- Universo aperto o chiuso? Il futuro

Postfazione

“Tutto ciò che spero ora di poter spiegare, su questi miracoli della natura, deriva dagli scritti di autori profondi, dalle discussioni con i colleghi dentro e fuori l’università, dagli insegnamenti ricevuti in tanti anni dai miei studenti, dai loro dubbi o dai loro sorrisi, dalle loro ricerche, dalle loro insofferenze o entusiasmi: giovani, studenti di lettere o di fisica, di economia o di chimica, di arte o di scienze politiche, di legge o di architettura. È per me una gioia pensare a tutti loro mentre mi accingo a questa impresa, pensare a ciò che mi hanno insegnato e a ciò che vorrebbero che io dicessi” (J. A. Wheeler, *Gravità e spazio-tempo*)