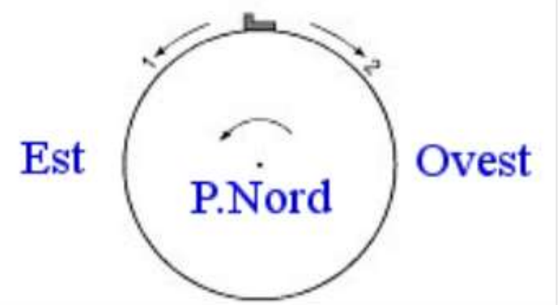
L'esperimento di Hafele e Keating



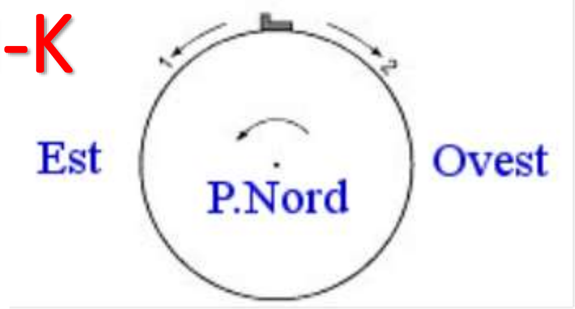
Nel 1971 due orologi atomici vennero montati su due aerei che **insieme** partirono, dallo stesso aeroporto, per fare il giro del mondo, l'1 verso Est e il 2 verso Ovest, cioè l'1 in senso antiorario e il 2 in senso orario, guardando il Polo Nord dall'alto.

Dopo un paio di giorni di viaggio, **atterrarono, insieme**, **nello stesso aeroporto** (Washington) **da cui erano partiti**.

All'arrivo, si confrontarono i tempi segnati dai due orologi, $\Delta\tau_1$ e $\Delta\tau_{2,}$ e si trovò che $\Delta\tau_2 > \Delta\tau_1$, cioè che, su un totale di 50 ore di viaggio, **l'orologio 2, quello che aveva viaggiato verso Ovest, aveva misurato un intervallo di tempo più lungo rispetto all'altro di 332 ns.**

È un effetto di circa $2 \cdot 10^{-12}$, misurabile appunto solo con orologi atomici

Discussione dell'esperimento di H-K



Conviene fare una serie di **ipotesi semplificative**, che però *non furono fatte da H-K, i quali tennero conto di tutto:*

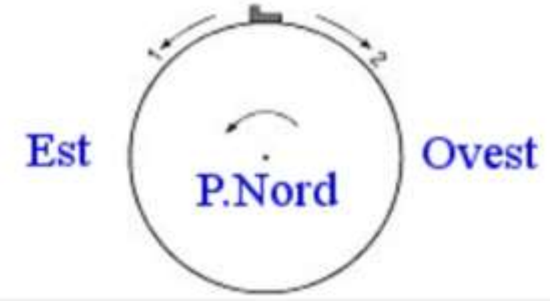
- il viaggio si svolse lungo l'Equatore per entrambi;
- il modulo della velocità restò costante, uguale per i due;
- la quota era costante, uguale per i due (perciò nessun effetto della variazione di gravità: come se entrambi fossero sempre in un campo ***g*** uniforme).

La Terra ruota su se stessa, con velocità (all'Equatore) maggiore di quella dei due aerei: $v_T \approx 460$ m/s.

Mettiamoci in un RI, che si muova insieme alla Terra ma senza ruotare: solidale al centro della Terra. In questo RI, sia l'aereo 1 che il 2 viaggiano in senso antiorario, perché l'1 somma la sua velocità a v_T e invece il 2 la sottrae (in quanto la Terra gira sotto di loro), e l'aereo 1 ha velocità maggiore del 2. Approssimativamente, nel RI, in due giorni, l'1 fa tre giri, il 2 solo uno.

Si confrontano i tempi sulla superficie della Terra, (che non è un RI), quando gli orologi sono fermi, mentre, durante il viaggio, essi sono accelerati. Le loro accelerazioni centripete, però, sono 0,07 m/s^2 e 0,009 m/s^2, molto piccole rispetto a g, ma che, in ogni caso, per il PE di Einstein, possono essere pensate come variazioni di g (< 1%), alle quali l'orologio atomico è del tutto insensibile.

Non esiste il tempo assoluto



Non è vero che la marcia di un orologio "dipende dal suo moto"!

Le accelerazioni centripete dei due aerei (RIF) possono essere ritenute equivalenti a campi gravitazionali uniformi (**PE**), l'effetto di questi campi sull'orologio può essere studiato in laboratorio e si può mostrare che è trascurabile.

La velocità, costante in modulo, dei due aerei (RIF), per il **PR** non influenza le leggi fisiche che governano gli orologi atomici.

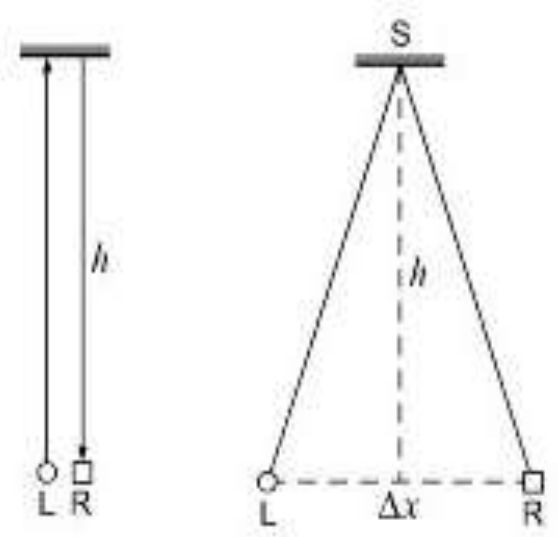
Non c'è un effetto "sugli orologi" dovuto alla velocità, all'accelerazione, al campo gravitazionale. Se, partiti d'accordo e arrivati insieme nello stesso luogo, al ritorno segnano tempi diversi, non è perché il loro funzionamento è stato modificato, È CHE CIASCUN OROLOGIO HA SEGNATO, CORRETTAMENTE, IL "SUO" TEMPO, CIOÈ IL "TEMPO DEL SUO RIF", CHE DIPENDE DAL MODO CON CUI IL RIF STESSO HA PERCORSO LO SPAZIO-TEMPO, E NON SOLO LO SPAZIO.

Può essere utile un'analogia geografica: la distanza tra due città, sulla Terra, non è un assoluto, ma dipende dal percorso. Non diciamo per questo che il contachilometri cambia modo di funzionare a seconda della strada.

Nello spazio-tempo, fissati due punti, esistono infiniti percorsi che li uniscono, e ciascuno ha la sua "lunghezza" (cioè: il tempo proprio, quello misurato dal "suo" orologio)

UNA DURATA, UN INTERVALLO DI TEMPO, NON SONO "ASSOLUTI", MA "RELATIVI"!

L'orologio a luce



Un orologio in moto rispetto al laboratorio

L = sorgente di lampi di luce R = rivelatore S = specchio

$\Delta\tau = 2h/c$ è l'intervallo di tempo impiegato a percorrere il tratto

LSR **nel RI dell'orologio**, cioè quello (l'unico!) rispetto al quale

l'orologio è fermo **($\Delta x = 0$)**

Δt è l'intervallo di tempo impiegato a percorrere LSR nel **RI del laboratorio**, rispetto al quale l'orologio si muove, che è **maggiore di $\Delta\tau$, dato che, per il PR, LA VELOCITÀ DELLA LUCE È INVARIANTE IN TUTTI I RI, DUNQUE ANCHE IN QUELLO DEL LAB**

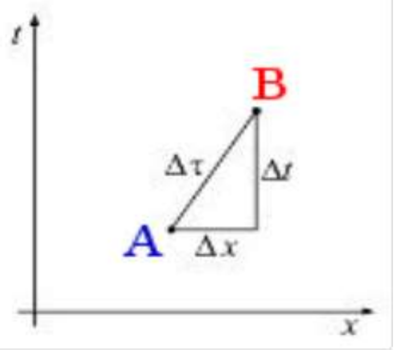
Lo spostamento LSR fatto dalla luce in Δt secondi nel RI del laboratorio è maggiore di $2h$ e vale:

$$c\Delta t = 2\sqrt{h^2 + \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2} = \sqrt{4h^2 + \Delta x^2} = \sqrt{c^2\Delta\tau^2 + \Delta x^2} \text{ da cui } \Delta\tau = \sqrt{\Delta t^2 - \frac{\Delta x^2}{c^2}} = \sqrt{(\Delta t')^2 - \frac{(\Delta x')^2}{c^2}}$$

$\Delta\tau$ = TEMPO MISURATO (dall'orologio a luce) NELL'UNICO RI RISPETTO AL QUALE L'OROLOGIO È FERMO: TEMPO PROPRIO.

IL TEMPO PROPRIO È UN INVARIANTE, NEL SENSO CHE NON CAMBIA CAMBIANDO RI: PUR SE CAMBIO LABORATORIO E Δt E Δx SONO SOSTITUITI DA $\Delta t'$ E $\Delta x'$, $\Delta\tau$ RIMANE LO STESSO.

Il tempo proprio come “lunghezza” nello spazio-tempo



Un punto, nello spazio-tempo, è detto evento. **LA “DISTANZA” tra due eventi, la “LUNGHEZZA” di una certa LINEA UNIVERSO, è il TEMPO PROPRIO, INVARIANTE**.

NON È POSSIBILE ELIMINARE IL SEGNO “MENO”: SI TRATTA DI UNA METRICA *NON* EUCLIDEA (DI MINKOWSKI). A causa del segno ‘meno’ nel tempo proprio, più la lunghezza geometrica è grande, più il tempo proprio corrispondente è piccolo. Infatti, dato che nello spazio-tempo vale la metrica di Minkowski, la “LUNGHEZZA” DELL’IPOTENUSA È MINORE DELLA “LUNGHEZZA” DEI CATETI, IN PARTICOLARE DI QUELLO LUNGO L’ASSE DEI TEMPI.

PERCIÒ IL TEMPO PROPRIO, INTERPRETATO COME “LUNGHEZZA” NELLO SPAZIO-TEMPO, PER LE LINEE UNIVERSO RETTILINEE È MAGGIORE CHE PER QUELLE CURVE.

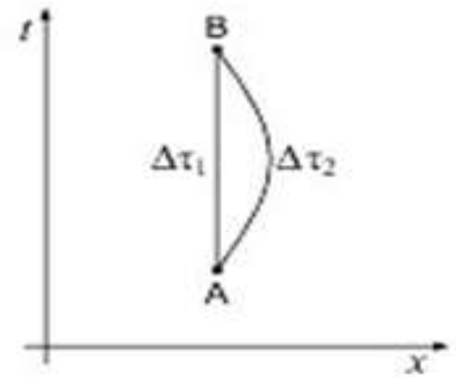
- Se v è la velocità di trascinamento, sarà $\Delta x = v\Delta t$, da cui: $\boxed{\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ e $\boxed{\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$

  ovvero: $\Delta t = \gamma\Delta\tau > \Delta\tau$ **con il ‘fattore di dilatazione’ γ non minore di 1.**

- Se il moto dell’orologio è rettilineo ma non uniforme e $v(t)$ è la velocità all’istante t, si ottiene $\boxed{\Delta\tau = \int_{t_A}^{t_B}\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}\cdot dt}$ che è il tempo proprio segnato da un orologio in moto qualsiasi.

- Se il moto non è rettilineo, $v^2(t)$ è il quadrato del modulo di $\vec{v}(t)$

Il “paradosso” dei gemelli



Il gemello che rimane fermo (linea universo AB rettilinea), alla fine del viaggio dell’altro gemello (linea universo AB curva), avrà un tempo proprio maggiore, cioè sarà invecchiato più del gemello viaggiatore, $\Delta\tau_1 > \Delta\tau_2$, qualunque linea universo questo esso abbia percorso.

Non c’è simmetria: per il viaggiatore, occorre definire un riferimento rigido, necessariamente accelerato. Esistono però RI “tangenti”, in cui esso è momentaneamente fermo.

Il segmento AB rappresenta la linea universo del gemello fermo a Terra, mentre la curva è la linea universo del gemello viaggiatore. Si ha che, qualunque sia $\Delta\tau_2$, $\Delta\tau_1 > \Delta\tau_2$

A causa del segno ‘meno’ della metrica di Minkowski, il tempo proprio (“lunghezza nello s-t”), calcolato lungo una linea universo rettilinea, cioè un segmento (= moto rettilineo uniforme, anche con $v = 0$), è il massimo rispetto a quelli calcolati su tutte le altre curve (= moti possibili) fra gli stessi eventi A e B: ‘massimo invecchiamento’.

In particolare, il tempo proprio calcolato nel RI in cui gli eventi A e B avvengono nella stessa posizione ($\Delta x = 0$) è maggiore di tutti gli altri. **Vale anche per un “orologio biologico”**, altrimenti si potrebbe identificare un RIF privilegiato e non varrebbe più il PR.

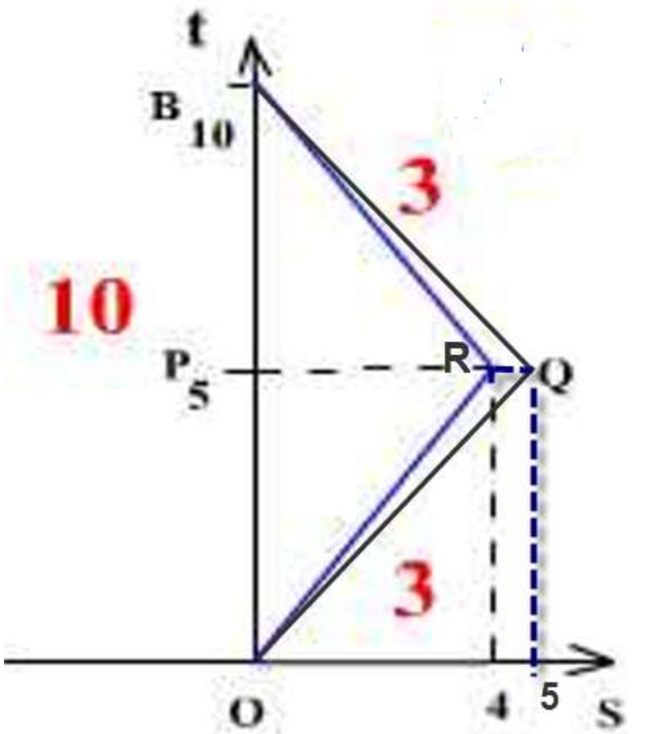
Paradossi

Se la **velocità del corpo è piccola rispetto a quella della luce**, nella formula del tempo proprio il termine che darebbe la correzione relativistica è **piccolissimo**.

Questo spiega come mai nella fisica, fino a questi tempi, non abbiamo avuto bisogno di preoccuparci, con gli orologi che avevamo a disposizione, del fatto che la lunghezza della curva oraria, e quindi la misura del tempo proprio, dipenda dal percorso, e non solo dagli estremi.

L'"effetto gemelli" ci appare un "paradosso" solo perché le variazioni sono troppo piccole perché le possiamo percepire coi nostri sensi.

Effetto gemelli con linea universo angolosa

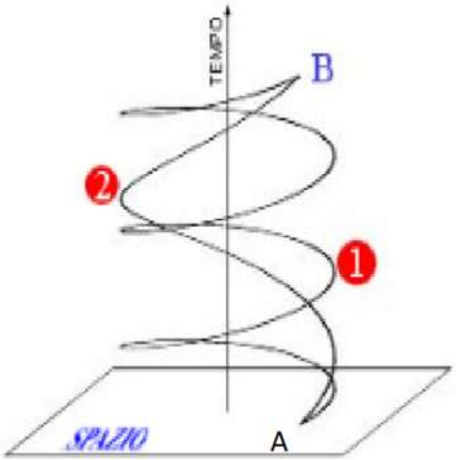


Si ipotizza di lavorare nel limite ideale di orologi che resistano ad accelerazioni molto elevate.

Si possono confrontare le tre linee universo (LU):

- OPB è la LU di una particella che rimane ferma, il cui tempo proprio $\Delta\tau$ soddisfa la relazione: $(c\,\Delta\tau)^2 = (10\,m)^2 - 0^2$, da cui $c\,\Delta\tau = 10\,m$
- OQB è la LU della luce, per cui la distanza spaziale è uguale a quella temporale, e dunque: $(c\,\Delta\tau)^2 = (5\,m)^2 - (5\,m)^2 = 0$, da cui $\Delta\tau = 0\,m$, caso limite
- ORB è la LU del gemello viaggiatore, per cui il tempo proprio $\Delta\tau$ vale 6 m, dato che: ${(c\,\Delta\tau)_{OR}}^2 = {(c\,\Delta\tau)_{RB}}^2 = (5\,m)^2 - (4\,m)^2 = 9\,m^2 = (3\,m)^2$

Spiegazione dell'esperimento di H-K



$$\Delta\tau_1 < \Delta\tau_2$$

Le linee orarie dei due aerei, nell'ipotesi che si muovano di moto circolare uniforme, sono eliche che si sviluppano verso l'alto, lungo l'asse t.

A e B sono, rispettivamente, l'evento "partenza degli aerei" e l'evento "arrivo degli aerei".

La curva 1, quella dell'aereo più veloce, misurata nel RI solidale al centro della Terra, è geometricamente più lunga della 2, misurata nello stesso RI, perciò il suo tempo proprio è più breve di quello della 2 (per effetto del segno "meno" nella relazione).

Calcoli in accordo entro 20 ns, dovuti alle varie cause d'errore.

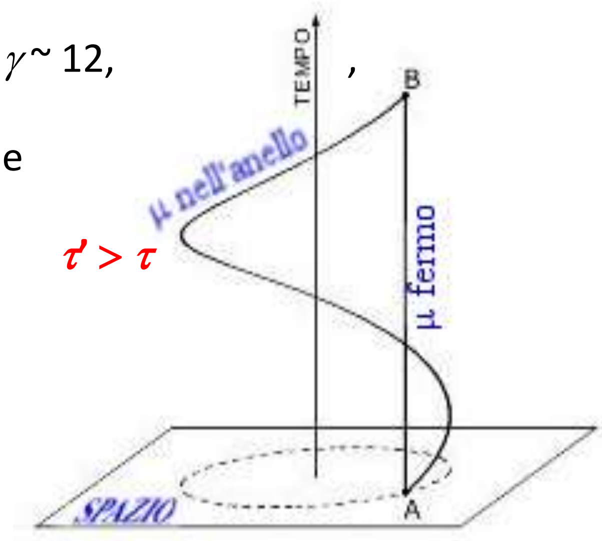
Vita media dei muoni in un anello di accumulazione

Il muone $\boldsymbol{\mu}$ è un leptone, di massa ~ 206 m_e, che decade con vita media (*) τ ~ 2 μs.

In un anello di accumulazione, con velocità "vicine" a *c*, tali cioè che γ~ 12,

si è misurato come variava il loro numero nel tempo e si è calcolato che

la vita media si allungava di un ordine di grandezza: $\tau' = \gamma\,\tau$ = 24 μs $\tau' > \tau$



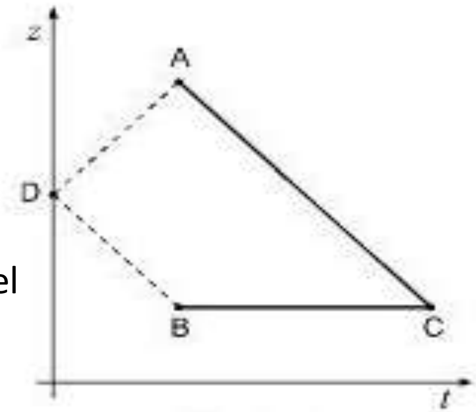
Confrontando le LU di un muone fermo e di un muone in moto, si nota che per quest'ultimo essa è un'elica, di lunghezza geometrica maggiore del segmento AB.

Dunque, il tempo proprio del muone in moto, tra gli eventi A e B, sarà minore di quello del muone fermo. Il muone nell'anello ha perciò vissuto meno a lungo di quello fermo, perciò è meno probabile che sia decaduto: la sua vita media è stata maggiore.

NON È VERO CHE IL TEMPO "SI DILATA"! Il fatto è che hanno percorso due differenti linee universo.

[(*) vita media τ significa che, dopo τ s, è sopravvissuta solo una frazione $1/e$ dei muoni totali: è un decadimento esponenziale $n = n_0\, e^{-t/\tau}$]

Muoni dai raggi cosmici



Si **misura il numero N_0** dei muoni che, a **quota $h = 1900$ m**, attraversano verticalmente, in un certo tempo, una data superficie. Si rifà la **misura a quota 0 e si ottiene $N << N_0$**. Dato che $\boldsymbol{v = 0{,}995\, c \approx c}$, il tempo impiegato a scendere (nel RIF terrestre) sarà circa $\boldsymbol{\Delta t = h/c \approx 6\ \mu s}$**, circa** 3τ, dove $\tau \approx 2\ \mu s$ **è la vita media**.

Il numero di quelli che arrivano dovrebbe essere molto minore di N, ossia ne sono decaduti meno del previsto. Questo si interpreta dicendo che **la vita media dei muoni in volo è maggiore di τ, vita media a riposo**.

asse z = quota; AC = LU del muone in discesa; BC = $\boldsymbol{\Delta t}$ = LU di un orologio fermo nel laboratorio, a quota 0

Per confrontare il tempo proprio ("lunghezza") di due LU, occorre che esse colleghino gli stessi due eventi: faccio partire dal punto D, a metà strada tra A e B, un **segnale radio di sincronismo**, che arrivi contemporaneamente alla base B e alla cima A. Dato che viaggia a velocità c, la pendenza è 45° (pongo $c = 1$) e la sua "lunghezza" (tempo proprio) è nulla, ma, anche se non lo fosse, sarebbero comunque tratti "uguali".

Dato che la LU di DAC è geometricamente più lunga di quella di DBC, si ha che la sua "lunghezza" è minore di Δt di $\gamma \approx 10$ volte, cioè $\Delta\tau = \frac{\Delta t}{\gamma} = \Delta t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx 0{,}6\ \mu s < 2\ \mu s$, ovvero $\Delta\tau < \tau$**, quindi il numero di muoni non ancora decaduti è maggiore di 1/e, contrariamente alle previsioni non-relativistiche.**

La cosiddetta "contrazione delle lunghezze"

La distanza tra il punto di creazione dei muoni e il punto in cui arrivano

è $\Delta x = v\, \Delta t$, nel RIF della Terra.

MA QUANTO VALE NEL RIF DEL MUONE?

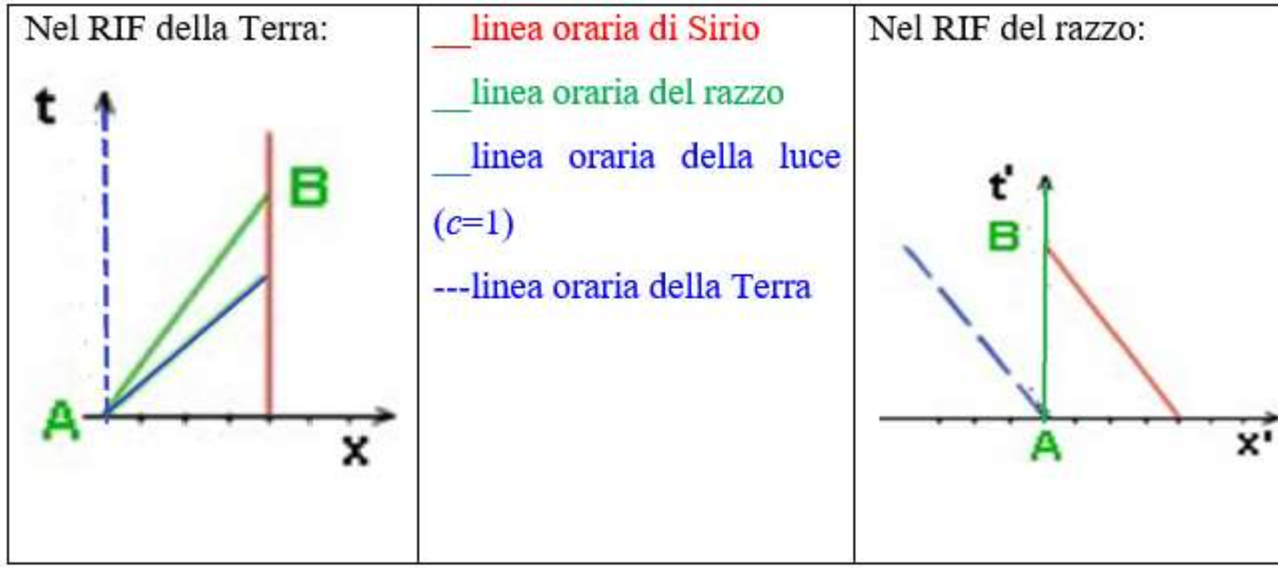
Δx *(RI a riposo)* $= v\, \Delta\tau < \Delta x$ (*RI in moto*)

LA DIMENSIONE LONGITUDINALE AL MOTO "SI CONTRAE", O MEGLIO:

LA LUNGHEZZA A RIPOSO, LA "LUNGHEZZA PROPRIA", È MAGGIORE DI OGNI ALTRA, MISURATA IN UN RIF IN MOTO

Viaggio su Sirio

Nell'anno 2200 d.C. il più veloce razzo interstellare esistente viaggia a velocità v = 0,75 c. Questo razzo vola su Sirio, stella distante 8,7 anni-luce dalla Terra. Sia A l'evento "il razzo parte dalla Terra" e B l'evento "il razzo arriva su Sirio".



- Dopo quanti anni, nel RIF della Terra, il razzo arriva su Sirio?
- Quanto dura il viaggio nel RIF del razzo?
- Calcolare l'intervallo di tempo proprio nel RIF della Terra e in quello del razzo.

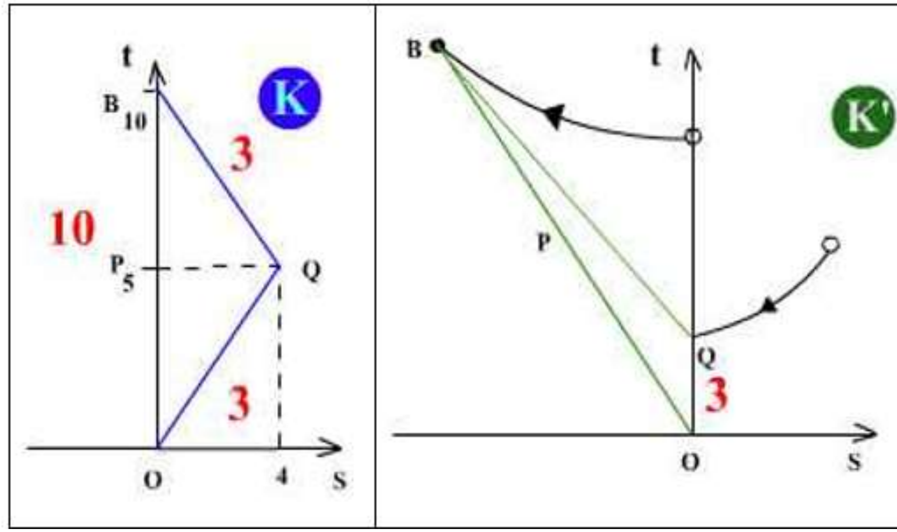
▪ nel RIF della Terra, il viaggio dura $\Delta t = \dfrac{\Delta s}{v} = \dfrac{8{,}7 anni c}{0{,}75c} = 11{,}6 anni$

▪ nel RIF del razzo, gli eventi A e B avvengono **nella stessa posizione**, cioè **$\Delta x' = 0$, e quello che si cerca è il tempo proprio $\Delta t' = \Delta\tau$** $\quad \Delta t' = \Delta\tau = \sqrt{\Delta t^2 - \dfrac{\Delta x^2}{c^2}} = \sqrt{11{,}6^2 - 8{,}7^2}\, anni = 7{,}7\, anni$

▪ **il tempo proprio è invariante, dunque è lo stesso nei due riferimenti**

Cambiare RIF

Mappe spazio-temporali, una nel RI del laboratorio (K) e l'altra nel RI del razzo (K') che si allontana con la particella da O a Q e poi, invece di ritornare indietro con lei, continua con velocità costante 4/5.



(disegno non in scala)
[c=1]
[β=v/c=v]

- (K) Nel RI del laboratorio $x_Q = 4$ e $t_Q = 5$

tempo proprio lungo OQ = $\sqrt{5^2 - 4^2} = 3$

tempo proprio totale lungo OQB = 2·3 =6 e tempo proprio lungo OPB = 10

- (K') nel RI del razzo, $x'_Q = x'_O = 0$ e $t'_Q = 3 = \tau_{OQ}$ perché è il tempo proprio lungo OQ

la velocità del laboratorio sarà v = – 4/5 (perché verso sinistra) (OPB)

fattore di dilatazione $\gamma = \left(\sqrt{1-v^2}\right)^{-1} = \frac{5}{3}$, che è il rapporto $\frac{t'_B}{\tau_B}$, quindi: $t'_B = \gamma\, \tau_B = 10\ (5/3) = 50/3$

da cui $x'_B = -\ |v| \cdot t'_B = -\ (4/5)\ (50/3) = -\ 40/3$

<u>tempo proprio lungo OPB</u> = τ_{OPB} = $\tau_{OB} = \sqrt{(t'_{OB})^2 - (x'_{OB})^2} = 10$

<u>tempo proprio lungo OQB</u> = $\tau_{OQ} + \tau_{QB}$ $\quad \tau_{OQ} = 3$ e $\tau_{OQB} = \tau_{OQ} + \tau_{QB} = 3 + \sqrt{\left(\frac{50}{3} - 3\right)^2 - \left(\frac{40}{3}\right)^2} = 6$

Entrambi i valori sono uguali a quelli calcolati nell'altro RIF.

Gli eventi Q e B sono su iperboli (equilatere) invarianti del tipo: $y^2 - x^2 = cost$ perché

$$(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = (\Delta \tau)^2 = cost \quad \text{oppure} \quad (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = (\Delta \tau)^2 = cost$$

Intervallo di tipo tempo

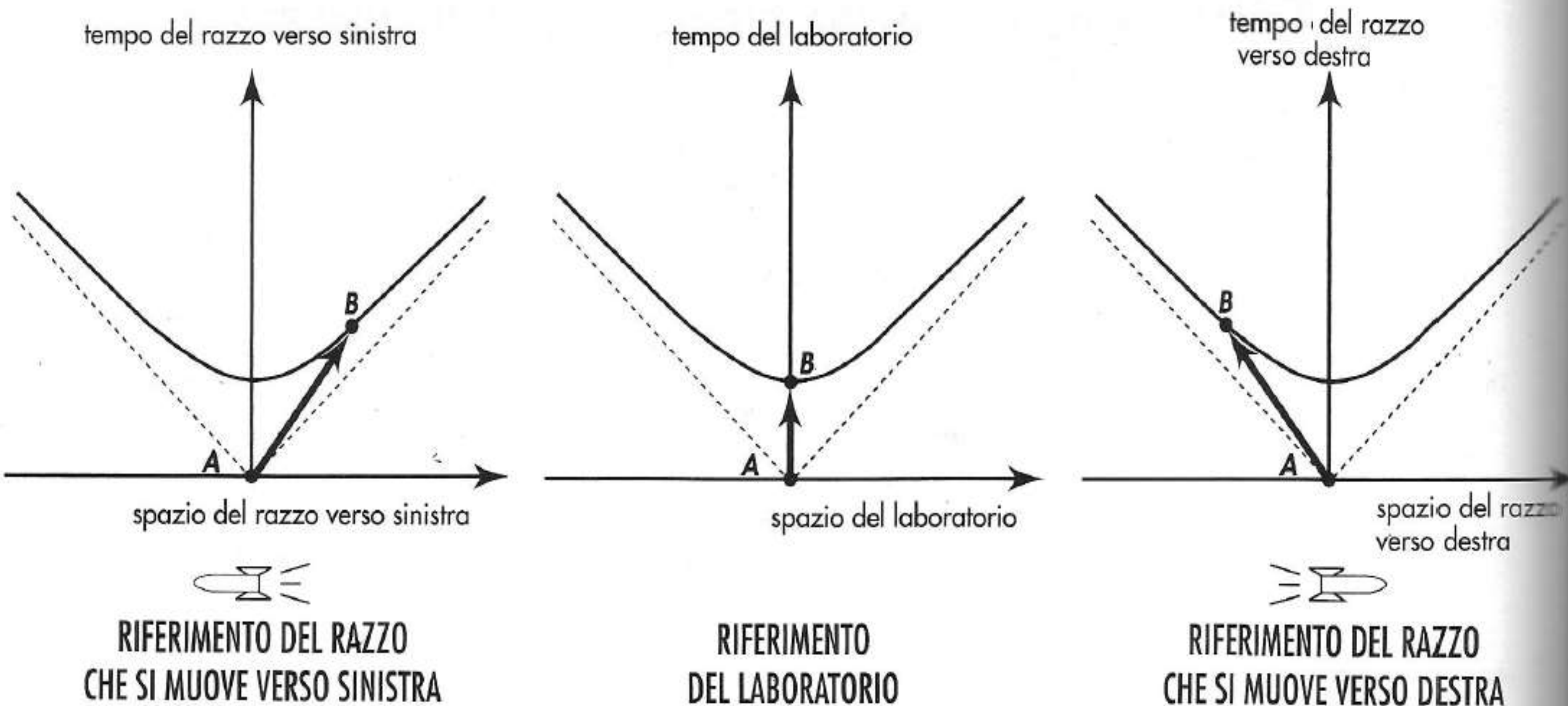


FIGURA 6.1 Vengono qui rappresentati nelle mappe spazio-temporali di tre sistemi in volo libero gli eventi *A* e *B*, che formano una coppia di tipo tempo (con l'evento *A* scelto, in maniera arbitraria, come evento di riferimento). In tutti i riferimenti il punto *B* appartiene a un'iperbole aperta nella direzione del semiasse positivo dei tempi. L'intervallo di *tempo* più breve tra gli eventi *A* e *B* viene registrato nel sistema del laboratorio, quello in cui i due eventi accadono nello stesso luogo.

$$(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = (\Delta \tau)^2 > 0$$

Intervallo di tipo spazio

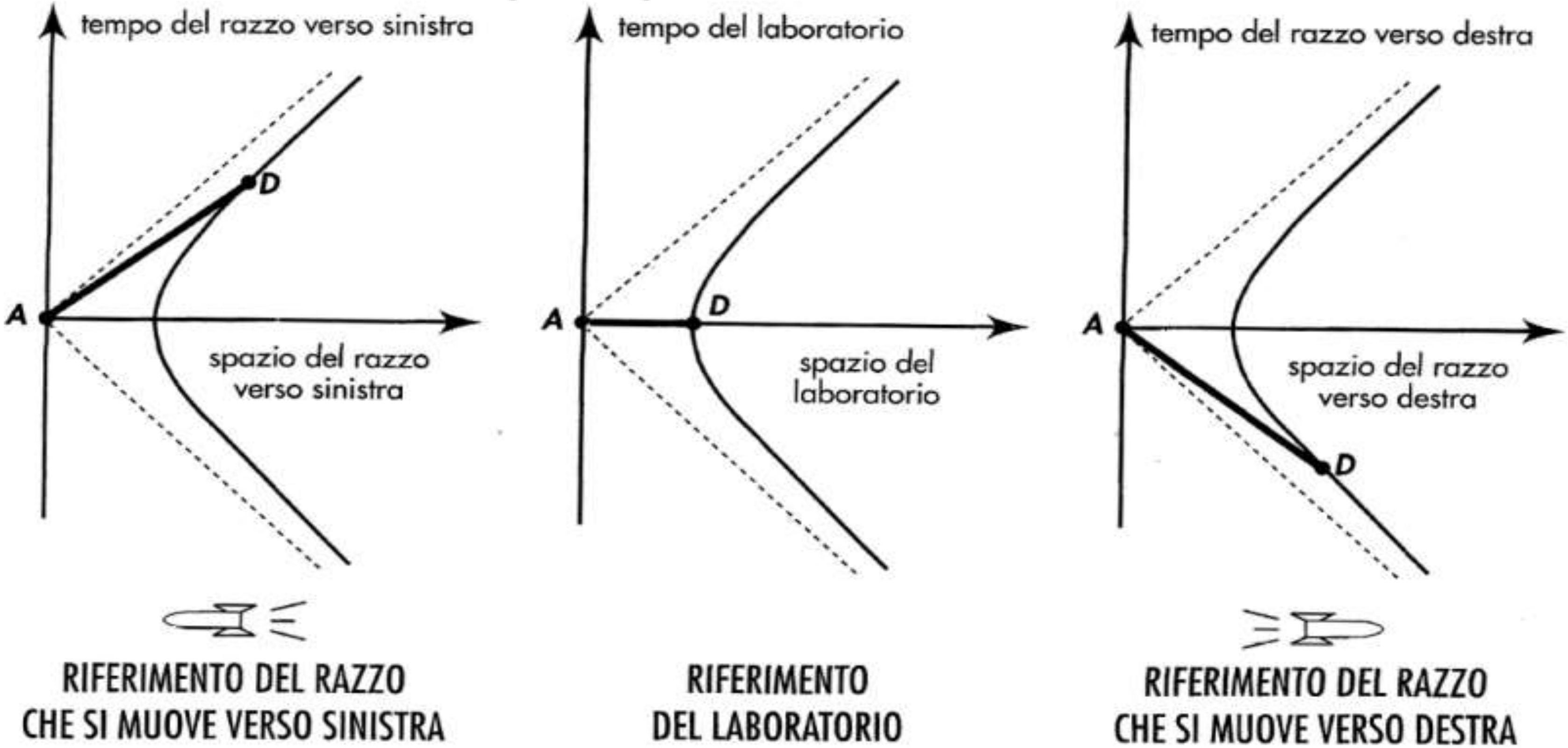


FIGURA 6.2 Vengono qui rappresentati nelle mappe spazio-temporali di tre sistemi in volo libero gli eventi *A* e *D*, che formano una coppia di tipo spazio (con l'evento *A* scelto, in maniera arbitraria, come evento di riferimento). In tutti i riferimenti il punto *D* appartiene a un'iperbole aperta nella direzione del semiasse positivo degli spazi. La *distanza* più breve tra gli eventi *A* e *D* viene registrata nel sistema del laboratorio, quello in cui i due eventi accadono nello stesso istante. La linea in tratto spesso rappresenta la separazione spazio-temporale *AD*. Nessuna particella può muoversi lungo questa linea; in caso contrario, la sua velocità sarebbe maggiore di quella della luce (e risulterebbe infinitamente grande nel sistema del laboratorio, dal momento che in esso la particella dovrebbe percorrere la distanza da *A* a *D* in un tempo nullo!).

$$(\Delta t)^2-(\Delta x)^2=(\Delta\tau)^2<0 \qquad (\Delta x)^2-(\Delta t)^2=(\Delta s)^2>0$$

Δs = distanza propria

Intervallo di tipo luce

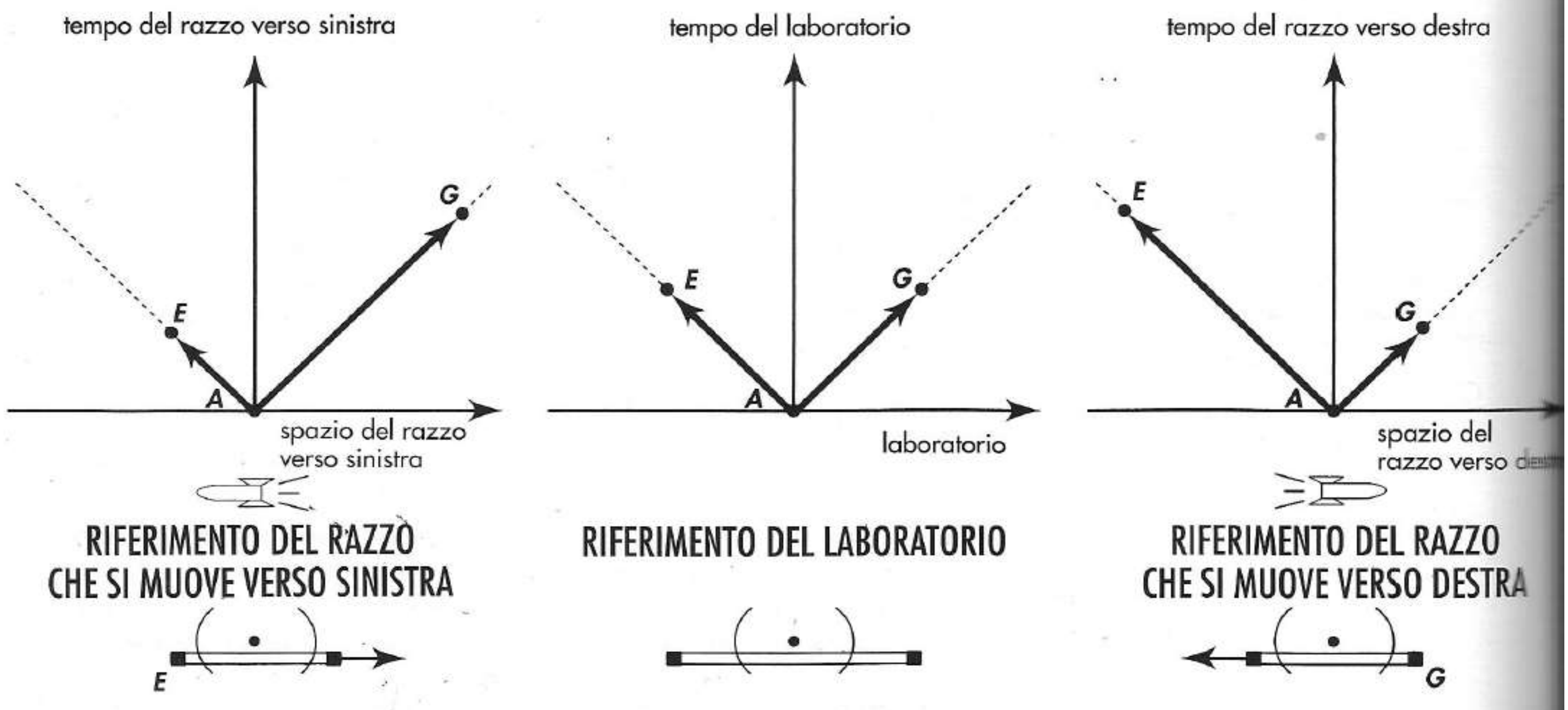
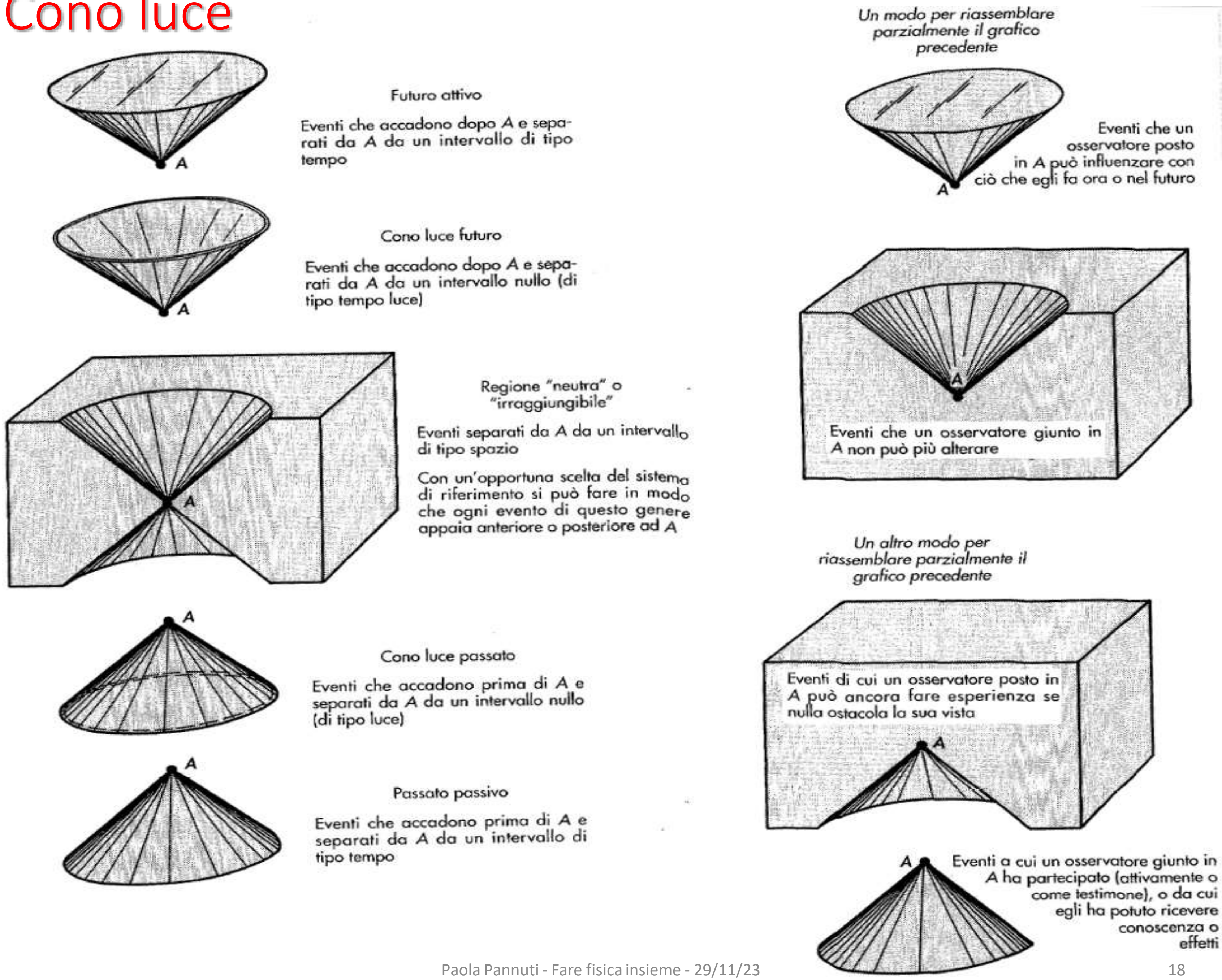


FIGURA 6.3 Vengono qui rappresentati nelle mappe spazio-temporali di tre sistemi in volo libero gli eventi *A* e *E*, che formano una coppia di tipo luce (con l'evento *A* scelto, in maniera arbitraria, come evento di riferimento). Un lampo di luce viene emesso in *A* e si propaga verso l'esterno partendo dal centro di una sbarra che è a riposo nel sistema del laboratorio. Gli eventi *E* e *G* sono dati dalla ricezione di questo lampo ai due estremi della sbarra secondo le misurazioni di diversi osservatori. Nel sistema del laboratorio gli eventi di ricezione *E* e *G* avvengono nello stesso istante. Nel sistema del razzo che si muove verso destra la sbarra si sposta verso sinistra, per cui l'evento *G* avviene prima di *E*. Nel sistema del razzo che si muove verso sinistra, la sbarra si sposta verso destra, e quindi l'evento *E* avviene prima di *G*.

$$(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = 0$$

Cono luce


Futuro attivo
Eventi che accadono dopo A e separati da A da un intervallo di tipo tempo
A
Cono luce futuro
Eventi che accadono dopo A e separati da A da un intervallo nullo (di tipo tempo luce)
A
Regione "neutra" o "irraggiungibile"
Eventi separati da A da un intervallo di tipo spazio
Con un'opportuna scelta del sistema di riferimento si può fare in modo che ogni evento di questo genere appaia anteriore o posteriore ad A
A
A
Cono luce passato
Eventi che accadono prima di A e separati da A da un intervallo nullo (di tipo luce)
A
Passato passivo
Eventi che accadono prima di A e separati da A da un intervallo di tipo tempo
Un modo per riassemblare parzialmente il grafico precedente
Eventi che un osservatore posto in A può influenzare con ciò che egli fa ora o nel futuro
A
A
Eventi che un osservatore giunto in A non può più alterare
Un altro modo per riassemblare parzialmente il grafico precedente
Eventi di cui un osservatore posto in A può ancora fare esperienza se nulla ostacola la sua vista
A
A
Eventi a cui un osservatore giunto in A ha partecipato (attivamente o come testimone), o da cui egli ha potuto ricevere conoscenza o effetti