Liceo Scientifico Statale A. Einstein Palermo

# *VALORE ASSOLUTO*

## *EQUAZIONI CON VALORE ASSOLUTO*

*Esercizi*

## *DISEQUAZIONI CON VALORE ASSOLUTO*

*Esercizi*

Prof. Giuseppe Buccheri

# *EQUAZIONI CON VALORE ASSOLUTO

Data una qualsiasi espressione algebrica *A(x)*, il suo valore assoluto $|A(x)|$ dipende dal segno di *A(x):*

se $A(x) \geq 0$ $\longrightarrow$ $|A(x)| = A(x)$

se $A(x) < 0$ $\longrightarrow$ $|A(x)| = -A(x)$

**cosa succede se dobbiamo risolvere delle equazioni in cui una o più espressioni contenenti l'incognita compaiono in *valore assoluto?***

Per risolvere queste equazioni è necessario studiare preliminarmente il segno di ciascuna espressione in cui compare il valore assoluto:
i valori che si possono attribuire all'incognita restano divisi in intervalli, in base al valore assoluto, e l'equazione data assume "forma diversa" nei suddetti intervalli!!

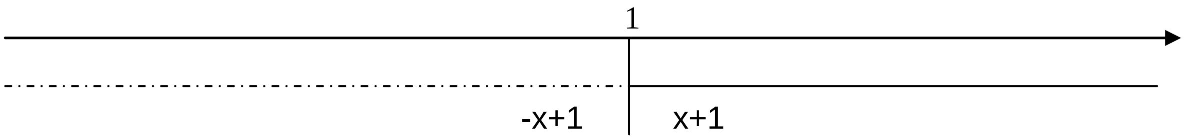
Esempio *equazione con valore assoluto*:
$|x-1| = 4-2x$

studiamo l'espressione con il v.a. $|x-1|$

quando $x-1 \geq 0$ ossia $x \geq 1$ il valore assoluto vale **x-1**

quando $x-1 < 0$ ossia $x < 1$ il valore assoluto vale **-x+1**

quindi il valore assoluto $|x-1|$ assume valori diversi nei due intervalli




e di conseguenza anche l'equazione assume "forme diverse" in ciascuno di questi intervalli:

quando $x \geq 1$ l'equazione diventa

**x - 1 = 4 - 2x**

quando $x < 1$ l'equazione diventa

**- x + 1 = 4 - 2x**

Perciò risolvere l'equazione con il valore assoluto

$$|x-1| = 4-2x$$

vuol dire risolvere due sistemi, contenenti le "forme diverse" dell'equazione negli intervalli determinati dal v.a.

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x-1 = 4-2x \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 1 \\ -x+1 = 4-2x \end{cases}$$

e la soluzione finale si ottiene unendo le soluzioni dei due sistemi

$$S = S_1 \cup S_2$$

risolviamo $S_1$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x-1 = 4-2x \end{cases}$$
$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x+2x = 4+1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x \geq 1 \\ 3x = 5 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x = \dfrac{5}{3} \end{cases}$$

soluzione del sistema $S_1$ $\qquad x = \dfrac{5}{3}$

risolviamo $S_2$

$$\begin{cases} x < 1 \\ -x+1 = 4-2x \end{cases}$$
$$\begin{cases} x < 1 \\ -x+2x = 4-1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x < 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

soluzione del sistema $S_2$ $\qquad \nexists x \in \Re$ (impossibile; nessuna soluzione comune)

la <u>soluzione finale</u>: $S = S_1 \cup S_2 \Rightarrow x = \dfrac{5}{3}$

***e se i valori assoluti nell'equazione sono due oppure più di due? Niente paura.. il ragionamento da seguire non cambia!! Si studiano i singoli v.a., si ricavano le "forme diverse" di equazioni e si ricavano i sistemi da risolvere!! Occhio, però, i sistemi da risolvere aumentano! L'unione di tutte le soluzioni dei sistemi determinerà la soluzione finale!***

Esempio *equazione con due valori assoluti:*

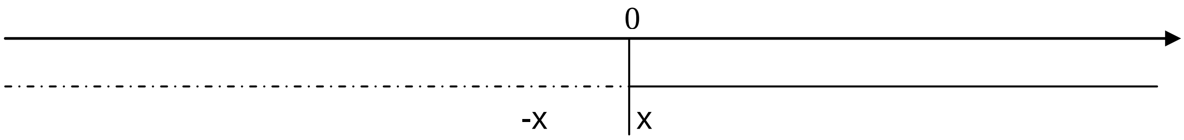
$|x| - 2|x+3| = 0$

studiamo il primo v.a. $|x|$

quando $x \geq 0$ il valore assoluto vale **x**

quando $x < 0$ il valore assoluto vale **-x**

quindi il valore assoluto $|x|$ assume valori diversi nei due intervalli

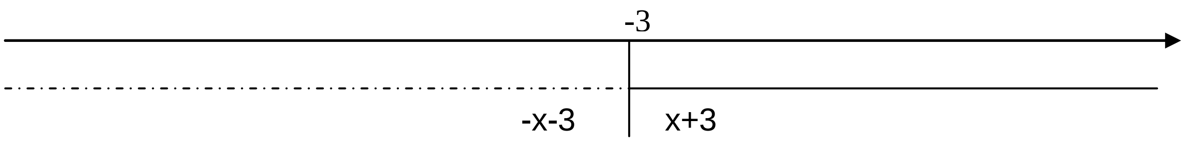



studiamo il secondo v.a. $|x+3|$

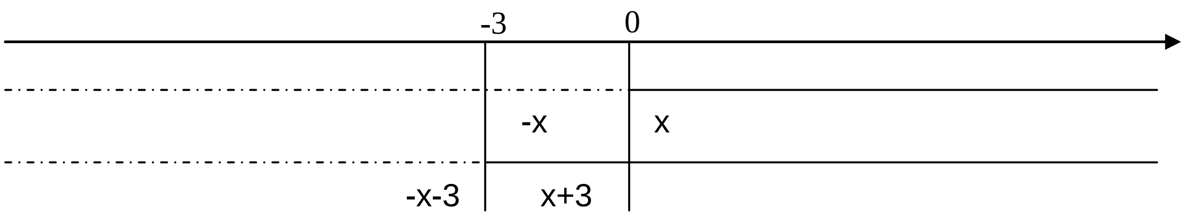
quando $x + 3 \geq 0$ ossia $x \geq -3$ il valore assoluto vale **x+3**

quando $x + 3 < 0$ ossia $x < -3$ il valore assoluto vale **-x-3**

quindi il valore assoluto $|x+3|$ assume valori diversi nei due intervalli




se consideriamo insieme i due valori assoluti e i loro intervalli si ricava



si può notare come l'equazione assume TRE "forme diverse" in tre intervalli

quando $x < -3$ l'equazione assume la forma **–x-2(-x-3)=0**

quando $-3 \leq x < 0$ l'equazione assume la forma **–x-2(x+3)=0**

quando $x \geq 0$ l'equazione assume la forma **x-2(x+3)=0**

perciò dobbiamo studiare tre sistemi

$$\begin{cases} x < -3 \\ -x-2(-x-3)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -3 \leq x < 0 \\ -x-2(x+3)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 0 \\ x-2(x+3)=0 \end{cases}$$

e la soluzione finale si ricaverà unendo le soluzioni dei tre sistemi

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$$

risolviamo il primo sistema

$$\begin{cases} x < -3 \\ -x-2(-x-3)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -3 \\ -x+2x+6=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -3 \\ -x+2x=-6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -3 \\ x=-6 \end{cases}$$

soluzione del sistema $S_1$ $x = -6$

risolviamo il secondo sistema

$$\begin{cases} -3 \leq x < 0 \\ -x-2(x+3)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \leq x < 0 \\ -x-2x-6=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \leq x < 0 \\ -x-2x=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \leq x < 0 \\ -3x=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \leq x < 0 \\ x=-\dfrac{6}{3}=-2 \end{cases}$$

soluzione del sistema $S_2$ $x = -2$

risolviamo il terzo sistema

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x - 2(x+3) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x - 2x - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ -x = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x = -6 \end{cases}$$

soluzione del sistema $S_3$ $\nexists x \in \Re$ (impossibile; nessuna soluzione comune)

la <u>soluzione finale</u>: $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \Rightarrow x = -6 \cup x = -2$

***esercizi***

# *DISEQUAZIONI CON VALORE ASSOLUTO

Data una qualsiasi espressione algebrica *A(x)*, il suo valore assoluto $|A(x)|$ dipende dal segno di *A(x):*

se $A(x) \geq 0 \longrightarrow |A(x)| = A(x)$

se $A(x) < 0 \longrightarrow |A(x)| = -A(x)$

**cosa succede se dobbiamo risolvere delle disequazioni in cui una o più espressioni contenenti l'incognita compaiono in *valore assoluto?***

Per risolvere queste disequazioni è necessario studiare preliminarmente il segno di ciascuna espressione in cui compare il valore assoluto:
i valori che si possono attribuire all'incognita restano divisi in intervalli, in base al valore assoluto, e la disequazione data assume "forma diversa" nei suddetti intervalli!!

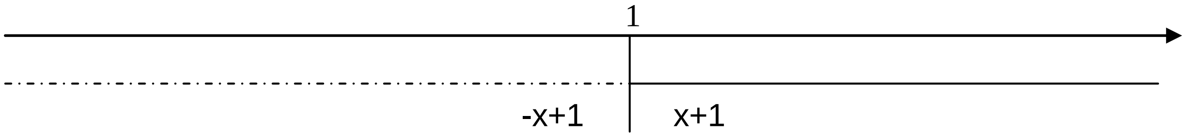
Esempio *disequazione con valore assoluto*:
$|x-1| > 4-2x$

studiamo l'espressione con il v.a. $|x-1|$

quando $x-1 \geq 0$ ossia $x \geq 1$ il valore assoluto vale **x-1**

quando $x-1 < 0$ ossia $x < 1$ il valore assoluto vale **-x+1**

quindi il valore assoluto $|x-1|$ assume valori diversi nei due intervalli




e di conseguenza anche la disequazione assume "forme diverse" in ciascuno di questi intervalli:

quando $x \geq 1$ la disequazione diventa

**x - 1 > 4 - 2x**

quando $x < 1$ la disequazione diventa

**- x + 1 > 4 - 2x**

Perciò risolvere la disequazione con il valore assoluto

$$|x-1| > 4-2x$$

vuol dire risolvere due sistemi, contenenti le "forme diverse" della disequazione negli intervalli determinati dal v.a.

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x-1 > 4-2x \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 1 \\ -x+1 > 4-2x \end{cases}$$

e la soluzione finale si ottiene unendo le soluzioni dei due sistemi

$$S = S_1 \cup S_2$$

risolviamo $S_1$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x-1 > 4-2x \end{cases}$$
$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x+2x > 4+1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x \geq 1 \\ 3x > 5 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x > \dfrac{5}{3} \end{cases}$$

soluzione del sistema $S_1$ $\qquad x > \dfrac{5}{3}$

risolviamo $S_2$

$$\begin{cases} x < 1 \\ -x+1 > 4-2x \end{cases}$$
$$\begin{cases} x < 1 \\ -x+2x > 4-1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x < 1 \\ x > 3 \end{cases}$$

soluzione del sistema $S_2$ $\qquad \nexists x \in \Re$ (impossibile; nessuna soluzione comune)

la <u>soluzione finale</u>: $S = S_1 \cup S_2 \Rightarrow x > \dfrac{5}{3}$

***e se i valori assoluti nella disequazione sono due? E se sono più di due?***
***Niente paura.. il ragionamento da seguire non cambia!! Si studiano i singoli v.a., si ricavano le "forme diverse" di disequazioni e si ricavano i sistemi da risolvere!! Occhio, però, i sistemi da risolvere aumentano! L'unione di tutte le soluzioni dei sistemi determinerà la soluzione finale!***

Esempio *disequazione con due valori assoluti:*

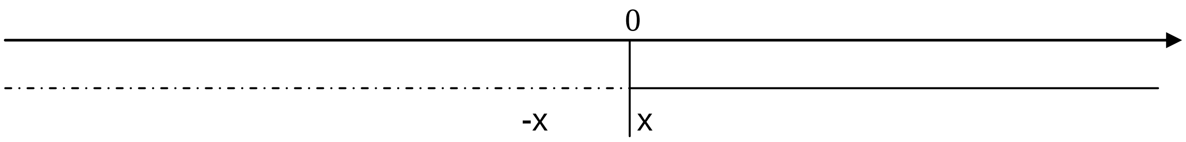
$|x| - 2|x+3| < 0$

studiamo il primo v.a. $|x|$

quando $x \geq 0$ il valore assoluto vale **x**

quando $x < 0$ il valore assoluto vale **-x**

quindi il valore assoluto $|x|$ assume valori diversi nei due intervalli

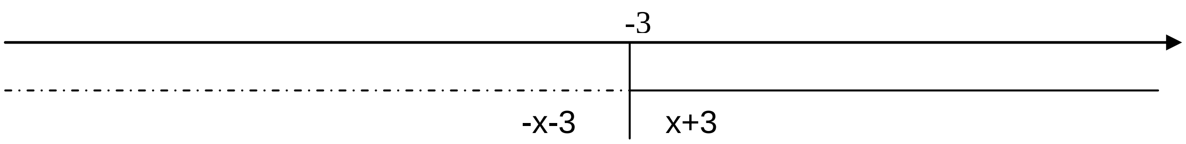



studiamo il secondo v.a. $|x+3|$

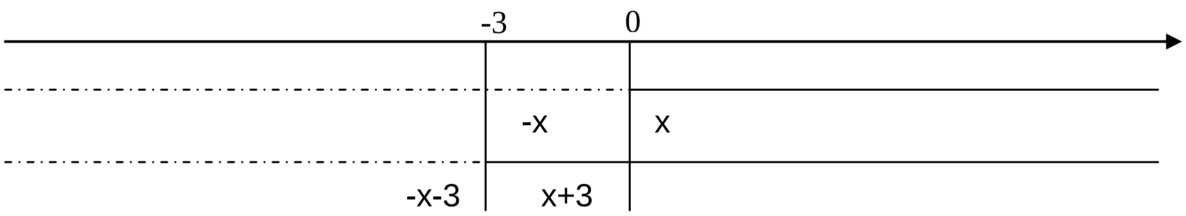
quando $x+3 \geq 0$ ossia $x \geq -3$ il valore assoluto vale **x+3**

quando $x+3 < 0$ ossia $x < -3$ il valore assoluto vale **-x-3**

quindi il valore assoluto $|x+3|$ assume valori diversi nei due intervalli




se consideriamo insieme i due valori assoluti e i loro intervalli si ricava



si può notare come la disequazione assume TRE “forme diverse” in tre intervalli

quando $x < -3$ la disequazione assume la forma **–x-2(-x-3)<0**

quando $-3 \le x < 0$ la disequazione assume la forma **–x-2(x+3)<0**

quando $x \ge 0$ la disequazione assume la forma **x-2(x+3)<0**

perciò dobbiamo studiare tre sistemi

$$\begin{cases} x < -3 \\ -x-2(-x-3) < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -3 \le x < 0 \\ -x-2(x+3) < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \ge 0 \\ x-2(x+3) < 0 \end{cases}$$

e la soluzione finale si ricaverà unendo le soluzioni dei tre sistemi

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$$

risolviamo il primo sistema

$$\begin{cases} x < -3 \\ -x-2(-x-3) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -3 \\ -x+2x+6 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -3 \\ -x+2x < -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -3 \\ x < -6 \end{cases}$$

soluzione del sistema $S_1$ $x < -6$

risolviamo il secondo sistema

$$\begin{cases} -3 \le x < 0 \\ -x-2(x+3) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \le x < 0 \\ -x-2x-6 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \le x < 0 \\ -x-2x < 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \le x < 0 \\ -3x < 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \le x < 0 \\ x > -\dfrac{6}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \le x < 0 \\ x > -2 \end{cases}$$

soluzione del sistema $S_2$ $\quad -2 < x < 0$

risolviamo il terzo sistema

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x - 2(x+3) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x - 2x - 6 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ -x < 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x > -6 \end{cases}$$

soluzione del sistema $S_3$ $\quad x \geq 0$

la <u>soluzione finale</u>: $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \Rightarrow x < -6 \cup -2 < x < 0 \cup x \geq 0 \Rightarrow x < -6 \cup x > -2$

# *ESERCIZI: disequazioni con v.a.

**Risolviamo insieme una disequazione con il valore assoluto!**
**Non ricordi la teoria?!? No problem.. un ripasso sicuramente non fa male! teoria**

Disequazione:

$$|x^2-5x+6| \le |x-3|$$

analizziamo il primo valore assoluto $|x^2-5x+6|$

$|x^2-5x+6|$

- se $x^2-5x+6 \ge 0 \longrightarrow x^2-5x+6$
- se $x^2-5x+6 < 0 \longrightarrow -(x^2-5x+6) \longrightarrow -x^2+5x-6$

ossia

$|x^2-5x+6|$

- se $x \le 2$ e $x \ge 3 \longrightarrow x^2-5x+6$
- se $2 < x < 3 \longrightarrow -x^2+5x-6$

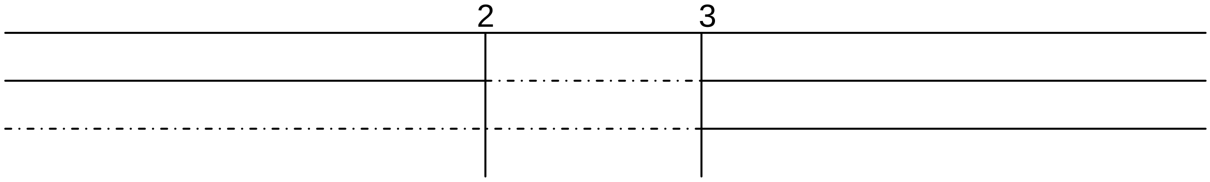
analizziamo il secondo valore assoluto $|x-3|$

prova a determinare il suo valore in modo autonomo.. e poi confronta il risultato ottenuto con quello riportato

$|x-3|$

- se $x \ge 3 \longrightarrow x-3$
- se $x < 3 \longrightarrow -x+3$

adesso bisogna creare il grafico per individuare gli intervalli




*Quanti sistemi si formano per la risoluzione della nostra disequazione?*

*Hai detto TRE??*
*BRAVO!!!*

IMPOSTA I TRE SISTEMI.. E POI VERIFICA SE SONO CORRETTI!

$$S_1 \qquad \begin{cases} x \leq 2 \\ x^2 - 5x + 6 \leq -x + 3 \end{cases}$$

$$S_2 \qquad \begin{cases} 2 < x < 3 \\ -x^2 + 5x - 6 \leq -x + 3 \end{cases}$$

$$S_3 \qquad \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 5x + 6 \leq x - 3 \end{cases}$$

adesso bisogna risolvere i sistemi!!

Soluzioni:

$S_1 \Rightarrow 1 \leq x \leq 2$

$S_2 \Rightarrow 2 < x < 3$

$S_3 \Rightarrow 3 \leq x \leq 4$

se uniamo le soluzioni ottenute determiniamo la soluzione della disequazione:

$$S = 1 \leq x \leq 4$$

hai ottenuto lo stesso risultato??
Bravo..
Non hai ottenuto lo stesso risultato?? Controlla bene i calcoli.. e non perderti d'animo!
Sei ugualmente bravo!!

***Adesso tocca a te..***
***risolvere le seguenti disequazioni con v.a.***

a) $|x-4| > -2x+1$
b) $x^2 - 1 > |x^2 - 5x + 1| - 2$
c) $|x^2 - 2x| \leq 2|x| - 3$