

Stima del misurando

□ in genere: $y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$

□ sia le grandezze x_1, x_2, \dots, x_N sia y appartengono alle rispettive popolazioni dei valori possibili

□ x_1, x_2, \dots, x_N possono essere determinate durante la misurazione o possono essere note da fonti esterne (campioni certificati, dati di manuali, costanti fisiche, ...)

□ una stima del misurando può essere ottenuta come:

$$\hat{y} = f(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N)$$

□ se la funzione f è lineare tutto ok

Stima del misurando

- ❑ in presenza di forte non linearità dovrei derivare la popolazione Y:

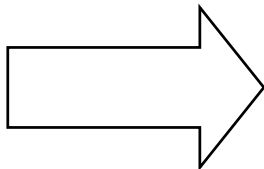
$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$$

- ❑ e quindi determinare per via statistica la stima \hat{y}
- ❑ l'operazione è fattibile solo se conosco le distribuzioni X
- ❑ la variabilità delle misure è solitamente piccola, quindi:

$$\hat{y} = f(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N) + \sum_i \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{x=\hat{x}} \cdot \Delta x_i \cong f(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N)$$

Valutazione dell'incertezza tipo categoria A

- se Y rappresenta la popolazione delle *misure ripetute* l'*incertezza tipo* coincide con la miglior stima che si possa dare di $\sigma(Y)$:


$$u(y) = \sqrt{S_y^2}$$

Valutazione dell'incertezza tipo categoria B

- ❑ si determina la variabilità presunta
- ❑ l'incertezza tipo viene ipotizzata con un giudizio scientifico di tutte le informazioni disponibili sulla possibile variabilità di y
- ❑ ESEMPIO
- ❑ dal certificato di taratura il valore di resistenza R di un resistore risulta essere (grado di fiducia al 99%):

$$R = 10,000742 \quad \Omega \pm 129 \quad \mu\Omega \quad a \quad 23^\circ$$

- ❑ *ipotizzando* una distribuzione normale, il 99% di fiducia corrisponde a $2,58 \sigma$, pertanto l'incertezza tipo può essere valutata come

$$u(R) = 129 \mu\Omega / 2,58 = 50 \mu\Omega$$

Incertezza tipo composta (1)

- sfruttando le proprietà di *coerenza interna* e di *trasferibilità* la valutazione dell'incertezza di misura può passare attraverso
 - ♦ la valutazione separata dell'incertezza tipo di ciascuna delle variabili che concorrono all'incertezza complessiva
 - ♦ la “composizione” delle diverse componenti a formare l'incertezza tipo composta

Legge di propagazione dell'incertezza

□ posto $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$

□ dallo sviluppo di Taylor e dalla definizione di incertezza tipo possiamo ricavare:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j)$$

□ dove $u(x_i, x_j) = u(x_j, x_i)$ è la covarianza stimata di x_i e x_j

□ N.B. le derivate sono valutate per $x_i = \hat{x}_i$

Legge di propagazione dell'incertezza: variabili indipendenti

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)}$$

Incertezza composta (2)

- L'incertezza tipo composta stimata applicando la legge di propagazione dell'incertezza è *universalmente* accettata per esprimere l'incertezza di una misura.

Combinazione lineare

grandezza derivata

grandezze misurate

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots b_N x_N$$

costanti note

se le misure sono tutte statisticamente indipendenti:

$$u_c(y) = \sqrt{b_1^2 u^2(x_1) + b_2^2 u^2(x_2) + \dots b_N^2 u^2(x_N)}$$

Esempio

$$y = x_1 - x_2$$

$$u_c(y) = \sqrt{(1)^2 u^2(x_1) + (-1)^2 u^2(x_2)} = \sqrt{u^2(x_1) + u^2(x_2)}$$

Prodotto di variabili

$$y = b_0 \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2} \cdot \dots \cdot x_N^{b_n}$$

□ essendo $\frac{\partial y}{\partial x_i} = b_0 \cdot b_i \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2} \cdot \dots \cdot x_i^{b_i-1} \cdot \dots \cdot x_N^{b_N} = b_i \frac{y}{x_i}$

□ se le misure sono tutte statisticamente indipendenti:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(b_i \frac{y}{x_i} \right)^2 u^2(x_i)} = y \sqrt{\sum_{i=1}^N (b_i)^2 \left(\frac{u(x_i)}{x_i} \right)^2}$$

□ ossia $\frac{u_c(y)}{y} = \sqrt{\sum_{i=1}^N (b_i)^2 \left(\frac{u(x_i)}{x_i} \right)^2}$

Logaritmo

$$y = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad u_c(y) = \frac{u(x)}{x}$$

Esponenziale

$$y = e^x \quad \Rightarrow \quad u_c(y) = e^x u(x)$$

Incerteza estesa

- nell'uso comune delle misure, dobbiamo poter definire una fascia che comprenda una parte rilevante e specificata dei valori y ragionevolmente attribuibili al misurando. In altri termini, dobbiamo poter affermare che, con una probabilità assegnata

$$\hat{y} - U \leq y \leq \hat{y} + U$$

- la grandezza U che definisce l'intervallo prende il nome di incerteza estesa, essa viene *sempre* espressa come:

$$U = k \cdot u_c(y)$$

- k viene detto fattore di copertura
- il risultato di una misurazione viene pertanto fornito nella forma $\hat{y} \pm U$ e specificando il fattore di copertura

Determinazione di k

- ❑ il fattore di copertura determina la probabilità che il valore vero della misura cada all'interno dell'intervallo $\hat{y} \pm U$
- ❑ il calcolo dell'incertezza estesa U avente livello di fiducia specificato è necessariamente approssimativo (a meno di non conoscere tutta la distribuzione delle misure!)

Esempio

□ distribuzione delle misure di tipo normale, risultato mediato

□ $u_c(y) = S_m$

□ ricordando che $\sigma^2(S_m) \cong \frac{\sigma_m^2}{2 \cdot \nu} = \frac{\sigma_m^2}{2 \cdot (n-1)}$

□ l'incertezza relativa della stima dell'incertezza vale:

$$\frac{\sigma(S_m)}{\sigma_m} \cong \frac{\sigma(u_c(y))}{u_c(y)} \approx \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}$$

Numero di osservazioni (n)	$\frac{\sigma(u(y))}{u(y)} \cdot 100$
2	76
3	52
4	42
5	36
10	24
20	16
30	13
50	10

Distribuzione normale ?

□ essendo, eventualmente dopo la linearizzazione,

$$Y = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_N X_N = \sum_{i=1}^N c_i X_i$$

□ dalla statistica sappiamo che se le X_i sono distribuzioni *normali e indipendenti* allora Y è sicuramente normale

□ **TEOREMA CENTRALE (seconda formulazione)**

la distribuzione Y è approssimativamente normale se le X_i sono indipendenti e se la varianza $\sigma^2(Y)$ è molto più grande di ciascuna singola componente $c_i^2 \sigma^2(X_i)$ originata da una variabile X_i avente distribuzione non normale

continua ...

□ nel caso delle misure mediate

- ♦ le componenti $c_i^2 \sigma^2(X_i)$ sono tutte uguali a $\frac{1}{n^2} \cdot \sigma^2(X_i)$

- ♦ l'approssimazione normale migliora al crescere di n (confermando l'ipotesi fatta nella prima formulazione del teorema centrale)

□ in generale l'approssimazione normale migliora

- ♦ a) quando le componenti $c_i^2 \sigma^2(X_i)$ sono comparabili fra loro, nessuna componente è dominante;
- ♦ b) quando le singole distribuzioni X_i sono prossime alla distribuzione normale.

continua ...

- ☐ **possiamo pensare le misure distribuite effettivamente in modo normale tutte le volte che l'incertezza tipo composta non è dominata**
 - ♦ **da una componente ottenuta da una valutazione di categoria A sulla base di poche osservazioni**
 - ♦ **da una componente ottenuta da una valutazione di categoria B basata sull'ipotesi di una distribuzione marcatamente non normale**
- ☐ **In questa casistica rientra la grande maggioranza dei casi riscontrati nella pratica comune delle misurazioni.**
- ☐ **Per tutti questi casi l'approssimazione normale è applicabile con successo nella determinazione degli intervalli di incertezza.**

Incertezza dell'incertezza e grado di confidenza

□ fissato U , gli estremi della fascia di incertezza valgono:

$$\square \begin{cases} y^+ = \hat{y} + U \\ y^- = \hat{y} - U \end{cases}$$

□ nella distribuzione normale standardizzata ho la corrispondenza:

$$\begin{cases} z^+ = \frac{\hat{y} + U - \mu}{\sigma} \\ z^- = \frac{\hat{y} - U - \mu}{\sigma} \end{cases}$$

$$\square U_z = \frac{z^+ - z^-}{2} = \frac{U}{\sigma} = \frac{k \cdot u_c(y)}{\sigma}$$

□ se $u_c(y)$ non fosse incerto U_z coinciderebbe con k

continua ...

□ applico la legge di propagazione dell'incertezza

$$\frac{u(U_z)}{U_z} = \sqrt{\left\{ \frac{u(k)}{k} \right\}^2 + \left\{ \frac{u[u_c(y)]}{u_c(y)} \right\}^2} = \sqrt{u_r^2(k) + u_r^2(u_c(y))}$$

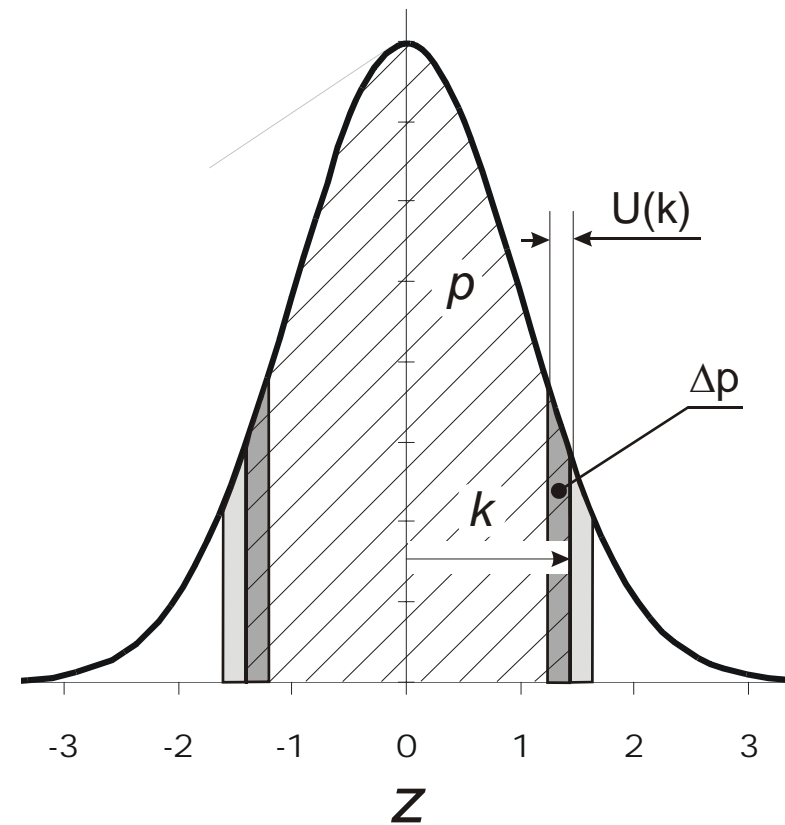
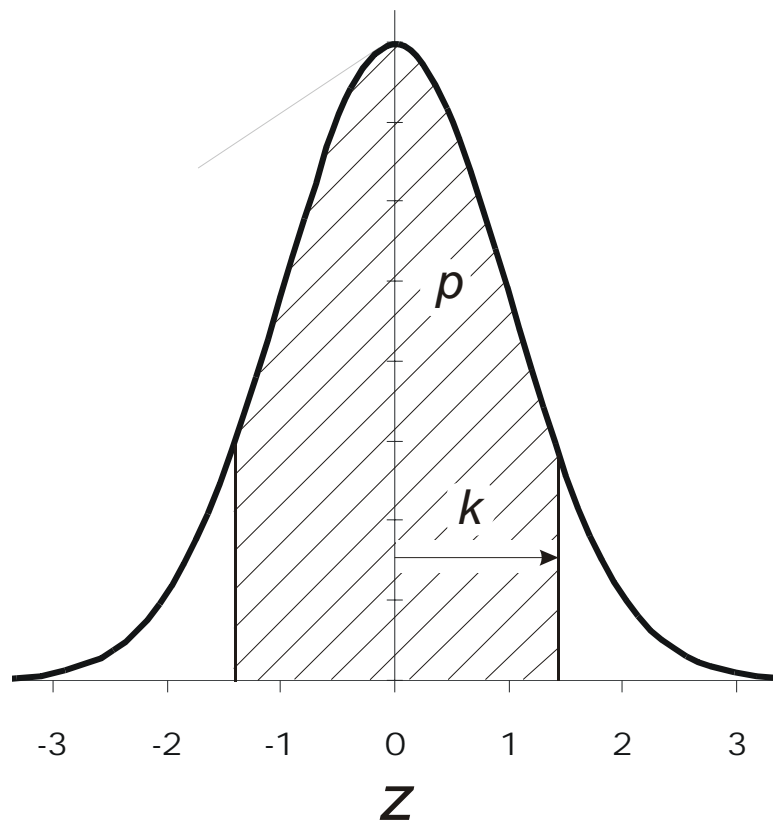
□ posso, per comodità, considerare l'effetto dell'incertezza relativa di $u_c(y)$ equivalente ad una ipotetica incertezza relativa del fattore di copertura di pari valore

□ posso scrivere $\frac{u(U_z)}{U_z} \equiv u_r(k)$

□ essendo, in questa interpretazione, $U_z = k$

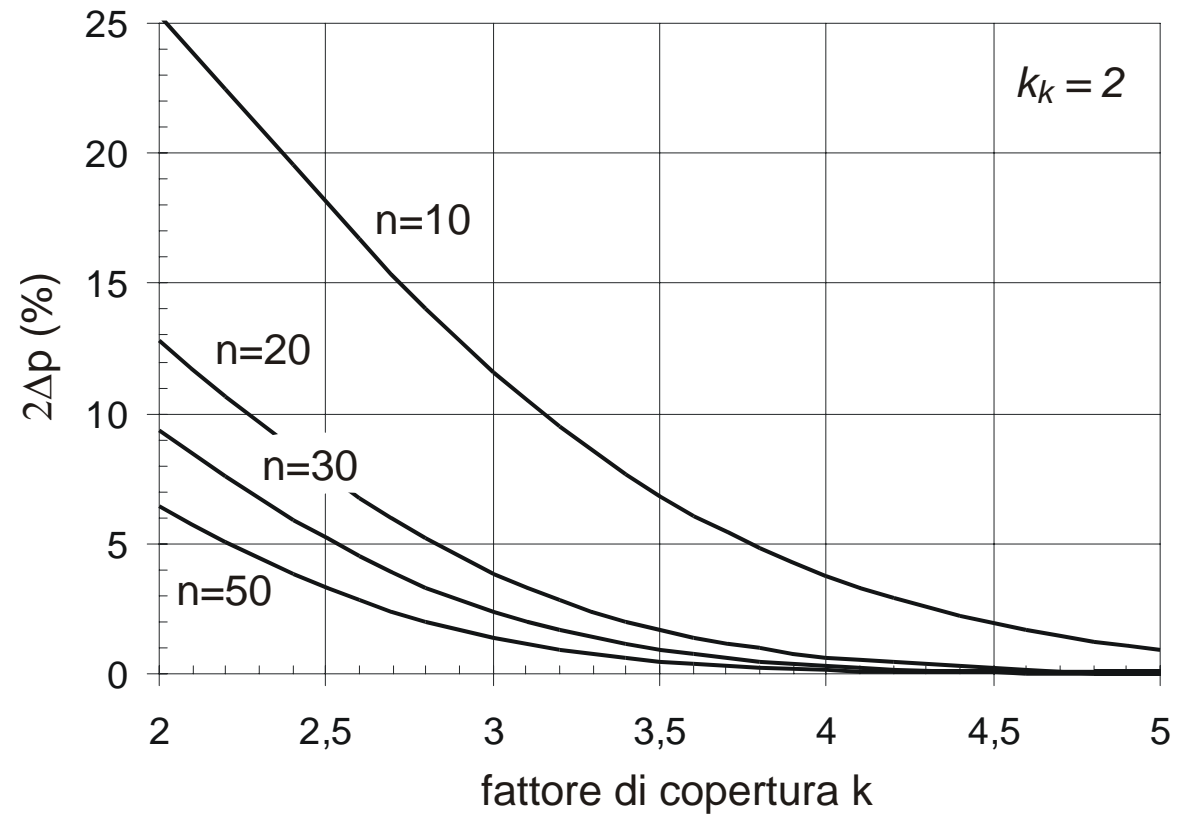
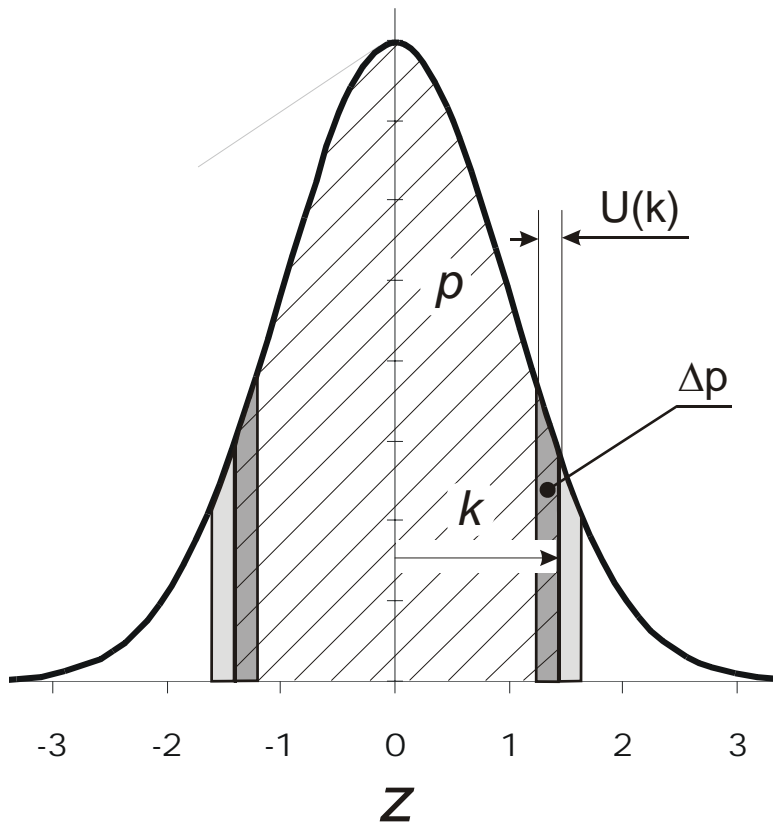
$$\Rightarrow u(U_z) \equiv u(k) = k \cdot u_r(k)$$

Effetto dell'incertezza di k



$$U(k) = k_k \cdot u(k) = k_k \cdot k \cdot u_r(k)$$

Riduzione confidenza (%)



❑ la perdita di confidenza cresce al diminuire di n e del fattore di copertura

Distribuzione t-Student

□ quando n è piccolo la fascia di variabilità (associata ad un dato grado di confidenza) determinata con la stima dell'incertezza ricavata da S_m è troppo “incerta”

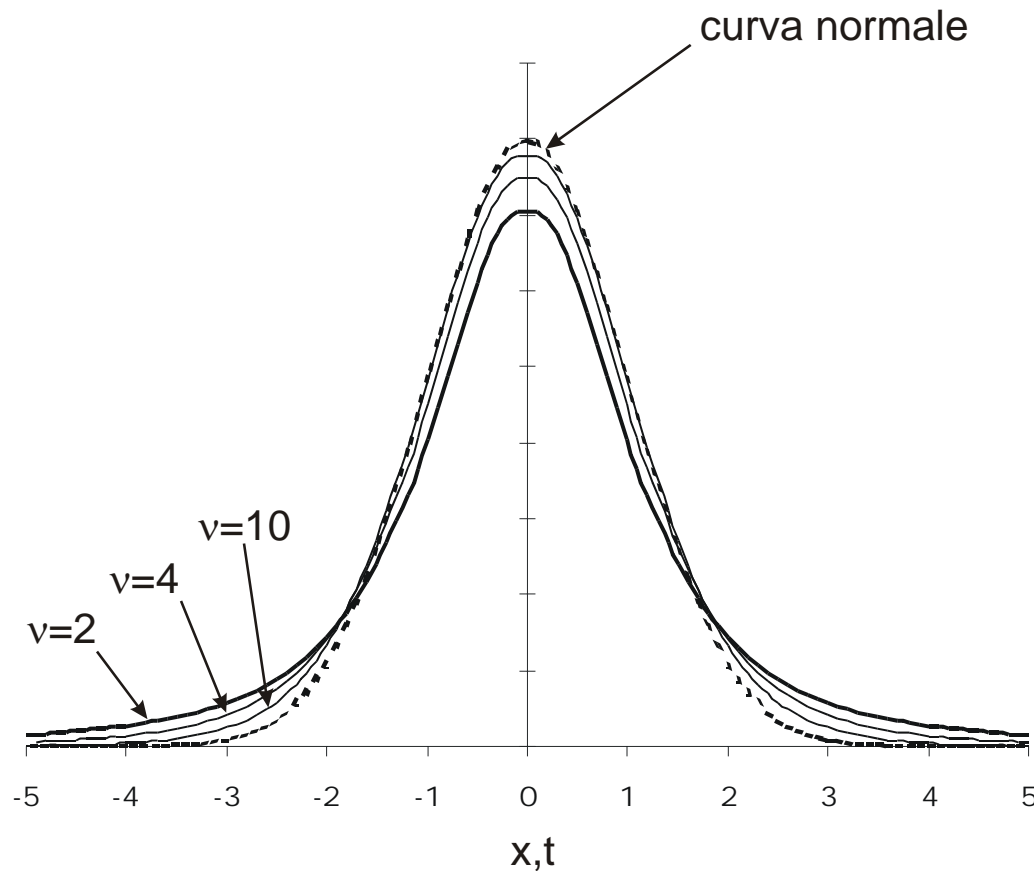
□ considero allora la variabile statistica $t = \frac{(\hat{y} - y)}{u_c(y)}$

□ se y è una *singola* variabile distribuita *normalmente* e se la stima \hat{y} è ottenuta mediando n misure, allora la variabile t è distribuita come la t-Student

□ fissata la probabilità p , la funzione permette di calcolare il valore $t_p(\nu)$ tale per cui la seguente relazione è verificata proprio con probabilità p :

$$-t_p(\nu) \leq t \leq +t_p(\nu) \quad \nu = n - 1$$

continua ...



$$\square \quad -t_p(v) \leq t \leq +t_p(v)$$

$$\square \quad -t_p(v) \leq \frac{(\hat{y} - y)}{u_c(y)} \leq +t_p(v)$$

$$\hat{y} - t_p(v) \cdot u_c(y) \leq y \leq \hat{y} + t_p(v) \cdot u_c(y)$$

$$\Rightarrow U_p = k_p \cdot u_c(y) = t_p(v) \cdot u_c(y)$$

Gradi di libertà effettivi

□ quando $u_c^2(y) = \sum u_i^2(y)$

non è vero che la variabile t segue la distribuzione t-Student

□ se consideriamo i gradi di libertà effettivi dati dalla formula di Welch-Satterthwaite, l'approssimazione t-Student torna ad essere valida

$$\nu_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^n \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}} \quad \nu_{eff} \leq \sum_{i=1}^n \nu_i$$

□ ν_i rappresenta i gradi di libertà associati alla i -esima componente di incertezza

□ se quest'ultima deriva da altre componenti, al posto di ν_i va inserito ν_{ieff} , i gradi di libertà effettivi dell' i -esima variabile.

Gradi di libertà effettivi

□ nel caso di valutazione di categoria B quanti sono i gradi libertà ?

□ se si “conosce” la varianza ipotizzata $\sigma^2[u_i(y)]$

□ possiamo dire che $\sigma^2[u_i(y)] \approx \frac{u_i^2(y)}{2\nu_{ieff}}$

□ e quindi calcolare i gradi di libertà effettivi

$$\nu_{ieff} \approx \frac{u_i^2(y)}{2\sigma^2[u_i(y)]} = \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma[u_i(y)]}{u_i(y)} \right]^{-2}$$

□ da notare che $\frac{\sigma[u_i(y)]}{u_i(y)}$ non è altro che l'incertezza relativa dell'incertezza

Determinazione di k

□ Si vuole calcolare un'incertezza estesa $U_p = k_p u_c(y)$ che individua un intervallo avente livello di fiducia p :

- ♦ 1) Si determinano \hat{y} e $u_c(y)$.
- ♦ 2) Si calcolano i gradi di libertà effettivi associati a ciascuna componente di incertezza:
 - se la componente di incertezza deriva da una valutazione di categoria A applicata alle osservazioni di una singola variabile i gradi di libertà effettivi coincidono con i gradi di libertà.
 - se la singola componente di incertezza deriva da altre componenti si usa la formula di Welch-Satterthwaite
 - se la valutazione della componente di incertezza è di categoria B si determinano i gradi di libertà effettivi associati all'incertezza relativa ipotizzata per l'incertezza

continua ...

- ♦ 3) Dalle tabelle relative alla distribuzione t-Student si ricava il fattore $t_p(\nu_{\text{eff}})$ corrispondente al livello di fiducia p desiderato.
- ♦ 4) Si pone $k_p = t_p(\nu_{\text{eff}})$.
- Le situazioni, poco frequenti, in cui le condizioni di validità del teorema del limite centrale possono non essere soddisfatte, vanno trattate caso per caso con una valutazione analitica (eventualmente approssimata) che tenga conto delle reali distribuzioni di probabilità.

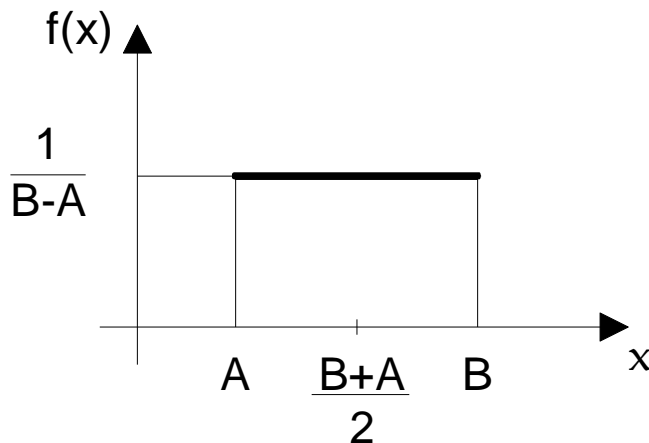
Arrotondamento del risultato

□ Es: arrotondare il numero 10,387 alla seconda cifra decimale significa:

- ♦ a) affermare che il numero 10,390 è un valore plausibile per la grandezza misurata
- ♦ b) ammettere che la misura cade nell'intervallo

$$10,385 \leq x < 10,395$$

- ♦ c) ammettere che il valore “vero” appartiene ad una distribuzione rettangolare:

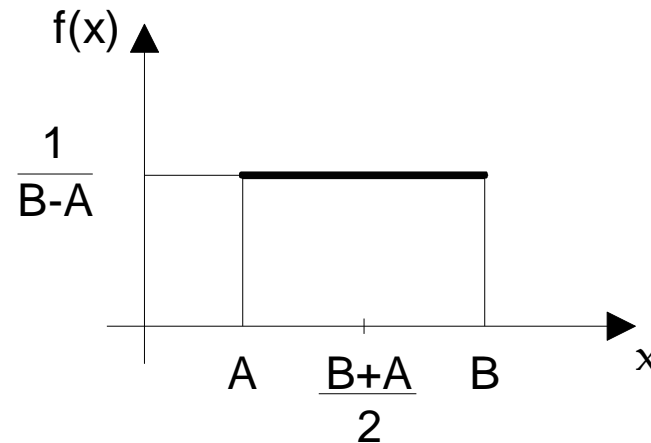


$$A=10,385$$

$$B=10,395$$

$$x=(A+B)/2$$

Distribuzione rettangolare



$$\sigma^2 = \int_A^B \left(x - \frac{A+B}{2} \right)^2 \frac{1}{B-A} dx = \frac{1}{B-A} \frac{1}{3} \left[\left(B - \frac{A+B}{2} \right)^3 - \left(A - \frac{A+B}{2} \right)^3 \right]$$

$$\sigma^2 = \frac{(B-A)^2}{12}$$

$$\sigma = \frac{B-A}{\sqrt{12}}$$

Esempio

$$x=10,387$$

$$A=10,385 \quad \Rightarrow \quad 10,39$$

$$B=10,395$$

$$\Rightarrow \quad \sigma = \frac{B - A}{\sqrt{12}} = \frac{10,395 - 10,385}{\sqrt{12}} = 0.0028867513$$