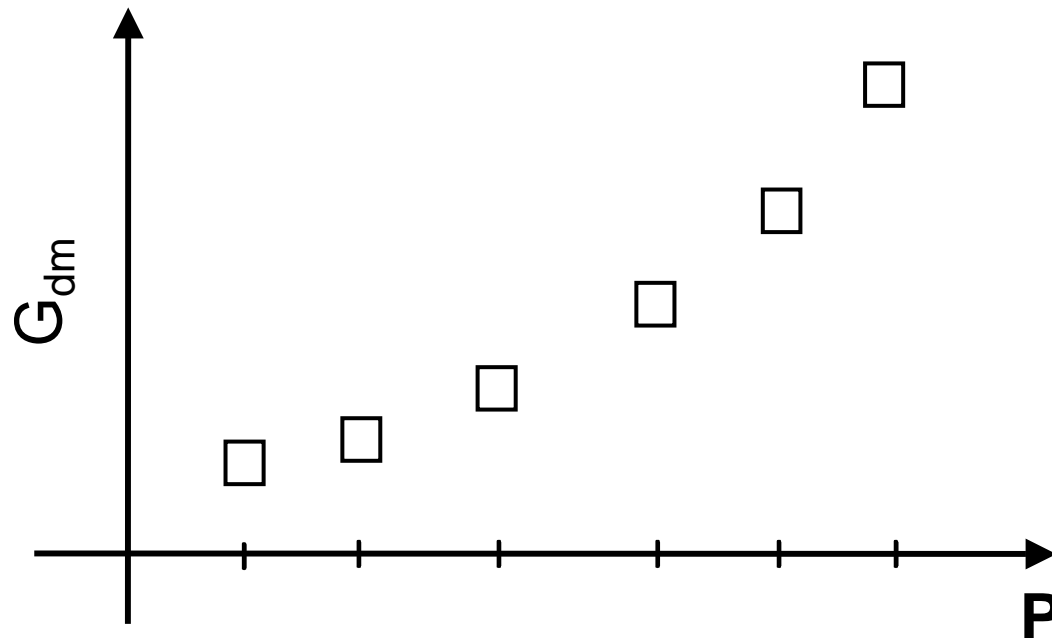
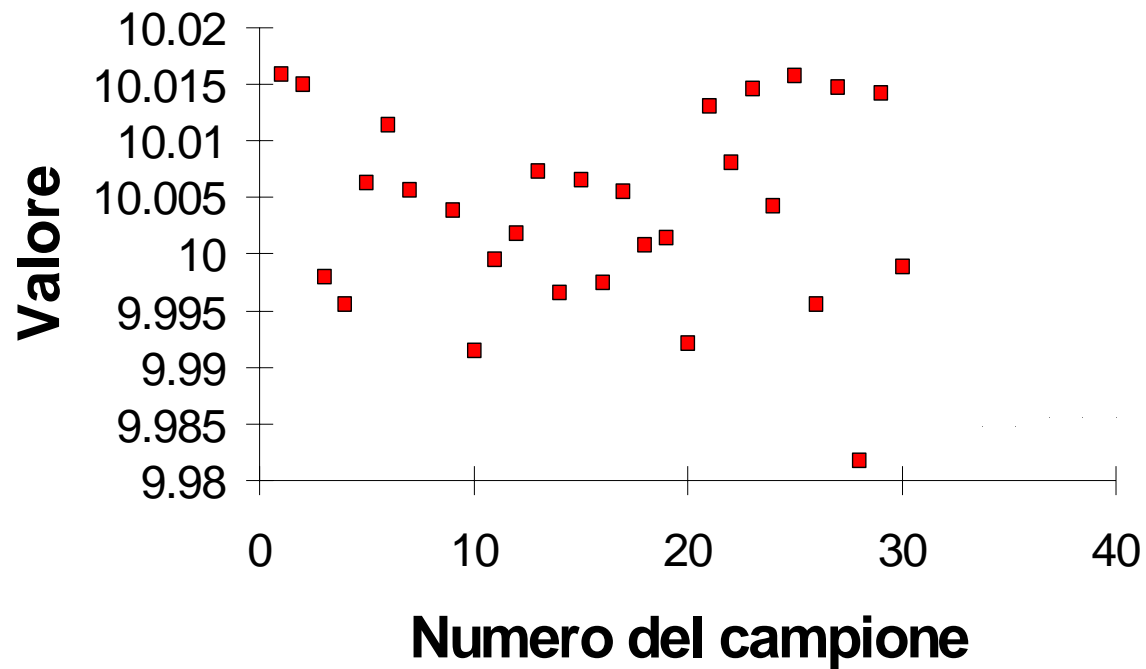


# La misura come una relazione

- ❑ in genere, una proprietà  $P$  viene misurata indirettamente osservando una grandezza (direttamente) misurabile  $G_{dm}$
- ❑ la relazione tra  $G_{dm}$  e  $P$  deve essere di tipo monotono



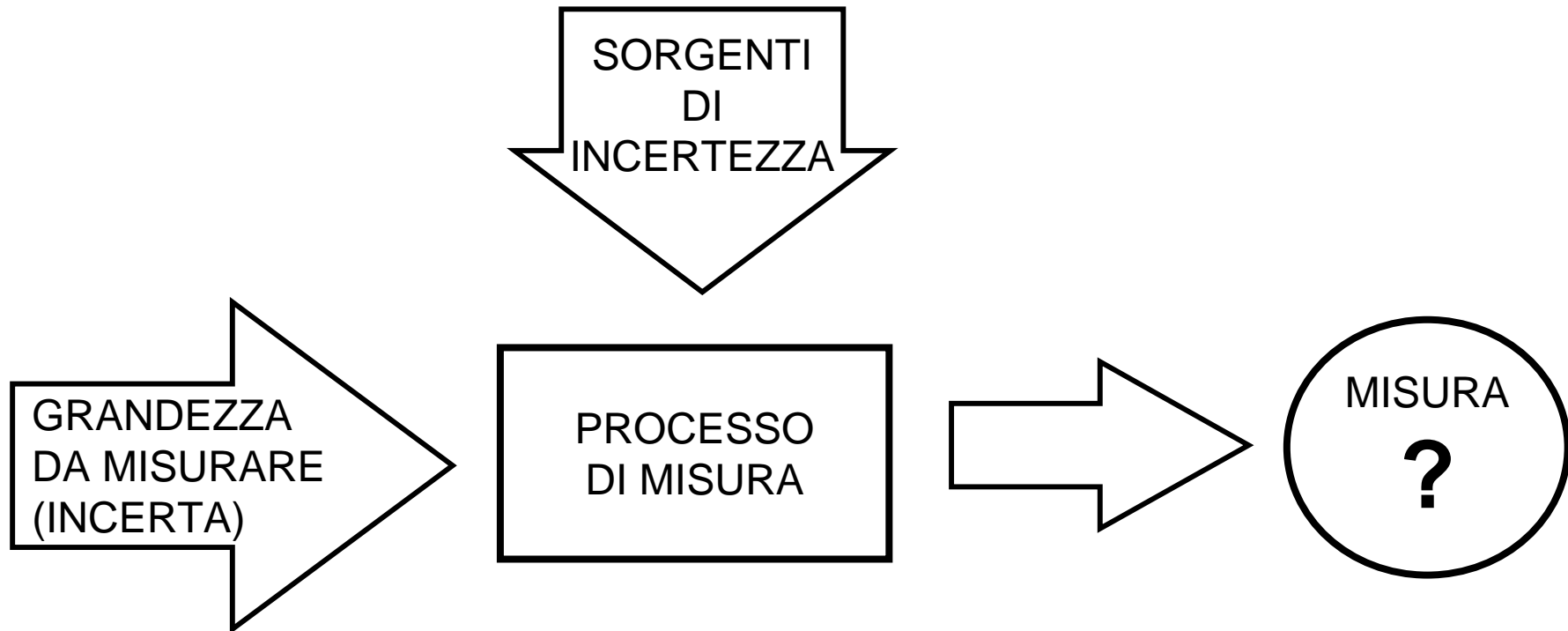
# Misure ripetute



# Sorgenti di incertezza

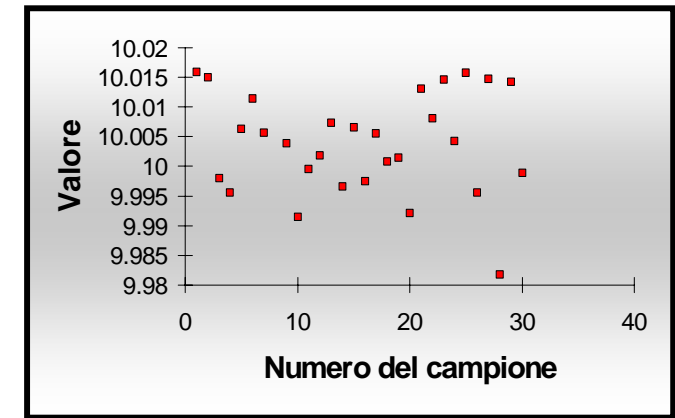
- ❑ **errori grossolani (non sono ripetitivi)**
  - ♦ **letture errate**
  - ♦ **errori di trascrizione**
  - ♦ **errori di applicazione della procedura di misura, ecc.**
  
- ❑ **cause sistematiche (natura ripetitiva)**
  - ♦ **errata taratura degli strumenti**
  - ♦ **non perfetto funzionamento degli strumenti**
  - ♦ **influenza dell'ambiente**
  
- ❑ **variazioni casuali di parametri che influenzano la misura**
  - ♦ **sono imputabili a tutto quanto non è prevedibile**
  
- ❑ **(incertezza intrinseca del misurando)**

# Misurazione: quale risultato ?



**“fissata” la grandezza da misurare ed il processo di misura, ripetendo la misura infinite volte si ottiene una popolazione (in senso statistico) di misure possibili**

# Manipolazione delle misure



❑ valore medio del campione

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} = \frac{\sum_i x_i}{N}$$

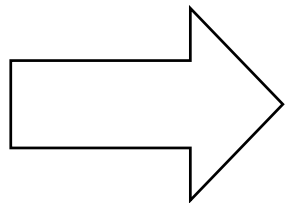
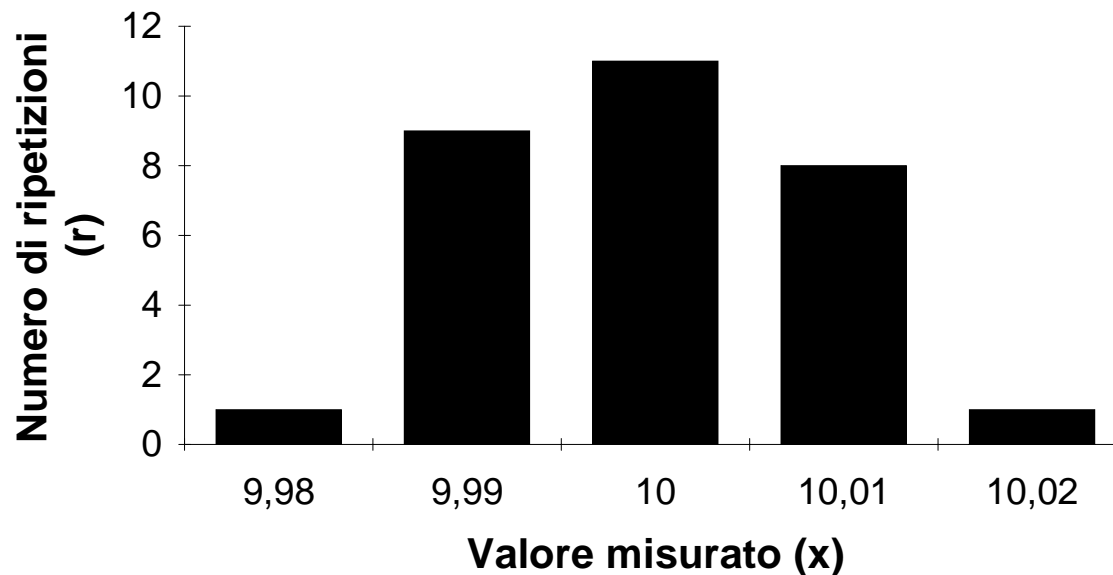
❑ varianza del campione

$$S^2 = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{N - 1} = \frac{\sum_i d_i^2}{N - 1}$$

❑ deviazione standard  
o scarto quadratico  
medio del campione

$$S = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}} = \sqrt{\sum_i \frac{d_i^2}{N - 1}}$$

# Distribuzioni discrete: istogramma della numero di ripetizioni



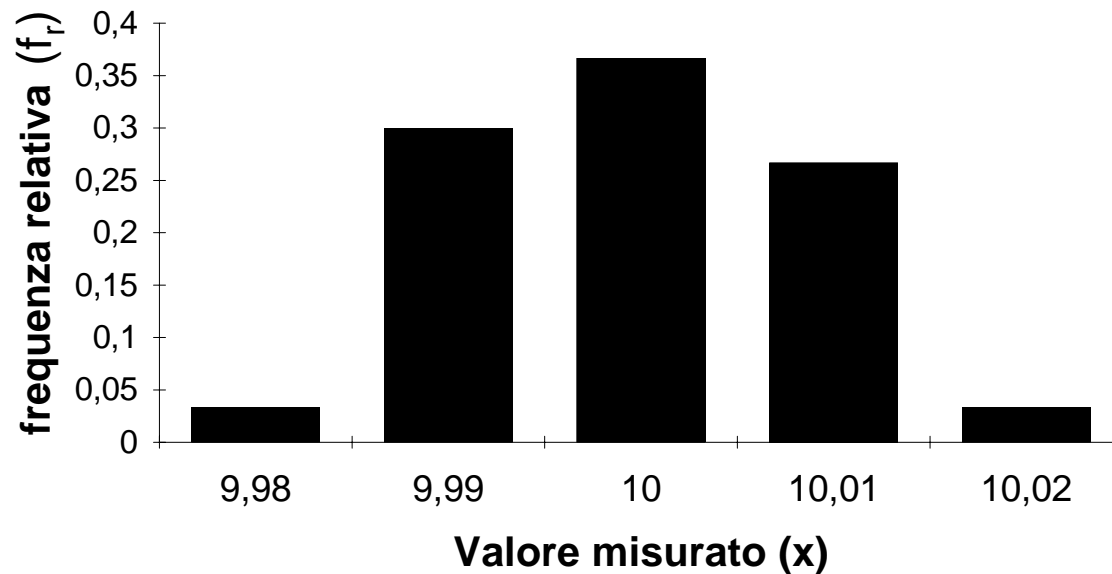
Per rappresentare tutta la popolazione delle misure possibili, N deve tendere ad infinito: il numero di ripetizioni di ciascun valore cresce a dismisura

# Distribuzioni discrete: istogramma della frequenza di ripetizione relativa

*frequenza di ripetizione*

$$f_r = \frac{r}{N}$$

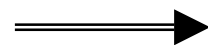
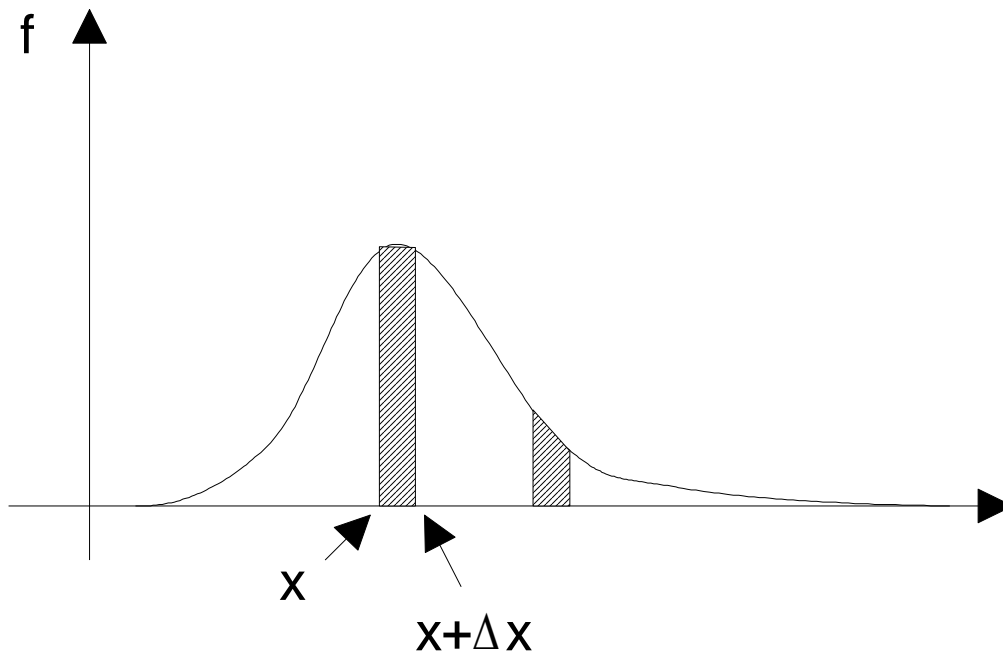
$$f_{r\%} = \frac{r}{N} \cdot 100$$



**N.B. Per una qualsiasi distribuzione la somma delle frequenze relative vale sempre 1**

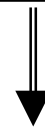
# Distribuzioni continue

- ❑ se i valori della popolazione delle misure sono distribuiti in modo continuo, la frequenza di ripetizione del singolo valore tende a zero
- ❑ si introduce il concetto di densità di frequenza  $f$



**l'area sottesa alla curva vale 1**

frequenza relativa dei  
valori compresi fra  $x$  e  
 $x + \Delta x$



$$f = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f_r(x; x + \Delta x)}{\Delta x}$$



# Media di un campione di misure

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} = \frac{\sum_i x_i}{N}$$

se il valore  $x_i$  si ripete  $r_i$  volte, la media può essere espressa come:

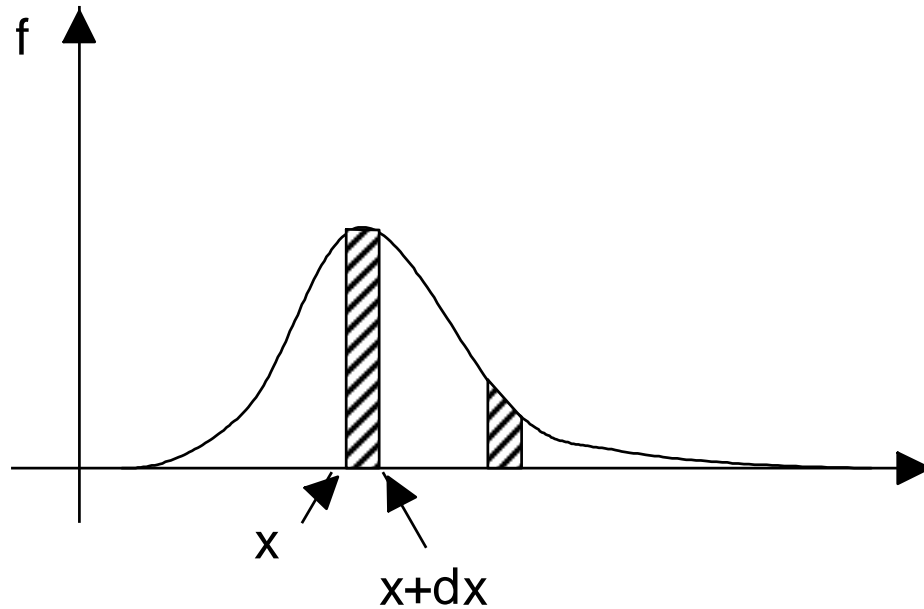
$$\bar{x} = \frac{r_1 x_1 + r_2 x_2 + \dots + r_k x_k}{r_1 + r_2 + \dots + r_k} = \frac{\sum r_i x_i}{\sum r_i}$$

il valor medio di un campione di misure coincide con la media pesata dei singoli valori. Il peso per ciascun valore coincide con il numero di ripetizioni associate al valore stesso

$$\bar{x} = \sum \left( \frac{r_i}{\sum r_i} \right) x_i = \sum f_{ri} x_i$$

il valor medio di un campione di misure può essere calcolato come la somma del valore di ciascuna misura moltiplicato per la corrispondente frequenza di ripetizione

# Valore atteso (valore medio) della popolazione



la frequenza di ripetizione dei valori compresi tra  $x$  e  $x+dx$  vale:

$$f(x)dx$$

la media si ottiene come:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$$

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx \quad \text{è detto valore atteso (valore medio) della popolazione}$$

per una popolazione discreta

$$\mu = \sum \left( \frac{r_i}{\sum r_i} \right) x_i$$

la sommatoria deve essere estesa a tutte le possibili misure

# Varianza di un campione di misure

se il valore  $x_i$  si ripete  $n_i$  volte, posto lo scarto  $d_i = x_i - \bar{x}$

la varianza può essere espressa come:

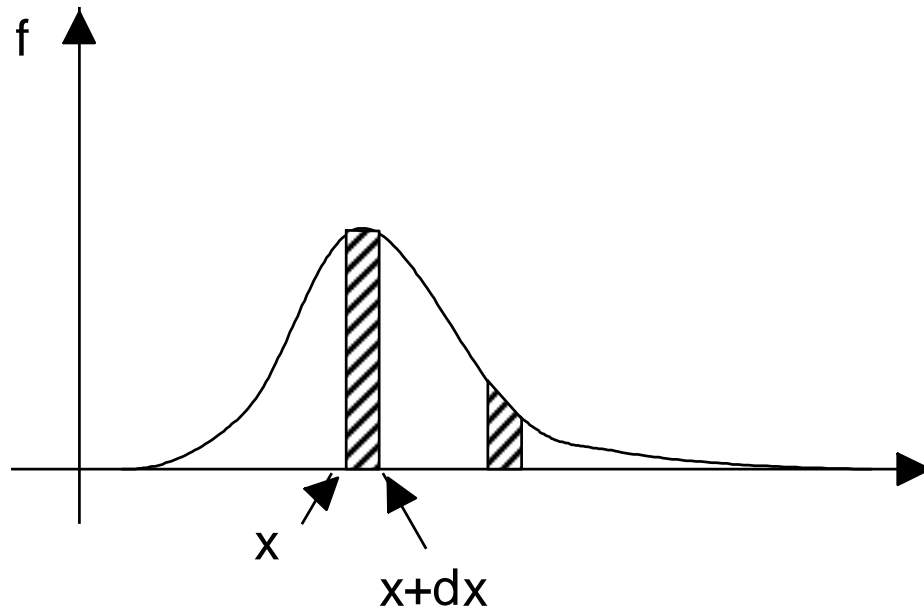
$$S^2 = \frac{r_1 d_1^2 + \dots + r_k d_k^2}{r_1 + \dots + r_k - 1} = \frac{\sum_{i=1}^k r_i d_i^2}{\sum_{i=1}^k r_i - 1} \approx \frac{\sum_{i=1}^k r_i d_i^2}{\sum_{i=1}^k r_i}$$

la varianza di un campione di misure coincide con la media pesata dei quadrati degli scarti dei singoli valori. Il peso per ciascun scarto coincide con il numero di ripetizioni associate al valore misurato

$$S^2 = \sum \left( \frac{r_i}{\sum r_i} \right) d_i^2 = \sum f_{r_i} d_i^2$$

la varianza di un campione di misure può essere calcolata come la somma del quadrato dello scarto di ciascuna misura moltiplicato per la corrispondente frequenza di ripetizione

# Varianza della popolazione



la frequenza di ripetizione dei valori compresi tra  $x$  e  $x+dx$  vale:

$$f(x) dx$$

la varianza si ottiene come:

$$\int (x - \mu)^2 f(x) dx$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \quad \text{varianza della popolazione}$$

per una popolazione discreta  $\sigma^2 = \sum \left( \frac{r_i}{\sum r_i} \right) d_i^2 = \sum f_{r_i} \cdot d_i^2$

la sommatoria deve essere estesa a tutte le possibili misure

# In sintesi

□ fissato un processo di misura ed un valore della grandezza da misurare:

- ♦ ripetendo la misura per un numero finito di volte si ottiene un campione statistico della popolazione dei valori associati alla grandezza. La popolazione prende il nome di popolazione delle misure possibili.
- ♦ una misura del valore centrale del campione è data dalla media  $\bar{x}$
- ♦ una misura della dispersione del campione è data dalla varianza  $S^2$
- ♦ una misura del valore centrale della popolazione è data dalla media  $\mu$
- ♦ una misura della dispersione della popolazione è data dalla varianza  $\sigma^2$

## **continua ...**

- $\mu$  e  $\sigma$  sono costanti caratteristiche della popolazione delle misure possibili e sono incognite**
- $\bar{x}$  e  $S$  variano da un campione all'altro, sono facilmente calcolabili**
- $\bar{x}$  e  $S$  possono essere considerati una stima di  $\mu$  e  $\sigma$  rispettivamente. Al crescere della dimensione  $N$  del campione, la stima diventa sempre più attendibile**