Umberto Minoni

Misure Elettroniche

Appunti – parte prima -

Annotazioni:

- parte 01
- versione corrente: bozza marzo 2006
- inviare commenti e suggerimenti a:

umberto.minoni@ing.unibs.it

INDICE

Capitolo 1
La misura

Introduzione alla misurazione

Nella vita di tutti i giorni, spesso senza che ce ne rendiamo conto, ci imbattiamo continuamente in attività di **misurazione**: quando facciamo la spesa e chiediamo al fornaio 6 ettogrammi di pane, quando controlliamo la temperatura della stanza in cui ci troviamo, quando leggiamo il tachimetro della nostra vettura per verificare di non superare i limiti di velocità imposti dal codice della strada o semplicemente quando guardiamo il nostro orologio per sapere che ora è.

a)  b)  c) 

Figura 1. Esempi di apparati per la misurazione. a) amperometro per misure di corrente elettrica, b) bilance elettroniche per misure di massa, c) strumenti elettronici per misure di velocità.

Attraverso la misurazione quantifichiamo le proprietà degli oggetti o degli eventi del mondo reale in cui siamo immersi. La misurazione implica sempre una attività sperimentale che porta come risultato un valore numerico che rappresenta la *misura* della grandezza di nostro interesse.

Numerose sono le motivazioni che ci spingono ad eseguire misure; esse possono essere schematicamente ricondotte alle seguenti voci principali:

- Necessità di *descrivere oggettivamente* un oggetto, un ambiente, un processo o un’operazione. La descrizione oggettiva costituisce la base necessaria su cui costruire qualsiasi modello descrittivo di ciò che ci circonda. La misurazione ci consente di superare le difficoltà legate a descrizioni di tipo approssimativo che fanno uso di termini spesso vaghi quali grande, piccolo, stretto largo, pesante etc. L’affermazione "la temperatura di questa stanza è di 20 °C" descrive in modo chiaro ed univoco lo stato della temperatura della stanza.

- *Ragioni commerciali ed economiche.* La descrizione oggettiva delle quantità e della qualità delle merci o dei servizi soggetto di operazioni commerciali riduce notevolmente la possibilità di controversie facilitando l’interscambio fra persone, aziende e nazioni.

- *Ricerca e convalida di leggi naturali.* Il metodo scientifico si fonda sul concetto di misurazione: dall’osservazione, e quindi dalla misurazione, si ipotizza una legge che viene sottoposta a verifica sperimentalmente, che si basa su ulteriori misurazioni.

- *Controllo di un ambiente, di un processo o di un’operazione*. Si supponga di voler mantenere costante la velocità con cui un treno viaggia lungo un percorso ferroviario. Agendo sulla potenza erogata dal motore possiamo fare in modo che la differenza tra la velocità attuale del convoglio e la velocità desiderata sia minima. E' necessario disporre di un misuratore che fornisca in modo continuo il valore della velocità istantanea. In generale, per applicare le tecniche di retroazione è indispensabile misurare le grandezze da controllare.

  Nel caso di un sistema produttivo, inoltre, la misurazione di grandezze relative ad alcuni parametri di controllo permette di monitorare la qualità del processo stesso e quindi la qualità dei prodotti.

Significato di misurazione

Misurare è sinonimo di quantificare, in altre parole attribuire ad una proprietà dei numeri. Il risultato della misurazione (scalare) è, in prima approssimazione[1], un numero reale. Se per due oggetti distinti una proprietà si manifesta in modo indistinguibile, il numero che descrive questa proprietà sarà lo stesso per entrambi gli oggetti[2]. La misurazione implica una comparazione tra manifestazioni diverse di una stessa proprietà. Prendiamo ad esempio in considerazione la proprietà massa che caratterizza tutti gli oggetti del mondo reale. Diciamo che la misura della massa di due oggetti distinti è la stessa se i due oggetti presentano manifestazioni identiche della loro proprietà massa. Se per esempio i due oggetti sono sottoposti alla medesima forza vediamo che subiscono un'identica accelerazione.
Un processo di misurazione può essere definito tale se e solo se il risultato della quantificazione, cioè il numero assegnato alla proprietà, è indipendente, *nei limiti posti dall'incertezza di misura*, da chi esegue la misura (il *misurista*).
La **misura** è, per definizione, il risultato di un'attività sperimentale che mette in confronto le diverse manifestazioni di una stessa proprietà. Riferendoci alle misure non ha significato parlare di misura teorica, semmai si può definire un valore previsto per via teorica. La misura va sempre determinata sperimentalmente.

Proprietà di una misura

Una misura costituisce una *descrizione obiettiva* (non soggettiva) di una proprietà. Alcune proprietà quantificabili oggettivamente sono la massa, l'intervallo di tempo, la tensione elettrica, la temperatura, la durezza di un materiale ecc. Se di una proprietà si riesce a dare una descrizione oggettiva, questa proprietà è **misurabile**.
Alcune proprietà, per loro natura, non sono quantificabili in modo oggettivo, tra queste possiamo citare la bellezza, la bontà, la generosità, la preparazione di uno studente. E' evidente che nell'eventuale tentativo di quantificare queste proprietà la componente soggettiva (il punto di vista del misurista) non potrebbe essere eliminata.
Alcune proprietà non possono essere misurate semplicemente perché non è possibile procedere in modo operativo. Si voglia ad esempio misurare il numero esatto di studenti che in un certo istante in Italia sono impegnati nello studio. E' possibile solo dare una stima in termini statistici di tale numero perché operativamente l'esperimento che dovrebbe portare al conteggio non è praticabile.
La misura rappresenta una proprietà in *modo sintetico*. Senza ricorrere al concetto di misura è assai laborioso descrivere ciò che ci circonda, le misure invece ci consentono di descrivere un evento o un ambiente mediante numeri che sappiamo trattare con notevole dimestichezza. Gli strumenti matematici che normalmente utilizziamo con i numeri diventano efficaci strumenti di manipolazione delle misure.

Esecuzione di una misurazione

L'assegnazione di una misura ad una grandezza implica il confronto tra la manifestazione incognita di una certa proprietà con una manifestazione nota della stessa proprietà. Utilizzando gli operatori di confronto (=, >, <) è possibile quantificare la grandezza in modo relativo rispetto alla grandezza di riferimento. Dire che un sacchetto di arance ha una massa di 2

[1] Un solo numero non basta perché, come mostrato in seguito, è necessario accompagnare la misura con la stima della sua incertezza.
[2] Fissata l'unità di misura.

Kg è equivalente all'espressione: il sacchetto di arance presenta una proprietà massa il cui effetto è doppio rispetto alla massa di riferimento di un Kg. Nasce evidente l'esigenza di definire, in modo indipendente, le manifestazioni di riferimento per ciascuna grandezza misurabile. Va definita, per ciascuna grandezza, l'**unità di misura**. Il risultato numerico della misurazione ha significato solo se accompagnato dalla dichiarazione dell'unità di misura di riferimento.
Per eseguire una misurazione si ricorre all'uso degli **strumenti di misura**. Questi sono dispositivi che facilitano il processo di confronto e la presentazione del risultato. Senza gli strumenti di misura, la misurazione non potrebbe essere un'attività così diffusa come richiesto dalle motivazioni che abbiamo analizzato sopra. La complessità (o semplicità) di uno strumento di misura dipende, innanzi tutto, dalla natura del misurando ed in secondo luogo dalla precisione con cui si vuole quantificare la grandezza. Precisioni più spinte richiedono strumenti più complessi.
Misurare costa: poco per sistemi semplici e molto per sistemi complessi. I costi nascono da numerose componenti: gli strumenti di misura, i tempi necessari per eseguire le misurazioni, la documentazione delle misurazioni stesse etc. In Italia, si stima che il costo delle misurazioni, delle analisi e affini sia pari a circa il 10% del PIL [2]. Anche la mancata esecuzione delle misurazioni può presentare un costo molto elevato. Si pensi ad esempio al danno economico che potrebbe derivare dalla mancata misurazione di una grandezza vitale per la funzionalità di un prodotto nel caso in cui tale grandezza risultasse (in opera) fuori tolleranza.

Grandezze direttamente misurabili

Si dice che una grandezza è **direttamente misurabile** se per essa è possibile definire e realizzare fisicamente l'operazione di *somma*. In questo caso, fissato un campione di riferimento (unità di misura), sarà possibile realizzare la misurazione sommando tra loro tante repliche del campione quante ne sono necessarie per uguagliare l'effetto della grandezza incognita. Il numero di campioni di riferimento usati è la misura della grandezza incognita. In altri termini, ricordando il significato dell'operazione di divisione, possiamo definire la misura come il rapporto tra la grandezza incognita e la grandezza campione.
Sono esempi di grandezze direttamente misurabili la massa, la lunghezza, la carica elettrica, la tensione elettrica etc. Per la grandezza direttamente misurabile, è evidente che la misura della grandezza somma (fisica) coincide con la somma (matematica) delle misure.

Grandezze classificabili

Per alcune grandezze non è possibile eseguire l'operazione di somma, tuttavia è possibile applicare uguaglianze e disuguaglianze, in questi casi non ha senso definire la misura come un rapporto rispetto alla grandezza di riferimento. Esempio di grandezza **classificabile** è la temperatura. In questo caso, dalla definizione stessa di temperatura, non possiamo certo affermare che se due oggetti hanno entrambi la temperatura di *t*, messi insieme raggiungano la temperatura di *2t*. E' peraltro possibile affermare che due oggetti distinti hanno la stessa temperatura o che un oggetto presenta una temperatura inferiore/superiore rispetto all'altro.
Per le grandezze classificabili si definiscono delle scale convenzionali, la misura è il risultato della comparazione della grandezza con i vari elementi della scala. Il numero risultante è un indice nella scala convenzionale. Esempi di grandezze classificabili sono la durezza ed il colore.

Grandezze misurabili indirettamente

Numerose grandezze sono legate ad altre attraverso una legge fisica o dalla loro stessa definizione. Prendiamo ad esempio la grandezza velocità. Essa è definita come il rapporto fra la porzione di spazio percorso (distanza) e l'intervallo di tempo impiegato a percorrerlo. La sua definizione si appoggia sulle grandezze misurabili lunghezza e intervallo di tempo.
Per le grandezze misurabili indirettamente esiste sempre una relazione matematica che le lega ad altre grandezze. La misura passa attraverso l'elaborazione delle misure delle grandezze da cui dipende la loro definizione.

La misura come un processo

Una misurazione può essere vista come l'attivazione di un **processo di misura** secondo lo schema riportato in tabella che evidenzia il parallelo con il processo produttivo.

Processo produttivo	$\Rightarrow$	**Processo di misura**
Prodotto		Misura
Strumenti di produzione		Strumenti di misura
Materie prime		Oggetti o eventi da misurare
Controllo di qualità del prodotto		Controllo di qualità della misura

Lo scopo per il quale il processo viene attivato è la misurazione e i mezzi utilizzati sono gli strumenti di misura che accettano in ingresso le grandezze da misurare.

Per un processo produttivo si dà per scontata la presenza di un controllo di qualità, così dovrebbe essere anche per un processo di misura. Nella realtà industriale a volte, tuttavia, si assume che il processo di misura non debba essere sottoposto a controllo di qualità in quanto lo si ritiene, sbagliando, immune da derive. Al contrario, il processo di misura nel corso della sua attività può deviare rispetto ai parametri di progetto. E' importante monitorare queste derive in modo da apportare le necessarie correzioni per tempo.

Il controllo di qualità di un processo produttivo si basa sulla misurazione di grandezze di controllo, è pertanto evidente che una non buona qualità delle misurazioni comporta un'altrettanta cattiva qualità dei prodotti.

La misura come una relazione

La misura di una proprietà P è ottenuta raramente con il confronto diretto tra il misurando ed il campione di riferimento. Più spesso ci si appoggia ad una grandezza direttamente misurabile G_{dm} dalla quale è possibile risalire al valore della misura della proprietà P per via indiretta. Ad esempio, quando utilizziamo un amperometro ad indice, la grandezza che misuriamo direttamente è una grandezza geometrica, ossia la posizione dell'indice su una scala graduata. Il passaggio alla misura di corrente presuppone una relazio-

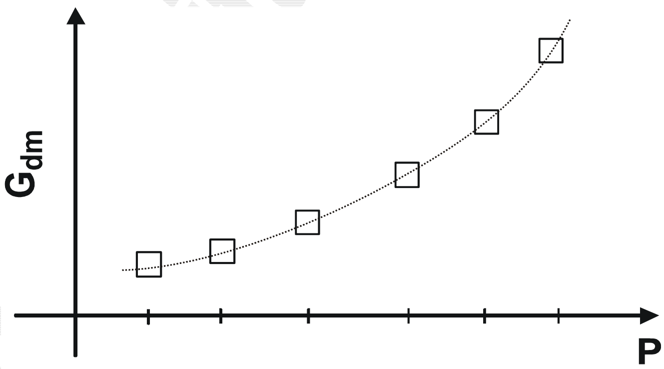

Figura 2. Relazione di taratura. I riquadri rappresentano i punti sperimentali, la linea tratteggiata è una curva approssimante.

ne nota tra la posizione dell'indice ed il valore della corrente in ingresso all'amperometro.
Fissato il processo di misura, la relazione tra P e G_{dm} prende il nome di **relazione di taratura**. La relazione di taratura di un processo di misura è ricavata sperimentalmente. Si applica il processo di misura a dei misurandi noti e si registrano i valori corrispondenti della grandezza G_{dm}. Un esempio è riportato in Figura 2. Della relazione di taratura, in genere, si conoscono solo alcuni punti ricavati sperimentalmente. E' comodo derivare da tali punti una espressione analitica di una curva continua che approssima i dati disponibili. L'approssimazione è solitamente calcolata col metodo dei minimi quadrati [1]. Nota la relazione di taratura o in alternativa una sua buona approssimazione, è possibile passare dalla grandezza direttamente misurata al valore da assegnare al misurando.
Se P deve determinare G_{dm} allora la relazione tra la grandezza G_{dm} e la proprietà misurata P deve essere di tipo monotono. Non possiamo accettare che esistano due valori diversi di P corrispondenti ad un unico valore di G_{dm}. In questo caso la misura risulterebbe indeterminata.
L'operazione di determinazione sperimentale della relazione di taratura prende il nome di *taratura del processo di misura*.

Capitolo 2
Le misure ripetute

Misure ripetute

L'esperienza mostra che ripetendo una misurazione per più di una volta, seppur operando nominalmente nelle stesse condizioni sperimentali e con lo stesso misurando, si ottengono valori diversi l'uno dall'altro. Un esempio è riportato in figura 3: i valori attribuiti al misurando nelle diverse ripetizioni della misurazione sono soggetti a variabilità.
Il fenomeno è effettivamente visibile solo se la **risoluzione** del processo di misura è sufficiente ad evidenziarlo. Se, ad esempio, ripetessimo la misurazione della tensione fornita da una batteria con un voltmetro la cui risoluzione è dell'ordine del centinaio di millivolt otterremmo sempre lo stesso valore. Aumentando però la risoluzione della misura fino al decimo di microvolt, osserveremmo una significativa variabilità delle misure.

Sorgenti di incertezza

Il fatto che ripetendo le misurazioni si ottengano misure diverse costituisce un fattore di incertezza: quale dei diversi valori ottenuti corrisponde al vero valore da assegnare al misurando? Si può tentare di analizzare quali siano le cause che introducono variabilità, e quindi incertezza, in una generica misurazione. A tal fine ipotizziamo che, per il misurando, esista un **valore vero**[3] che indichiamo con y e definiamo **errore,** indicato con e, lo scarto tra il valore misurato $\tilde{x}$ ed il valore vero:

$$e = \tilde{x} - x \qquad (1)$$

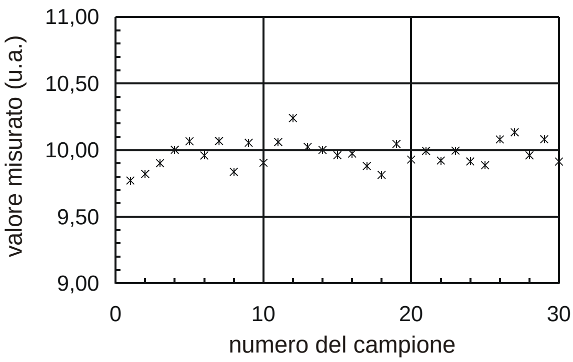

Figura 3. Esempio di misure ripetute.

Le cause di variabilità della misura possono genericamente essere classificate nel seguente modo:

a) presenza di errori grossolani: le cause di errore sono facilmente individuabili e, di norma, gli errori grossolani hanno natura non ripetitiva. Alcune cause comuni d'errore grossolano sono:

- *letture errate*: possono essere dovute a disattenzione del misurista così come ad una misurazione eseguita in condizioni ambientali non adatte;
- *errori di trascrizione*: sia manuale che informatica;
- *errori di applicazione* della procedura di misura: non è stato consultato il manuale operatore dello strumento di misura, non si sono seguite le istruzioni indicate;

b) presenza di errori sistematici: evitati gli errori grossolani è possibile che le misurazioni siano sistematicamente errate. Questi errori hanno natura ripetitiva e, nel caso in cui ne siano state individuate le cause, generalmente possono essere corretti. Tra le cause troviamo:

- *errata taratura* degli strumenti: si deve procedere con una nuova determinazione della relazione di taratura;
- *non perfetto funzionamento* degli strumenti: dalla banale situazione in cui le pile di alimentazione sono scariche alle situazioni di più difficile diagnosi legate a guasti o malfunzionamenti;

[3] In realtà non esiste un solo valore vero, vedi il capitolo "**Definizione operativa (misurazione) di valore vero**".

- *influenza dell'ambiente*: essendo la misurazione eseguita attuando un esperimento in un ambiente del mondo reale, numerose sono le variabili ambientali che possono influenzare i risultati della misura. Tra le altre si possono citare la temperatura, l'umidità, la presenza di radiazioni etc. Se del sistema di misura si dispone di un buon modello, è possibile compensare (apportare una correzione) questi errori misurando le variabili di influenza. Essendo la misura della variabile di influenza essa stessa incerta la compensazione non potrà mai azzerare completamente l'errore.

c) variazioni casuali di parametri che influenzano la misura: sono imputabili a tutto quanto non è prevedibile. Un esempio tipico di sorgente di variazioni casuali della misura è il rumore elettronico presente in una **catena di elaborazione del segnale**. I componenti elettronici utilizzati includono delle sorgenti di disturbo. Il rumore nasce dalle fluttuazioni statistiche del numero dei portatori di carica elettrica che determinano il funzionamento dei componenti stessi.

d) incertezza intrinseca del misurando: il misurando è sempre definito in modo incerto. Quando decidiamo di misurare una grandezza, anche se a volte in maniera inconsapevole, abbiamo in mente la grandezza riferita ad un ben preciso modello che descrive la realtà. Il modello che utilizziamo deve essere adatto per lo scopo per cui è nata l'esigenza di misura. L'incertezza con cui risulta intrinsecamente definito il misurando dipende dalla raffinatezza del modello usato.

Misurazione: quale risultato ?

Alla luce delle osservazioni finora effettuate, appare evidente che un solo numero accompagnato dall'unità di misura non è più sufficiente per rappresentare la misura. Dovremo almeno fornire un'informazione aggiuntiva che renda conto della variabilità delle misure ripetute. In caso contrario con quale criterio potremmo scegliere uno dei valori ottenuti dalla misurazione ed affermare che proprio tale valore è il risultato della misurazione?

E' lecito ipotizzare che, fissati sia il misurando sia il processo di misura, se si potesse ripetere infinite volte la misurazione nelle stesse condizioni sperimentali si otterrebbe una popolazione (in senso statistico) di misure possibili. L'aggettivo possibili significa ottenibili per quel misurando, con quel processo di misura in quelle condizioni sperimentali.

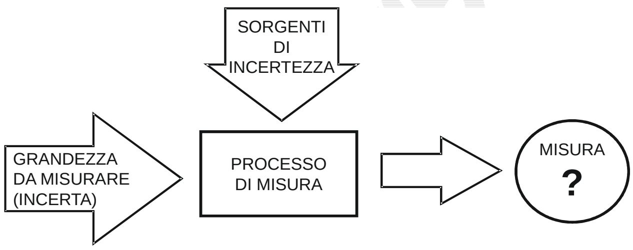

Figura 4. Come rappresentare il risultato della misurazione ?

Cambiando una qualsiasi delle condizioni (misurando, processo di misura, condizioni sperimentali) la popolazione che si otterrebbe sarebbe diversa dalle precedenti.

Il risultato di una misurazione ripetuta può quindi essere interpretato come un campione statistico estratto dalla **popolazione delle misure possibili**.

Manipolazione delle misure

Il passaggio ad una descrizione statistica della misurazione ci permette di utilizzare tutti quegli strumenti caratteristici della statistica che ci aiutano a manipolare in modo appropriato la grande quantità di numeri con cui ci dobbiamo ora confrontare. In seguito alla ripetizione della misurazione abbiamo a disposizione una serie di N valori x_i che costituiscono un **campione di misure** estratto dalla popolazione delle misure possibili.

Per il campione di cui disponiamo possiamo definire:

a) la *media*: $$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} \qquad (2)$$

b) la *varianza* $$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}{N-1} = \frac{\sum_{i=1}^{N} d_i^{\,2}}{N-1} \qquad (3)$$

c) la ***deviazione standard*** $$S = \sqrt{S^2} \qquad (4)$$

Ricordiamo che il valore medio calcolato con l'Eq. (2) è quel valore che utilizzato per calcolare gli scarti, ne azzera la somma. L'unità di misura della media coincide con quella del misurando.

Nell'Eq. (3) il denominatore è *N-1* per tener conto che gli scarti indipendenti sono *N-1:* infatti l'ennesimo scarto si può ricavare dai precedenti. La varianza ha come unità di misura il quadrato dell'unità di misura del misurando.

L'Eq. (4) definisce la deviazione standard anche detta errore standard del campione: l'informazione associata a questo parametro coincide con quella portata dalla varianza. Questa volta l'unità di misura è la stessa del misurando.

La varianza, e quindi anche l'errore standard, quantifica il grado di dispersione dei valori rispetto al valor medio. Al crescere della varianza aumenta la dispersione.

Per rappresentare sinteticamente l'intero campione possiamo costruire l'istogramma del numero di ripetizioni delle misure. Raggruppando i valori ottenuti in intervalli, possiamo contare quante ripetizioni appartengono a ciascun intervallo ed ottenere la rappresentazione riportata in Figura 5.

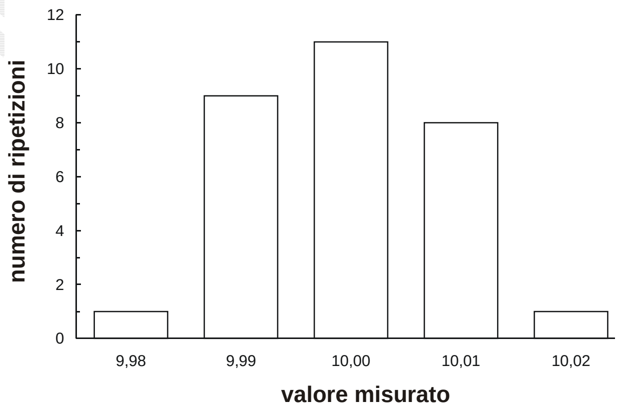

Figura 5. Esempio di istogramma del numero di ripetizioni.

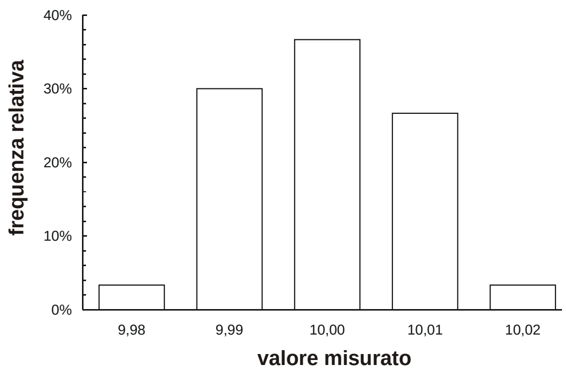

Figura 6. Esempio di istogramma della frequenza di ripetizione relativo ad una distribuzione discreta di misure.

Se volessimo rappresentare l'intera popolazione delle misure possibili, poiché *N* tende all'infinito, vedremmo crescere a dismisura il numero delle ripetizioni corrispondenti a ciascun intervallo utilizzato per costruire l'istogramma. Per ottenere una rappresentazione più efficace possiamo definire un nuovo parametro, la *frequenza di ripetizione* f_r:

$$f_r = \frac{r}{N} \qquad \text{oppure} \qquad f_{r\%} = \frac{r}{N} \cdot 100 \qquad (5)$$

dove *r* è il numero di ripetizioni dei valori all'interno di ciascuna classe con cui si definisce l'istogramma. La frequenza di ripetizione indica con quale frequenza i valori misurati cadono in un certo intervallo. Se disponessimo di tutte le misure appartenenti alla popolazione potremmo costruire l'istogramma della frequenza di ripetizione relativo alla popolazione. Un esempio è riportato in Figura 6, qui le frequenze di ripetizione relative sono espresse in percentuale. Per una qualsiasi distribuzione la somma delle frequenze relative deve valere 1, oppure in termini percentuali 100.

Distribuzioni continue

Nelle applicazioni ingegneristiche, i valori di misura attribuibili ad una certa grandezza si distribuiscono quasi sempre in modo continuo all'interno di un certo intervallo. Una stessa grandezza può tuttavia assumere una caratteristica continua o discreta a seconda dell'ambito in cui siamo chiamati ad eseguire le misure. Pensiamo ad esempio ad una misura di intensità di corrente. Questa grandezza può essere considerata continua fintanto che il flusso di carica non sia così piccolo da poter essere influenzato da poche cariche elementari. In quest'ultimo caso la grandezza assumerebbe un carattere discreto. Se i valori che definiscono la popolazione delle misure possibili si distribuiscono in modo continuo, la frequenza di ripetizione del singolo valore tende a zero e pertanto la rappresentazione mediante l'istogramma della frequenza di ripetizione non è più possibile.

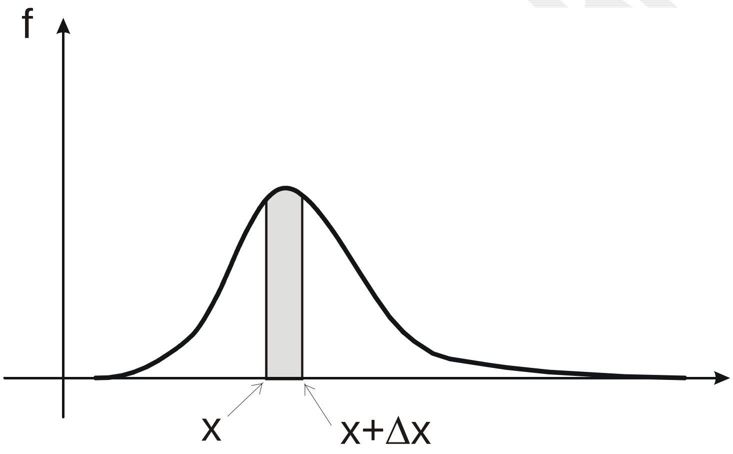

Figura 7. Grafico della densità di frequenza di una generica distribuzione continua di misure.

Per ovviare a questo si introduce il concetto di *densità di frequenza f*:

$$f = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_r(x;\, x+\Delta x)}{\Delta x} \qquad (6)$$

dove con $f_r(x+\Delta x)$ si indica la frequenza di ripetizione delle misure i cui valori sono compresi tra x e $x+\Delta x$.
Come mostrato in Figura 7, per calcolare la frequenza di ripetizione relativa ad un intervallo di valori compresi fra x e $x+\Delta x$ è sufficiente calcolare l'area sottesa alla curva densità di frequenza nel medesimo intervallo. Dalla definizione di densità di frequenza per un intervallo discreto $x_1 \div x_2$, la frequenza di ripetizione vale:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \qquad (7)$$

Calcolo della media di un campione di misure

Riprendendo la definizione di media data con l'equazione (2), nel caso in cui un generico valore x_i si ripeta r_i volte, la media può essere espressa come:

$$\bar{x} = \frac{r_1 x_1 + r_2 x_2 + \ldots.. + r_k x_k}{r_1 + r_2 + \ldots.. + r_k} = \frac{\sum r_i x_i}{\sum r_i} \qquad (8)$$

L'espressione (8) ci dice che il valor medio di un campione di misure coincide con la media pesata dei singoli valori. Il peso da attribuire a ciascun valore coincide con il numero di ripetizioni associate a quel valore.
Dalla (8) possiamo anche scrivere che:

$$\bar{x} = \sum \left(\frac{r_i}{\sum r_i} \right) x_i = \sum f_{ri} x_i \qquad (9)$$

Il valor medio di un campione di misure può essere calcolato come la somma del valore di ciascuna misura moltiplicato per la corrispondente frequenza di ripetizione.

Valore atteso della popolazione

Estendendo il risultato ottenuto con l'espressione (9) all'intera popolazione descritta da una distribuzione discreta di valori di misura, possiamo calcolare il valore atteso della popolazione, che chiameremo μ, mediante l'espressione

$$\mu = \sum \left(\frac{r_i}{\sum r_i} \right) x_i \qquad (10)$$

Nel caso in cui la distribuzione sia continua la (10), ricordando la (7), diventa:

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx \qquad (11)$$

Calcolo della varianza di un campione di misure

Riprendendo la definizione di varianza data con l'Eq. (3), nel caso in cui un generico valore x_i si ripeta n_i volte, posto lo scarto $d_i = x_i - \bar{x}$ e prendendo in considerazione la numerosità del campione N sufficientemente grande da poter sostituire N-1 con N, la varianza del campione di misure può essere espressa come:

$$S^2 = \frac{r_1 d_1^2 + \ldots + r_k d_k^2}{r_1 + \ldots + r_k - 1} = \frac{\sum_{i=1}^{k} r_i d_i^2}{\sum_{i=1}^{k} r_i - 1} \cong \frac{\sum_{i=1}^{k} r_i d_i^2}{\sum_{i=1}^{k} r_i} \qquad (12)$$

Dall'Eq. (12) vediamo che la varianza di un campione di misure coincide con la media pesata dei quadrati dei singoli scarti. Il peso per ciascuno scarto coincide con il numero di ripetizioni associate al valore misurato.
L'equazione (12) può essere scritta nel seguente modo:

$$S^2 = \sum \left(\frac{r_i}{\sum r_i} \right) d_i^2 = \sum f_{r_i} d_i^2 \tag{13}$$

La varianza di un campione di misure può essere calcolata come la somma dei quadrati degli scarti moltiplicati per la corrispondente frequenza di ripetizione.

Calcolo della varianza della popolazione

Estendendo il risultato ottenuto con l'espressione (13) all'intera popolazione descritta da una distribuzione discreta di valori di misura, possiamo calcolare il valore della varianza della popolazione, che chiameremo σ^2, mediante l'espressione:

$$\sigma^2 = \sum \left(\frac{r_i}{\sum r_i} \right) d_i^2 = \sum f_{r_i} \cdot d_i^2 \tag{14}$$

Nel caso di distribuzione continua, la frequenza di ripetizione dei valori compresi tra x e $x+dx$ vale $f(x)dx$, quindi la (14) può essere riscritta nel seguente modo:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx \tag{15}$$

Breve riepilogo

Fissato un processo di misura e definito il misurando si ha che:

- dalle misurazioni ripetute si ottiene un campione statistico estratto dalla popolazione delle misure possibili
- del campione di misure possiamo calcolare la media $\bar{x}$
- la dispersione delle misure appartenenti al campione è quantificata dalla varianza S^2
- il valore centrale della popolazione delle misure possibili è dato dal valore atteso μ
- la dispersione delle misure appartenenti alla popolazione è quantificata dalla varianza σ^2
- μ e σ^2 sono costanti caratteristiche della popolazione e sono in genere incognite
- $\bar{x}$ e S^2 variano da un campione all'altro
- $\bar{x}$ e S^2 possono essere considerati una stima di μ e σ^2 rispettivamente. Al crescere della dimensione N del campione, la stima diventa sempre più attendibile.

Popolazione delle medie

Come visto in precedenza, se ripetessimo un numero infinito di volte la stessa misurazione nelle stesse condizioni sperimentali otterremmo la popolazione delle misure possibili. Non è comodo portarsi appresso una lunga serie di misurazioni singole e fortunatamente ci vengono in aiuto, in questo senso, gli strumenti della statistica: abbiamo già imparato a determinare media e varianza di un campione di cui abbiamo poi esteso il concetto all'intera popolazione.
Proviamo ora a procedere con un'elaborazione delle misure appartenenti alla popolazione delle misure possibili. Partendo dai dati di misura "grezzi", cioè dai dati registrati durante le successive singole misurazioni, proviamo a suddividere le misure ottenute in piccoli gruppi e per ciascun gruppo calcoliamo il valore medio. Se ad esempio poniamo la numerosità n del gruppo pari a 5 possiamo scrivere:

$$m_{15} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_5}{5} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5},$$

$$m_{25} = \frac{x_6 + x_7 + \ldots + x_{10}}{5} = \frac{\sum_{i=6}^{10} x_i}{5},$$

$$m_{35} = \frac{x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{15}}{5} = \frac{\sum_{i=11}^{15} x_i}{5},$$

.

.

dove indichiamo con $x_1, x_2, \ldots x_k$ i valori delle singole misure prese nell'ordine in cui sono state registrate e con $m_{15}, m_{25}, m_{35}, \ldots$, le medie per ciascun gruppo. Se estendiamo l'operazione all'intera popolazione delle misure possibili e indichiamo con *n* la numerosità dei gruppi possiamo calcolare la generica media *i*-esima come:

$$m_{in} = \frac{x_{(i-1)\cdot n+1} + x_{(i-1)\cdot n+2} + \ldots + x_{(i)\cdot n}}{n} \tag{16}$$

Il modo con cui abbiamo costruito le medie implica un criterio di raggruppamento delle singole misure: prendiamo le prime *n* misure, poi le successive *n* e così via. Sul criterio con cui procedere nel raggruppamento torneremo in seguito.
Prendendo in considerazione l'intera popolazione delle misure possibili otteniamo un numero infinito di medie, cioè una distribuzione delle medie calcolata su gruppi di misure di numerosità *n*.
Se indichiamo con M_n la **popolazione delle medie** (di numerosità *n*), questa può essere vista come la combinazione delle distribuzioni $X_1 = X, X_2 = X, \ldots\ X_n = X$

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots X_n}{n} \tag{17}$$

Università di Brescia

Infatti, quando costruiamo i gruppi di misure, estraiamo i campioni dalla medesima popolazione delle misure possibili X: le variabili statistiche $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$, coincidono di fatto con la stessa variabile statistica X.
Possiamo ricavare qualche vantaggio dall'elaborazione numerica delle misure qui proposta ?
Per rispondere a questa domanda dobbiamo analizzare le proprietà della distribuzione delle medie. Supponiamo di conoscere il valore atteso μ e la varianza σ della popolazione delle misure grezze. Calcoliamo il valore atteso e la varianza della distribuzione delle medie e cerchiamo di capire in che relazione siano la popolazione delle medie e quella originaria delle misure grezze.
Indicando con $\mu(X)$ il valore atteso per la distribuzione X e ricordando che per qualsiasi distribuzione valgono le relazioni

$$\mu(X+Y+Z+\ldots) = \mu(X)+\mu(Y)+\mu(Z)+\ldots \tag{18}$$

$$\mu(kX) = q\cdot\mu(X) \quad \text{(con } q \text{ costante)} \tag{19}$$

possiamo calcolare il valore atteso per la distribuzione delle medie:

$$\mu(M_n) = \mu\left(\frac{\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2+\mathrm{X}_3+\ldots+\mathrm{X}_n}{n}\right) \tag{20}$$

essendo n una costante otteniamo:

$$\mu(M_n) = \frac{\mu(X_1)+\mu(X_2)+\ldots+\mu(X_n)}{n} = \frac{n\cdot\mu(X)}{n} = \mu(X) \tag{21}$$

Il valore atteso della distribuzione delle medie coincide con il valore atteso della distribuzione originaria, in altre parole la media delle medie coincide con la media della popolazione iniziale, questo risultato è senz'altro in accordo con quanto ci saremmo potuti aspettare intuitivamente.
Procediamo ora con il calcolo della varianza della popolazione delle medie. Ricordando che per una combinazione lineare Y di **variabili casuali indipendenti** X tali che

$$Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + \ldots\ldots \quad (b_0,\ b_1,\ \ldots \text{ costanti}) \tag{22}$$

vale sempre la seguente relazione

$$\sigma^2(Y) = b_1^{\,2}\sigma^2(X_1) + b_2^{\,2}\sigma^2(X_2) + \ldots \tag{23}$$

proviamo a calcolare la varianza della distribuzione delle medie:

$$\sigma^2(M_n) = \sigma^2\left(\frac{X_1+X_2+X_3+\ldots+X_n}{n}\right) \tag{24}$$

Come detto in precedenza, essendo $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ corrispondenti alla stessa distribuzione X, si ottiene:

$$\sigma^2(M_n) = \frac{\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \ldots + \sigma^2(X_n)}{n^2} = \frac{n \cdot \sigma^2(X)}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n} \qquad (25)$$

La varianza della distribuzione delle medie si ottiene dividendo per n la varianza della distribuzione originaria. Essendo la varianza un indice della variabilità associata ad una certa misurazione, si deduce che la distribuzione delle medie è caratterizzata da una ridotta variabilità rispetto alla distribuzione delle misure grezze.
Allo stesso modo la deviazione standard o errore standard della popolazione delle medie può essere calcolata a partire dall'errore standard della popolazione originaria dividendo per $\sqrt{n}$:

$$\sigma(M_n) = \sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (26)$$

Ricordiamo che n è il numero di campioni usati per costituire i gruppi di misure su cui si è mediato per passare alla popolazione delle medie. Al crescere di n, il numero di campioni può diventare così grande che, di fatto, il campione coincide con l'intera popolazione: in questo caso fra una media e l'altra non c'è più variabilità perché il valore che otteniamo coincide con il valore medio della popolazione.
L'**errore standard della media**, cioè l'errore standard della popolazione delle medie, diminuisce al crescere di n. La riduzione di variabilità è abbastanza lenta a causa della presenza della radice quadrata, per dimezzare l'errore standard dobbiamo usare $n=4$.
Se applichiamo ad una popolazione di misure questo processo di costruzione della distribuzione delle medie otteniamo una distribuzione con lo stesso valore atteso e con una variabilità più piccola. L'effetto è quello di ridurre la componente di incertezza derivante dagli effetti di casualità che si sovrappongono alle misure. La riduzione è tanto più sensibile quanto più aumenta la numerosità dei gruppi su cui mediamo.
Da quanto visto finora possiamo fare una prima importante considerazione: è preferibile mostrare, quando possibile, non il risultato grezzo di una misura ma la media di più misure ripetute. L'operazione di passaggio alla popolazione delle medie è lecita solo se si rispettano i presupposti: le ripetizioni si realizzano con lo stesso misurando (nessuna variazione è intervenuta a modificare la grandezza che si sta misurando), con lo stesso processo di misura e nelle stesse condizioni sperimentali (il processo di misura non è soggetto a derive o fluttuazioni).
Ci poniamo ora un'ulteriore domanda:

> *Esiste una relazione tra il tipo di distribuzione delle misure grezze ed il tipo della distribuzione delle medie costruita come indicato in precedenza* ?

L'esperienza maturata nella pratica delle misurazioni eseguite nei diversi campi sia scientifici sia tecnologici ha dimostrato che la risposta è *NO*: la distribuzione delle medie tende ad assumere una forma indipendente dal tipo di distribuzione delle misure grezze.

Teorema del limite centrale

A partire da una qualsiasi distribuzione di misure, quando le medie vengono calcolate per un numero sufficiente di singole misure, la distribuzione delle medie approssima una distribuzione normale.

L'operazione di media deve essere fatta su campioni estratti casualmente dalla popolazione delle misure possibili, per eseguire una media non possiamo scegliere od ordinare i campioni.

Il numero di misure su cui mediare è importante, al crescere di *n* l'approssimazione normale migliora, in ogni caso, già per *n=4* la distribuzione delle medie può cominciare ad essere approssimata da una distribuzione normale.
Il teorema del limite centrale può essere dimostrato all'interno della probabilità facendo alcune ipotesi non troppo restrittive relativamente alla generica distribuzione su cui vengono fatte le medie. Nel caso della misurazione, la migliore dimostrazione è tuttavia quella fornita dall'esperienza diretta e dalla pratica quotidiana.
La Figura 8 mostra l'andamento della curva densità di frequenza per una distribuzione di tipo normale (normalizzata) la cui espressione analitica è data dalla seguente relazione:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{27}$$

il valore atteso vale:

$$E(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \mu \tag{28}$$

la varianza vale:

$$Var(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \cdot \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \sigma^2 \tag{29}$$

I manuali di matematica riportano tabelle in cui viene indicata la frequenza di ripetizione calcolata per una distribuzione normalizzata, ossia per una distribuzione con media uguale a zero e varianza uguale a uno. Per calcolare la frequenza di ripetizione dei valori compresi nell'intervallo $A \le x \le B$ di una generica distribuzione normale con valore medio μ e varianza σ^2 ci si deve ricordare che la frequenza di ripetizione coincide con la frequenza di ripetizione dei valori compresi nell'intervallo

$$\frac{A-\mu}{\sigma} \le z \le \frac{B-\mu}{\sigma}$$

della distribuzione normale standardizzata.

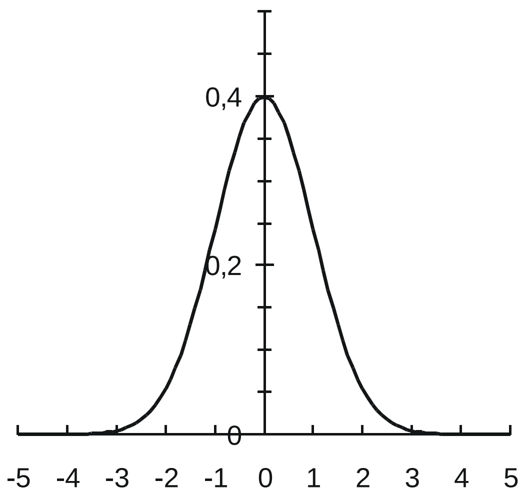

Figura 8. Distribuzione normale o gaussiana normalizzata.

I punti di flesso della curva gaussiana coincidono con $x = \mu \pm \sigma$. Per fissare alcuni semplici riferimenti numerici ricordiamo che

- nell'intervallo [$\mu - \sigma$, $\mu + \sigma$] cade il 68,26 % delle misure;
- nell'intervallo [$\mu - 2\sigma$, $\mu + 2\sigma$] cade il 95,94 % delle misure;
- nell'intervallo [$\mu - 3\sigma$, $\mu + 3\sigma$] cade il 99,74 % delle misure;

In altri termini possiamo anche dire che, presa una media m_i qualsiasi, essa cade

- nell'intervallo [$\mu - \sigma$, $\mu + \sigma$] con una probabilità del 68,26 %;
- nell'intervallo [$\mu - 2\sigma$, $\mu + 2\sigma$] con una probabilità del 95,94 %;
- nell'intervallo [$\mu - 3\sigma$, $\mu + 3\sigma$] con una probabilità del 99,74 %.

L'appendice A riporta le tabelle relative alla distribuzione normale standardizzata.

Stima della varianza delle medie

La varianza della popolazione delle misure possibili è, per definizione, incognita in quanto non è possibile realizzare fisicamente un numero infinito di misure. Per questo motivo non possiamo utilizzare l'equazione (26) per stimare la varianza delle medie, possiamo tuttavia stimare σ_m^2 con la varianza campionaria S_m^2 che, nel caso si disponga di un solo campione di misure di numerosità *n*, può a sua volta essere stimata come:

$$S_m^2 = \frac{S^2}{n} \tag{30}$$

Se avessimo la possibilità di calcolare S_m per diversi campioni di misure otterremmo via via valori diversi, osserveremmo quindi una variabilità. In altri termini S_m è una (variabile) statistica che stima σ_m. La varianza di S_m è calcolabile come [1]:

$$\sigma^2(S_m) \cong \frac{\sigma_m^2}{2 \cdot \nu} = \frac{\sigma_m^2}{2 \cdot (n-1)} \tag{31}$$

dove ν sono i **gradi di libertà**. La relazione (31) mostra come la varianza della stima dell'errore standard della popolazione delle medie valutata a partire da un unico campione di misure, diminuisce al crescere di *n*. In altri termini la stima di σ_m è tanto più accurata quanto più numeroso è il campione di misure su cui si calcolano media e S_m.

Nel caso, frequente, in cui la procedura di misura prevede di stimare il misurando mediando un campione di misure e in cui la misurazione viene poi ripetuta, abbiamo a disposizione una serie di medie che formano un campione della popolazione delle medie. I risultati di tutte le misurazioni possono essere combinati per ottenere una stima attendibile dell'errore standard σ_m della popolazione delle medie. Indicando con m_i la generica media e sapendo che la *i*-esima sessione di misura fornisce r_i medie, possiamo calcolare la varianza campionaria del campione di medie come:

$$S_{m,i}^2 = \frac{\sum (m_i - \overline{m}_i)^2}{r_i - 1} = \frac{\sum d_i^2}{r_i - 1} \tag{32}$$

Le varianze campionare di ciascuna sessione di misura possono essere combinate fra loro per ottenere una stima $\hat{\sigma}_m^2$ della varianza della popolazione delle medie basata su tutte le osservazioni disponibili. Tenendo conto della (32) possiamo scrivere:

$$\hat{\sigma}_m^2 = \frac{\sum (r_i - 1) \cdot S_{mi}^2}{\sum (r_i - 1)} \tag{33}$$

La stima $\hat{\sigma}_m$ così calcolata può essere assunta come un buon indicatore di qualità del processo di misura che stiamo usando. In condizioni di normale funzionamento, infatti, questo errore standard deve essere compatibile con le specifiche di incertezza del processo stesso. In caso di incompatibilità si deve assumere che l'apparato di misura non stia funzionando correttamente e pertanto dovranno essere attuate le procedure necessarie di verifica ed eventualmente di manutenzione o riparazione.

Combinazione di medie con diversa numerosità

Supponiamo di disporre di un numero p di medie m_j estratte da popolazioni delle medie ottenute mediando su gruppi di numerosità diversa: la generica popolazione M_j è stata ottenuta mediando su n_j misure singole. Ipotizzando che tutte le misure grezze appartengano alla medesima popolazione delle misure possibili di varianza σ^2, la media complessiva $\tilde{m}$ di tutte le misure disponibili può essere calcolata come

$$\tilde{m} = \frac{\sum_p n_i \cdot m_i}{\sum_p n_i} \tag{34}$$

Per ciascuna popolazione delle medie si ha $\sigma_{mi}^2 = \dfrac{\sigma^2}{n_i}$ e quindi

$$n_i = \frac{\sigma^2}{\sigma_{mi}^2} \tag{35}$$

Definiamo w_i il peso da attribuire alla media m_i come l'inverso della varianza della rispettiva popolazione delle medie:

$$w_i \overset{def}{=} \frac{1}{\sigma_{mi}^2}, \tag{36}$$

tenendo conto della (35) possiamo riscrivere la (34) nel seguente modo

$$\tilde{m} = \frac{\sum w_i \sigma_x^2 \cdot m_i}{\sum w_i \sigma_x^2} = \frac{\sum_p w_i \cdot m_i}{\sum_p w_i} \tag{37}$$

L'equazione (37) mostra che le medie calcolate a partire da campioni di numerosità diversa possono essere combinate per stimare la media della popolazione delle misure possibili pur di attribuire a ciascuna media il giusto peso definito dalla (36). In particolare risulta evidente che nel computo peseranno di più le medie derivate da campioni più numerosi e quindi estratte da una distribuzione con varianza più piccola.

Capitolo 3
Il procedimento di misura

La misurazione

L'obiettivo della misurazione è quello di determinare il valore del misurando. Il risultato di una misurazione, vale a dire la misura, non è altro che un'approssimazione (o stima) del valore del misurando che deve essere accompagnata da una dichiarazione dell'incertezza con cui tale approssimazione è stata ottenuta. Per giungere al risultato è necessario seguire un percorso ben definito che prevede:

- una adeguata definizione del misurando;
- la definizione del metodo di misura;
- la definizione del corretto procedimento di misura;

Il corretto approccio al problema permette la realizzazione di un sistema di misura adeguato alle esigenze, effettivamente utilizzabile e tracciabile all'interno di un sistema di unità di misura. Quest'ultimo punto assume grande rilevanza in quanto, come vedremo, una misura può essere ritenuta tale se e solo se è fornita da un sistema **riferito**.

Definizione del misurando

Il dettaglio con cui deve essere definito il misurando dipende dall'accuratezza richiesta alla misura che a sua volta dipende strettamente dallo scopo per il quale si esegue la misurazione. Ad esempio, quando andiamo dal fornaio e chiediamo di misurare la massa di pane che abbiamo ordinato, non è ragionevole pretendere un'accuratezza di misura migliore del grammo. In questo caso, infatti, essendo lo scopo della misurazione quello di determinare il giusto compenso per il fornaio, la frazione di grammo non ha un valore significativo e pertanto ogni sforzo rivolto nell'ottenere una misurazione più accurata è da considerarsi sprecato.
Per **accuratezza di misura** si intende il grado di concordanza tra il risultato della misurazione ed il valore vero del misurando. Più avanti daremo una corretta definizione di valore vero, per ora possiamo assumere come valore vero il valore ottenibile da un processo di misura perfetto.
Un misurando è definibile nel momento in cui riusciamo a costruire un modello di riferimento che descriva il misurando stesso. Prendiamo in considerazione un semplice problema di misura: determinare la superficie del pavimento del garage di casa. Spontaneamente il primo passo che facciamo è quello di descrivere il pavimento che vogliamo misurare con un modello di tipo geometrico: assumeremo, ad esempio, che la superficie del pavimento sia una superficie piana, che la forma sia rettangolare, che l'intersezione con le pareti possa considerarsi una spezzata e così via. Siamo ben coscienti che nessuna delle affermazioni precedenti è a rigore esatta: la superficie non è rigorosamente piana, la forma non è rigorosamente rettangolare così come il perimetro non è costituito da una semplice spezzata con quattro segmenti. Il modello scelto è un'approssimazione della realtà che ci consente di risolvere il problema di misura. Per contro, se non definiamo un modello non riusciamo nemmeno a definire un misurando. L'approccio corretto alla misurazione è quello che, partendo dallo scopo della misurazione, porta alla definizione di un modello di riferimento che consente di descrivere il misurando con un grado di dettaglio sufficiente.
Un misurando si dice ben definito quando l'incertezza residua dovuta all'approssimazione introdotta dal modello usato può essere considerata trascurabile (per lo scopo della misura).

Definizione del metodo di misura

Il metodo di misura non descrive altro che la sequenza logica delle operazioni usate per effettuare una misura, studieremo ad esempio i metodi di confronto ed il metodo di sostituzione.

La definizione del metodo indica una strada da seguire per giungere al valore del misurando senza tuttavia fornire nessuna informazione pratica per l'esecuzione della misurazione. In altri termini il metodo di misura descrive un modo di procedere astratto che non fa riferimento a dettagli realizzativi.

Definizione del procedimento

Nella definizione del procedimento vengono fornite le informazioni necessarie per passare dalla fase concettuale (espressa nella definizione del metodo di misura) alla fase operativa. Dalla definizione del procedimento, chiunque (con le opportune conoscenze ed i mezzi necessari) deve essere in grado di ricostruire esattamente il processo di misura che, una volta reso operativo, porti al risultato di misura. Fanno parte della descrizione del procedimento gli schemi elettrici, i disegni costruttivi delle diverse parti, il manuale operativo e tutta la documentazione tecnica che accompagna il progetto del sistema di misura.

Errori di misura

L'errore (assoluto) e di una misura è definito come la differenza tra il valore misurato $\tilde{x}$ ed il valore vero x:

$$e = \tilde{x} - x \tag{38}$$

Definiamo l'errore relativo e_{rel} tenendo conto che, normalmente, x è incognito e l'errore e è piccolo come:

$$e_{rel} = \frac{\tilde{x} - x}{x} \cong \frac{e}{\tilde{x}} \tag{39}$$

mentre l'errore percentuale è definito come

$$e_{\%} = \frac{\tilde{x} - x}{x} \cdot 100 \cong \frac{\tilde{x} - x}{\tilde{x}} \cdot 100 \tag{40}$$

Il progettista di un sistema di misura si pone l'obiettivo di ridurre gli errori di misura ad una ampiezza compatibile con l'accuratezza imposta dalle specifiche. Le tecniche utilizzabili per ridurre gli errori dipendono dalle cause che li hanno generati, possiamo quindi avere:

- *Variazioni casuali delle grandezze d'influenza*: in questo caso l'errore può essere ridotto mediando su un numero n di misurazioni riducendo statisticamente l'errore di un fattore $\sqrt{n}$.
  E' importante sottolineare che eseguendo la media, riduciamo una sola componente di errore, in particolare riduciamo l'influenza dovuta alla variabilità delle misure rispetto al valore medio della popolazione delle misure possibili: al limite aumentando n possiamo far coincidere il risultato della misura con μ; tuttavia, in genere, μ non coincide con il valore vero del misurando.

- *Variazioni prevedibili delle grandezze d'influenza*: queste variazioni comprendono il cambiamento dei parametri ambientali, come ad esempio temperatura, umidità e pressione dell'aria. Una misurazione può essere influenzata in modo più o meno importante dalle variazioni dei parametri ambientali; per ovviare a questa componente d'errore si deve intervenire controllando l'ambiente in cui si esegue la misurazione e, naturalmente, in fase di progettazione del sistema vanno applicati tutti gli accorgimenti che contribuiscono a rendere il sistema poco sensibile alle variazioni ambientali. Un'ulteriore strada da percorrere è quella che prevede la compensazione dei risultati di misura. Se è nota la relazione che lega lo scostamento del risultato dovuto ad una determinata variabile di influenza (ad esempio la temperatura), è possibile misurare la grandezza di influenza stessa (con un termometro) e quindi calcolare la correzione da applicare al risultato. La compensazione del risultato non potrà comunque mai essere totale per due ragioni principali:
  a) del legame tra grandezza di influenza e lettura del misurando si conosce generalmente solo un'approssimazione;
  b) la misura della grandezza di influenza è necessariamente caratterizzata da incertezza che si traduce in un'incertezza della compensazione.

Dopo aver corretto gli effetti sistematici (noti) e ridotto l'effetto degli errori casuali, il risultato di una misura continua ad essere solo una stima del misurando cui è associata un'incertezza. Affinché le misure possano essere utilizzate diventa indispensabile stimare l'incertezza residua e definire un intervallo di variabilità che sia limitato. Preso atto che la variabilità delle misure non è completamente eliminabile è necessario imparare a valutare quali sono gli estremi del campo di variabilità.

Capitolo 4
La stima dell'incertezza

Requisiti per la valutazione dell'incertezza

Il concetto di ***incertezza*** in quanto attributo quantificabile di una misura è ormai entrato nella pratica della misurazione e si inserisce anche in un quadro normativo ben definito [3]. E' comunemente accettato che, come illustrato precedentemente, il risultato della misurazione sia incerto. La definizione corrente di incertezza di misura è la seguente: *parametro, associato al risultato di una misurazione, che caratterizza la dispersione dei valori ragionevolmente attribuibili al misurando*. E' importante ora definire un metodo da seguire per giungere ad una stima accettabile dell'incertezza associata alla misura.
Il metodo di valutazione e di espressione dell'incertezza di misura deve essere universalmente accettato, deve inoltre essere applicabile a tutti i tipi di misurazione e a tutti i dati in ingresso usati nelle misurazioni. Il metodo di valutazione dell'incertezza deve essere indipendente dalla natura del misurando e quindi d'uso molto generale, applicabile in tutti i campi della misurazione.
La grandezza usata per esprimere l'incertezza deve godere di alcune proprietà fondamentali:

- *coerenza interna*: l'incertezza deve poter essere direttamente valutata a partire dalle componenti che vi contribuiscono ed indipendentemente dal modo con cui le diverse componenti possono essere scomposte o raggruppate; poiché è praticamente impossibile valutare in blocco tutte le componenti di incertezza, si deve poter scomporre il problema e trovare un modo per combinare i contributi di incertezza derivanti dalle diverse cause di variabilità.
- *trasferibilità:* l'incertezza valutata per un risultato deve essere direttamente utilizzabile come componente della valutazione dell'incertezza per una misura indiretta. Ad esempio consideriamo la temperatura che influenza il volume di un oggetto: l'incertezza della misura della temperatura deve poter essere trasferita ed utilizzata nella determinazione dell'incertezza della misura di volume.
- l'incertezza deve poter permettere la definizione di un intervallo ben delimitato nel quale ci si aspetta possa cadere la stragrande maggioranza dei valori di misura incluso il valore vero.

Valutazione dell'incertezza di misura

Si può dimostrare, sia in termini statistici che su base sperimentale, che lo scarto tipo di una popolazione di misure associata ad una certa grandezza è compatibile con i requisiti sopra elencati e può essere assunto come la grandezza che descrive la variabilità della popolazione stessa. La stima della componente di incertezza indotta dalla variabilità osservata sulla popolazione coincide quindi con la stima dello scarto tipo (errore standard) della popolazione. L'incertezza valutata in termini di scarto tipo prende il nome di ***incertezza tipo***. Va sottolineato che solamente l'incertezza tipo (e non l'incertezza estesa di cui verrà data la definizione) soddisfa tutti i requisiti di cui sopra, i metodi di valutazione dell'incertezza devono pertanto fare sempre riferimento ad essa.
La valutazione dell'incertezza è eseguita utilizzando due metodi (o categorie) diversi che non si escludono ma, anzi, sono complementari e normalmente utilizzati congiuntamente. Ciascun metodo permette di stimare alcune componenti di incertezza che dovranno poi essere combinate opportunamente per giungere alla stima dell'incertezza complessiva associata alla misura.
Le normative indicano le due categorie di calcolo dell'incertezza come [3]:

- **Valutazione di categoria A**: metodo di valutazione a mezzo dell'analisi statistica di una serie di osservazioni ripetute.
- **Valutazione di categoria B**: comprende tutti i metodi di valutazione *che non sono di categoria A*. In questo tipo di valutazione si esegue uno studio della *variabilità ipotizzata* sulla base di un insieme di informazioni attendibili.

La valutazione di categoria B rende conto del fatto che spesso è possibile stimare in modo attendibile una componente di incertezza sfruttando tutte le informazioni disponibili e senza necessariamente ricorrere a misurazioni ripetute.

Stima del misurando

Quando si esegue una misurazione, nel caso più generale, ci si trova ad esprimere il risultato della singola misura y come una funzione di altre grandezze $x_1..x_N$:

$$y = f(x_1, x_{2,}.....x_N) \tag{41}$$

Le grandezze indicate con $x_1..x_N$, così come il risultato y, in realtà appartengono alle rispettive popolazioni dei valori possibili di cui, durante la misurazione, vengono valutati valore atteso e varianza. Le variabili $x_1..x_N$ rappresentano sia grandezze direttamente misurate che grandezze a loro volta derivate, cosi come grandezze note per altre vie (costanti fisiche, campioni di riferimento accompagnati da relativo certificato di taratura, etc).
La stima $\hat{y}$ del misurando può essere ottenuta come:

$$\hat{y} = f(\hat{x}_1, \hat{x}_{2,}.....\hat{x}_N) \tag{42}$$

dove $\hat{x}_1, \hat{x}_{2,}.....\hat{x}$ sono le stime delle rispettive grandezze. In termini operativi questo significa che nella relazione (41), per ciascuna variabile, viene inserita la relativa stima (coincidente con la stima del valore atteso della popolazione corrispondente). L'equazione (42) è rigorosamente valida solo se f è lineare. Nel caso più generale, invece, dovremmo derivare la popolazione Y associata alla grandezza y utilizzando la relazione (41):

$$Y = f\left(X_1, X_2 \ldots X_N\right) \tag{43}$$

In questo caso la stima $\hat{y}$ viene a coincidere con la migliore stima del valore atteso per la poplazione Y.
Nei casi più comuni, anche in presenza di funzioni non lineari, si utilizza comunque l'equazione (42) in quanto si assume che la variabilità delle misure sia piccola e pertanto la funzione possa essere linearizza:

$$\hat{y} = f(\hat{x}_1, \hat{x}_{2,}.....\hat{x}_N) + \sum_i \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x=\hat{x}} \cdot \Delta x_i \cong f(\hat{x}_1, \hat{x}_{2,}.....\hat{x}_N) \tag{44}$$

Valutazione di *categoria A* dell'incertezza di misura

Indicata con Y la popolazione delle misure ripetute, si fa coincidere l'incertezza tipo associata alla misura di y con la migliore stima che si riesce a dare dell'errore standard σ della popolazione stessa. Indicando con $u(y)$ la componente di incertezza che stiamo valutando espressa in termini si scarto tipo possiamo scrivere:

$$u(y) = \sqrt{S_y^2} \tag{45}$$

Si assume come componente di incertezza proprio l'errore standard associato al campione, che viene considerato una buona stima dell'errore standard della popolazione delle misure ripetute. E' chiaro che la stima della componente di incertezza ottenuta con l'equazione (45), è tanto migliore quanto più numeroso è il campione di misure di cui si dispone.

Valutazione di *categoria B* dell'incertezza di misura

Non avendo a disposizione misure ripeture, si esegue uno studio della *variabilità ipotizzata* sulla base di un insieme di informazioni attendibili. In altri termini si stima l'incertezza tipo attraverso una valutazione basata sulla conoscenza della variabilità presunta della generica grandezza y.
Per comprendere il percorso da seguire conviene rifarci ad un esempio. Supponiamo di disporre di un resistore campione accompagnato da un certificato di taratura in cui troviamo scritto che il valore di resistenza R, valutato con un grado di fiducia pari al 99%, vale:

$$R = (10.000742 \pm 0.000129)\,\Omega \;\; (t = 23°C) \tag{46}$$

Se il resistore è stato conservato secondo le specifiche del costruttore, ed il certificato di taratura non è scaduto, l'equazione (46) costituisce una fonte di informazione attendibile che possiamo utilizzare per valutare l'incertezza tipo associata al valore di R. Infatti, ipotizzando che i valori di R appartengano ad una distribuzione normale, il 99% di fiducia corrisponde ad un intervallo di ampiezza $\pm 2.58\,\sigma_R$, per cui l'incertezza tipo può essere valutata come:

$$u(R) \equiv \sigma_R = \frac{129}{2.58}\,\mu\Omega = 50\,\mu\Omega \tag{47}$$

Incertezza tipo composta

Sfruttando le proprietà di coerenza interna e di trasferibilità, la valutazione dell'incertezza di misura passa attraverso la stima separata delle diverse componenti che derivano dalle diverse variabili che giocano un ruolo nel corso della misurazione. Le componenti di incertezza valutate separatamente devono poi essere composte per giungere ad una stima dell'incertezza complessiva associata alla misura.
Il caso generale può essere descritto attraverso una relazione che lega la popolazione delle misure Y alle diverse variabili statistiche X_i che descrivono le grandezze x_i da cui dipende y:

$$Y = f(X_1, X_2, ...X_N) \tag{48}$$

Dallo sviluppo di Taylor della funzione *f()* e ricordando la definizione di incertezza tipo è facile ricavare la formula:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j) \tag{49}$$

dove $u(x_i,x_j)=u(x_j,x_i)$ è la covarianza stimata associata a x_i, e x_j. Nella (49) $u_c(y)$ rappresenta proprio l'**incertezza composta** associata alla stima di y. L'equazione (49) rappresenta la *legge* *di propagazione dell'incertezza*: nota l'incertezza associata alle variabili x_i da cui dipende la misura y possiamo stimare l'incertezza associata ad y.

L'incertezza tipo composta $u_c(y)$ è universalmente accettata per esprimere l'incertezza del risultato di una misurazione.

Se le variabili $X_1, X_2, ...X_N$ sono indipendenti fra loro, vale a dire se l'incertezza associata ad una variabile non dipende dall'incertezza associata ad una altra variabile, allora possiamo semplificare la relazione (49) e calcolare l'incertezza composta $u_c(y)$ come:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)} \tag{50}$$

In questo caso, molto frequente, le diverse componenti di incertezza si sommano quadraticamente con pesi diversi, il peso da attribuire a ciascuna componente coincide con la sensibilità $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ del sistema rispetto alla variabile corrispondente.

Vediamo ora un caso particolare, molto frequenti nella pratica, in cui la legge di propagazione dell'incertezza trova un'espressione semplificata. Se la grandezza y è una combinazione lineare delle grandezze x_i indipendenti fra loro:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + ... b_N x_N \tag{51}$$

con b_0, b_1, ... b_N costanti numeriche, allora la relazione (50) diventa

$$u_c(y) = \sqrt{b_1{}^2 u^2(x_1) + b_2{}^2 u^2(x_2) + ... b_N{}^2 u^2(x_N)} \tag{52}$$

Nel computo dell'incertezza composta le singole componenti si sommano quadraticamente.
Proviamo ora ad applicare la legge di propagazione dell'incertezza ad una altro caso particolare assai frequente, quello in cui la relazione tra la grandezza y e le grandezze x_i è una produttoria:

$$y = b_0 \cdot x_1{}^{b_1} \cdot x_2{}^{b_2} \cdot \ ... \cdot x_N{}^{b_n} \tag{53}$$

dove b_0, b_1, ... b_N sono delle costanti. Essendo

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = b_0 \cdot b_i \cdot x_1{}^{b_1} \cdot x_2{}^{b_2} \cdot ... \cdot x_i{}^{b_i - 1} \cdot \ ... \cdot x_N{}^{b_N} = b_i \frac{y}{x_i} \tag{54}$$

otteniamo:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(b_i \frac{y}{x_i} \right)^2 u^2(x_i)} = y \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (b_i)^2 \left(\frac{u(x_i)}{x_i} \right)^2} \tag{55}$$

ossia

$$\frac{u_c(y)}{y} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (b_i)^2 \left(\frac{u(x_i)}{x_i} \right)^2} \tag{56}$$

Dalla relazione (56) vediamo come, nel caso di produttoria, siano le incertezze relative che si propagano direttamente dalle grandezze x_i alla grandezza derivata y.
Esprimendo le incertezze relative in termini percentuali possiamo scrivere:

$$u_{c\%}(y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(b_i)^2(u_{\%}(x_i))^2} \qquad (57)$$

E' da notare come nelle relazioni (51) e (53) i coefficienti b_0, b_1, ... b_N possono essere considerati delle costanti se e solo se il loro valore è noto con un'incertezza piccola a piacere o comunque piccola al punto da non influire nel calcolo di $u_c(y)$. In caso contrario i coefficienti vanno trattati come variabili casuali di cui va stimata l'incertezza.

Incertezza estesa

Nell'uso comune delle misure, fissato un certo livello di fiducia, dobbiamo poter definire una fascia che comprenda una parte rilevante e specificata dei valori y ragionevolmente attribuibili al misurando. In altri termini, dobbiamo poter affermare che

$$\hat{y}-U \le y \le \hat{y}+U \qquad (51)$$

con una probabilità assegnata. E' necessario ricorrere ad una valutazione quantitativa supplementare che permetta di definire l'intervallo (51); in termini probabilistici si tratta di esguire una stima per intervalli.
La grandezza U prende il nome di **incertezza estesa** e viene sempre espressa come:

$$U=k\cdot u_c(y) \qquad (52)$$

dove k è detto **fattore di copertura**.
Il risultato di una misurazione è pertanto presentato nella forma

$$\hat{y}\pm U \qquad (53)$$

e specificando il fattore di copertura scelto k.
La scelta del fattore di copertura k deve tener conto della criticità della misura, infatti, il fattore di copertura definisce intrinsecamente la probabilità con cui il valore vero della misura possa cadere all'interno (all' esterno) dell'intervallo di incertezza $\hat{y}\pm U$.
Ad esempio, nel caso in cui le misure siano distribuite normalmente, scegliendo $k=1$ facciamo coincidere U con $u_c(y)$ definendo così una fascia di variabilità (coincidente con $\pm\sigma_y$) cui corrisponde un grado di confidenza pari al 68,26%.
Non sempre un grado di confidenza così basso può essere accettato. Immaginiamo, per esempio, che la misura y fornisca indicazioni relative al corretto funzionamento di un dispositivo di sicurezza e che i dati di progetto impongano, per y, un valore nominale y_{nom} con tolleranza pari a $\pm T$. Il dispositivo, quindi, è dichiarato sicuro se

$$y_{nom}-T \le y \le y_{nom}+T \qquad (54)$$

Poiché si tratta di un dispositivo di sicurezza la relazione (54) deve essere vera con un grado di confidenza molto elevato e determinato. In questo caso non possiamo far coincidere la fascia di incertezza della misura semplicemente con $\hat{y}\pm u_c(y)$, avremmo una probabilità

troppo elevata che il valore y possa essere fuori tolleranza e quindi che il dispositivo possa essere non sicuro.
Il calcolo dell'incertezza estesa U avente livello di fiducia specificato è necessariamente approssimativo. Per poter definire accuratamente U è indispensabile conoscere tutto della distribuzione delle misure. Nella realtà tale conoscenza è, appunto, solo approssimativa.
Per chiarire meglio il concetto facciamo riferimento ad un caso assai comune in cui le misure grezze appartengono ad una distribuzione normale e la stima del misurando è fatta mediando n misure ripetute. In questo caso l'incertezza tipo che accompagna la stima $\hat{y}$ è calcolata come

$$u_c(y) = S_m \tag{55}$$

Ricordando l'Eq. (31) che riportiamo qui di seguito per comodità

$$\sigma^2(S_m) \cong \frac{\sigma_m^2}{2 \cdot \nu} = \frac{\sigma_m^2}{2 \cdot (n-1)}$$

sappiamo che la stima di $u_c(y)$ è incerta e che la sua incertezza diminuisce al crescere della numerosità n del campione su cui abbiamo mediato. In termini relativi, possiamo scrivere:

$$\frac{\sigma(S_m)}{\sigma_m} \cong \frac{\sigma(u_c(y))}{u_c(y)} \approx \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}} \tag{56}$$

Con l'equazione (56) possiamo calcolare, per il caso considerato, l'incertezza relativa della stima dell'incertezza. La tabella 1 mostra alcuni valori calcolati. Per piccoli valori di n l'incertezza dell'incertezza è assai grande, per n maggiore di 30, l'incertezza comincia ad essere stimata con un grado di accuratezza accettabile per la grande maggioranza delle applicazioni.
La probabilità che le misure grezze siano distribuite normalmente è, fortunatamente, assai elevata. Il misurando y può essere pensato appartenente ad una distribuzione Y ottenuta come combinazione lineare di più distribuzioni X_i:

$$Y = c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_NX_N = \sum_{i=1}^{N} c_iX_i \tag{57}$$

Numero di osservazioni (n)	$\frac{\sigma(u(y))}{u(y)} \cdot 100$
2	76
3	52
4	42
5	36
10	24
20	16
30	13
50	10

Tabella 1. Incertezza della incertezza nel caso di misure distribuite normalmente e di stima del misurando basata sulla media di n osservazioni ripetute.

La relazione (57), infatti, può eventualmente rappresentare la linearizzazione (nell'intorno del misurando) della generica funzione f utilizzata per calcolare y a partire da $x_1, x_2, \ldots x_N$. Se le distribuzioni X_i sono tutte normali e indipendenti, anche Y è sicuramente normale.
Riprendiamo ora il teorema del limite centrale nella sua formulazione più generale (rispetto a quella vista precedentemente). Esso afferma che *la distribuzione Y è <u>approssimativamente normale</u> se le X_i sono indipendenti e se la varianza $\sigma^2(Y)$ è molto più grande di ciascuna singola componente $c_i^2\sigma^2(X_i)$ originata da una variabile X_i avente distribuzione non normale.*

Tornando al semplice caso di misure mediate, tutte le componenti $c_i^2\sigma^2\left(X_i\right)$ hanno lo stesso valore $\frac{1}{n^2}\sigma^2\left(X_i\right)$, pertanto l'approssimazione normale della distribuzione delle medie migliora al crescere di *n*.
Nel caso generale l'approssimazione normale migliora

a) quando le componenti $c_i^2\sigma^2\left(X_i\right)$ sono comparabili fra loro, nessuna componente dominante;

b) quando le singole distribuzioni X_i sono prossime alla distribuzione normale.

In altri termini possiamo pensare le misure distribuite effettivamente in modo normale tutte le volte che l'incertezza tipo composta non è dominata né da una componente ottenuta da una valutazione di categoria A sulla base di poche osservazioni, né da una componente ottenuta da una valutazione di categoria B basata sull'ipotesi di una distribuzione marcatamente non normale. In questa casistica rientra la grande maggioranza dei casi riscontrati nella pratica comune delle misurazioni. Per tutti questi casi l'approssimazione normale è applicabile con successo nella determinazione degli intervalli di incertezza.
Vediamo ora come l'incertezza nella stima di $u_c(y)$ comporti un diminuzione del livello di confidenza associato all'incertezza estesa *U*. Fissato *U*, gli estremi della fascia di incertezza estesa y^+ e y^- valgono:

$$\begin{cases} y^+ = \hat{y} + U \\ y^- = \hat{y} - U \end{cases} \tag{58}$$

Prendiamo in considerazione ora la distribuzione normale standardizzata $z = \left(y-\mu\right)/\sigma$ che ricordiamo essere caratterizzata da media nulla e varianza unitaria. Agli estremi dati dalla (58) per *y*, corrispondono i seguenti estremi dell'intervallo di variazione della variabile normalizzata:

$$\begin{cases} z^+ = \dfrac{\hat{y} + U - \mu}{\sigma} \\ \\ z^- = \dfrac{\hat{y} - U - \mu}{\sigma} \end{cases} \tag{59}$$

Alla fascia di incertezza di *y* corrisponde quindi una fascia di variazione di *z* la cui semiampiezza che indichiamo con U_z è facilmente calcolabile come:

$$U_z = \frac{z^+ - z^-}{2} = \frac{U}{\sigma} = \frac{k \cdot u_c(y)}{\sigma} \tag{60}$$

Se $u_c(y)$ fosse determinato con incertezza trascurabile il suo valore coinciderebbe con σ e pertanto U_z coinciderebbe con *k*. Noi stiamo però analizzando proprio l'effetto dell'incertezza con cui conosciamo $u_c(y)$. Applicando la legge di propagazione dell'incertezza alla (60) otteniamo:

$$\frac{u\left(U_z\right)}{U_z} = \sqrt{\left\{\frac{u(k)}{k}\right\}^2 + \left\{\frac{u\left[u_c(y)\right]}{u_c(y)}\right\}^2} = \sqrt{u_r^2(k) + u_r^2\left(u_c(y)\right)} \tag{61}$$

avendo indicato con u_r le incertezze relative. Nella (61) è stato volutamente introdotto il termine $u_r(k)$ che, naturalmente, in condizioni di normale operatività è sempre nullo essendo k una costante. Tuttavia, poiché l'effetto dell'incertezza relativa $u_r(u_c(y))$ è numericamente equivalente a quello di una ipotetica incertezza $u_r(k)$ di pari valore, possiamo, per semplificare il proseguimento dell'analisi assumere che ad essere incerto sia il valore di k e non il valore $u_c(y)$. D'ora in avanti quindi assegniamo all'incertezza relativa di k il valore presunto per l'incertezza relativa di $u_c(y)$ che, nello stesso tempo, poniamo uguale a zero. In altri termini, avendo interamente trasferito l'effetto di incertezza sulla variabile k, il valore di $u_c(y)$ coincide con σ e quindi la (60) diventa:

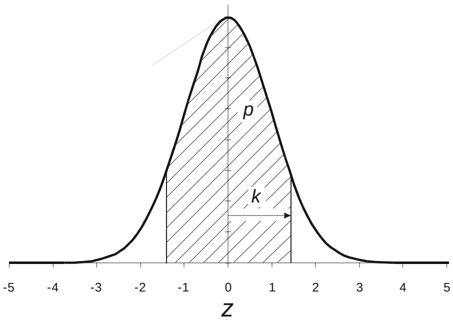

Figura 9. Distribuzione normale standardizzata.

$$U_z = \frac{k \cdot u_c(y)}{\sigma} = k \qquad (62)$$

Combinando la (61) con la (62) possiamo scrivere:

$$u(U_z) = u(k) = k \cdot u_r(k) \qquad (63)$$

dove numericamente, lo ricordiamo ancora, $u_r(k)$ assume i valori di $u_r(u_c(y))$.
La figura 9 riporta la distribuzione normale standardizzata: l'area tratteggiata, simmetrica rispetto all'asse delle ordinate, rappresenta la probabilità p che il valore di z cada nell'intervallo $\pm k$ e che quindi le misure ricadano nella fascia di incertezza estesa data dalle (58). Quando introduciamo l'incertezza di k, la situazione diventa quella rappresentata in figura 10. Qui $U(k)$ è l'incertezza estesa associata a k che possiamo esprimere come

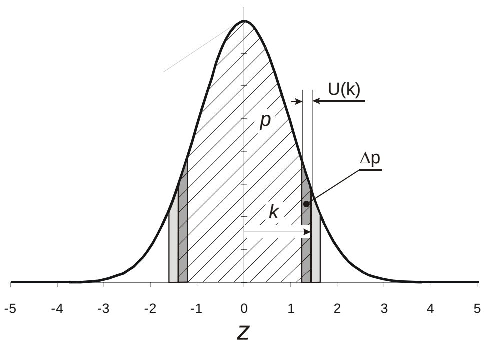

Figura 10. Effetto dell'incertezza di k.

$$U(k) = k_k \cdot u(k) = k_k \cdot k \cdot u_r(k) \qquad (64)$$

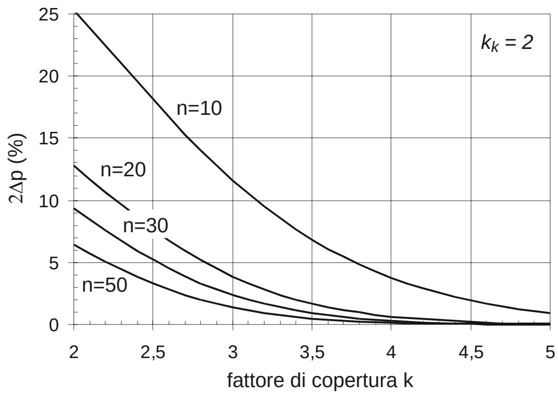

Figura 11. Variazione equivalente del grado di confidenza.

essendo k_k un fattore di copertura che determina il grado di confidenza con cui possiamo determinare le aree ombreggiate. Noi siamo interessati a valutare solo la possibile diminuzione del livello di confidenza introdotto dalla variabilità di k e quindi a tener conto della variazione di probabilità $2\Delta p$ corrispondente alle due aree ombreggiate più scure. La figura 11 mostra l'andamento della variazione $2\Delta p$ del grado di confidenza per diversi valori di n e quindi, dalla tabella I, per diversi valori di incertezza relativa della stima di $u_c(y)$, al variare del fattore di copertura k. Possiamo notare come le variazioni siano molto significative per piccoli valori di n soprattutto per fattori di copertura inferiori a 4. Da questi grafici possiamo quindi concludere che, per piccoli valori di n, pur partendo da una distribuzione delle misure grezze di tipo normale, l'incertezza con cui si conosce $u_c(y)$ è tale da introdurre una indeterminazione del grado di confidenza associato all'incertezza estesa che potrebbe essere inaccettabile per talune applicazioni. In questi casi è necessario, per calcolare il fattore di copertura corrispondente ad un fissato grado di confidenza, appoggiarsi ad una nuova variabile statistica che chiamiamo t:

$$t = \frac{(\hat{y} - y)}{u_c(y)} \tag{65}$$

Se il misurando y è una *singola grandezza* distribuita normalmente, e se di y viene data, mediando n osservazioni indipendenti, la stima $\hat{y}$ caratterizzata da scarto tipo S_m, allora la variabile t è distribuita secondo la distribuzione t-Student.

Fissata la probabilità p, la funzione t-Student fornisce il valori $t_p(\nu)$ tali per cui

$$-t_p(\nu) \le t \le +t_p(\nu) \tag{66}$$

proprio con probabilità p. Nella (66) ν sono i gradi di libertà coincidenti con (n-1).

La figura 12 mostra l'andamento della funzione t-Student per diversi valori di ν. Al crescere dei gradi di libertà la funzione si approssima sempre più alla normale standardizzata. E' da notare come per piccoli valori di ν, la funzione t-Student sia sensibilmente più allargata rispetto alla funzione normale. Partendo dalla (66) e sostituendo a t la sua espressione data dalla (65) otteniamo:

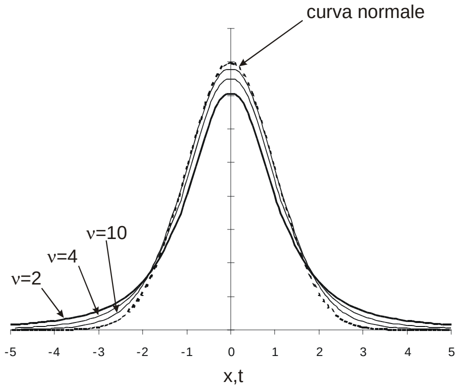

Figura 12. Distribuzione t-Student a confronto con la distribuzione normale.

$$-t_p(\nu) \le \frac{(\hat{y} - y)}{u_c(y)} \le +t_p(\nu) \tag{67}$$

ovvero

$$\hat{y} - t_p(\nu) \cdot u_c(y) \le y \le \hat{y} + t_p(\nu) \cdot u_c(y) \tag{68}$$

Confrontando la (68) con la (53) possiamo concludere che attraverso la distribuzione t-Student possiamo definire un'incertezza estesa U_p associata ad un grado di confidenza p data da

$$U_p = k_p \cdot u_c(y) = t_p(\nu) \cdot u_c(y) \tag{69}$$

dove il fattore di copertura k_p coincide proprio con il valore $t_p(\nu)$.

L'appendice B riporta i valori di t_p calcolati per i diversi gradi di libertà ed associati alle diverse probabilità p.

La distribuzione t-Student non descrive la variabile $t = \frac{(\hat{y} - y)}{u_c(y)}$ se $u_c^2(y)$ è la somma di N>1 componenti di varianza stimate. Questo è, naturalmente, il caso più generale relativo alla valutazione di incertezza composta a partire da stime di svariate componenti di incertezza.
La distribuzione della variabile t può tuttavia essere approssimata da una distribuzione t-Student avente gradi di libertà effettivi ν_{eff} ottenuti dalla formula di Welch-Satterthwaite [4]:

$$\nu_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}} \qquad \nu_{eff} \le \sum_{i=1}^{N} \nu_i \tag{70}$$

Nella (70) ν_i rappresenta i gradi di libertà associati alla *i*-esima componente di incertezza. Se quest'ultima dovesse derivare da altre componenti, nella relazione (70) al posto di ν_i va inserito ν_{ieff}, i gradi di libertà effettivi dell'*i*-esima variabile.
I gradi di libertà effettivi sono facilmente determinabili nel caso in cui la stima di una componente di incertezza derivi da una valutazione di categoria A, ben diverso è il caso in cui la stima di una componente di incertezza sia di categoria B. In questo caso non avendo a disposizione delle osservazioni non è nemmeno possibile definire dei gradi di libertà. Tuttavia, sulla base delle conoscenze disponibili relative alla variabilità ipotizzata che abbiamo utilizzato per stimare la componente di incertezza, è ragionevole poter definire anche l'incertezza della stima dell'incertezza.
Ricordando l'equazione (31) ed equiparando la varianza ipotizzata $\sigma^2[u_i(y)]$ della stima di $u_i(y)$ con una equivalente varianza osservata, per la generica componente di incertezza $u_i(y)$ possiamo scrivere:

$$\sigma^2[u_i(y)] \approx \frac{u_i^2(y)}{2\nu_{ieff}} \tag{71}$$

dando così una definizione operativa di gradi di libertà effettivi (ν_{ieff}) per una valutazione di categoria B:

$$\nu_{ieff} \approx \frac{u_i^2(y)}{2\sigma^2[u_i(y)]} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sigma[u_i(y)]}{u_i(y)}\right]^{-2} \tag{72}$$

Il termine $\frac{\sigma[u_i(y)]}{u_i(y)}$ non è altro che l'incertezza relativa dell'incertezza.
A questo punto è importante richiamare le tappe principali del percorso da seguire per giungere alla definizione del corretto fattore di copertura.
Si vuole calcolare un'incertezza estesa $U_p=k_p u_c(y)$ che individua un intervallo $\hat{y} \pm U_p$ avente livello di fiducia p. Si procede come segue:

1) Si ottengono $\hat{y}$ e $u_c(y)$.
2) Si calcolano i gradi di libertà effettivi associati a ciascuna componente di incertezza utilizzata per calcolare $u_c(y)$.
   Se la componente di incertezza deriva da una valutazione di categoria A applicata alle osservazioni di una singola variabile i gradi di libertà effettivi coincidono con i gradi di libertà.

La relazione (70) va applicata se la singola componente di incertezza deriva da altre componenti.
La relazione (72) va applicata quando la valutazione della componente di incertezza è di categoria B.

3) Dalle tabelle relative alla distribuzione t-Student si ricava il fattore $t_p(\nu_{eff})$ corrispondente al livello di fiducia p desiderato.
4) Si pone $k_p=t_p(\nu_{eff})$.

Le situazioni, poco frequenti, in cui le condizioni di validità del teorema del limite centrale possono non essere soddisfatte, vanno trattate caso per caso con una valutazione analitica (eventualmente approssimata) che tenga conto delle reali distribuzioni di probabilità.

Arrotondamento del risultato

La presentazione del risultato di una misurazione deve utilizzare le sole cifre significative, evitando quelle cifre rese inutili dal fatto che esiste un intervallo di incertezza associato alla misura. Per imparare a valutare quali siano le cifre significative proviamo ad analizzare il significato dell'arrotondamento.
Un esempio numerico ci può aiutare. Partiamo da una generica misura (unità arbitrarie, *ua*) il cui valore è dato dal numero 10.3**8**747890893. Arrotondiamo la misura alla seconda cifra decimale ottenenedo il valore 10.3**9**. L'arrotondamento eseguito è equivalente a:

1) affermare che 10.39 è un valore plausibile per la grandezza misurata;
2) ammettere che la misura cade nell'intervallo $10{,}385 \le x < 10{,}395$
3) ammettere che il valore vero appartiene ad una distribuzione rettangolare come rappresentato in Figura 13 dove A=10,385 e B=10,395.

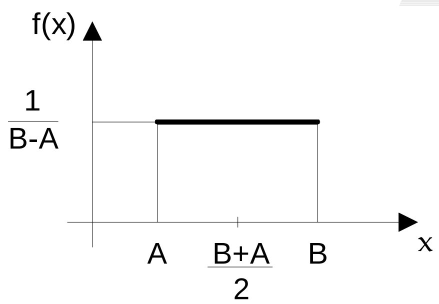

Figura 13 Distribuzione rettangolare.

In una distribuzione rettangolare tutti i valori compresi fra A e B sono equiprobabili. Effettivamente, dopo che l'arrotondamento è stato eseguito non abbiamo nessun elemento oggettivo per affermare che il valore vero sia con maggior probabilità posizionato in una particolare posizione all'interno dell'intervallo A-B.
Calcoliamo la varianza associata alla generica distribuzione rettangolare:

$$\sigma^2 = \int_A^B \left(x - \frac{A+B}{2} \right)^2 \frac{1}{B-A} dx = \frac{1}{B-A} \frac{1}{3} \left[\left(B - \frac{A+B}{2} \right)^3 - \left(A - \frac{A+B}{2} \right)^3 \right] = \frac{(B-A)^2}{12} \qquad (73)$$

cui corrisponde l'errore standard:

$$\sigma = \frac{B-A}{\sqrt{12}} \qquad (74)$$

Nel caso dell'esempio numerico abbiamo σ = 0.00**28**867513. Siamo quindi partiti con l'arrotondare alla seconda cifra decimale ed abbiamo introdotto un'incertezza tipo di arrotondamento pari a circa 0.003 ossia poco meno di un terzo del valore della cifra a cui abbiamo arrotondato.

Abbiamo tutti gli elementi per stabilire quale sia la cifra su cui è corretto arrotondare: *l'incertezza aggiuntiva introdotta con l'arrotondamento deve poter essere trascurata rispetto all'incertezza intrinseca della misura*. Dal paragrafo precedente abbiamo inoltre imparato che l'incertezza è solitamente stimata con un'incertezza relativa che, nei casi migliori, non è meglio di alcuni punti percentuali. Questo ci porta a dire che nella scrittura dei valori di incertezza relativa le cifre significative sono due. Possiamo quindi calcolare quale sia la cifra più a sinistra che varia in corrispondenza alla variazione di una unità della cifra meno significativa dell'incertezza. L'arrotondamento deve essere fatto una cifra a destra della cifra individuata.
Ecco un esempio. Dalle misure si ottiene un valore di 12345,6789 (*ua*) e dalla valutazione dell'incertezza il valore per l'incertezza tipo di 45,321 (*ua*). L'incertezza relativa vale 45,321/12345,6789 ossia, riportando due cifre significative, 0,37%. Una variazione dello 0,01% del misurando è pari a 1,23456789: l'incertezza di misura rende la cifra delle unità quella meno significativa. In questo caso possiamo tranquillamente arrotondare alla prima cifra decimale certi di non introdurre un significativo ulteriore contributo di incertezza. La misura dovrà pertanto essere presentata come:

$(12345{,}7 \pm 45{,}3)$ *ua*, k=1

Capitolo 5
La riferibilità

Sorgenti di variabilità

Fino ad ora abbiamo analizzato la variabilità delle misure sotto l'ipotesi che le condizioni sperimentali non cambiassero. In genere, tuttavia, è difficile ripetere la misurazione rigorosamente nelle stesse condizioni sperimentali, di volta in volta possono cambiare sia gli strumenti di misura utilizzati che le grandezze di influenza quali la temperatura, l'umidità etc. Queste variazioni sono descrivibili come un cambiamento del processo di misura e quindi come una variazione della popolazione delle misure possibili. In particolare potranno aversi variazioni sia del valor medio che della varianza della popolazione delle misure possibili.

Facendo riferimento alla tabella di Figura 14, supponiamo di avere fatto circolare un unico campione di una generica grandezza fisica presso sette diversi laboratori (7 processi di misura diversi), ciascuno dei quali ha ripetuto per tre volte la misurazione del campione. Per ogni processo possiamo calcolare valor medio e varianza: così facendo otteniamo una stima del valor medio e della varianza di ciascuna delle sette popolazioni di misure possibili per lo stesso misurando. I risultati sono riportati su ciascuna riga della tabella. Possiamo anche calcolare la media delle medie dei singoli processi: svolgendo questa operazione attribuiamo a ciascun processo lo stesso peso, assunzione ragionevole finché non abbiamo elementi per stabilire se un processo di misura sia più attendibile di un altro. La varianza associata a ciascun processo è solo un indicatore della qualità del processo stesso ma, di per sé, non è sufficiente a certificarla in quanto il processo di misura, pur soggetto ad una piccola variabilità, potrebbe essere caratterizzato da uno scostamento sensibile del valore atteso dal valore vero del misurando.

N°processo	valori misurati			media	varianza
1	17,13	16,56	16,56	16,7500	0,1083
2	16,08	16,04	16,13	16,0833	0,0020
3	16,01	15,96	16,06	16,0100	0,0025
4	16,65	16,91	16,75	16,7700	0,0172
5	15,71	15,45	15,66	15,6067	0,0190
6	15,05	14,73	15,04	14,9400	0,0331
7	18,80	18,20	18,10	18,3667	0,1433
	media delle medie		16,3610		
	varianza delle medie		1,1883		

Figura 14 Dati raccolti con diversi processi di misura a partire dallo stesso misurando. Le unità di misura sono arbitrarie.

Se calcoliamo la varianza delle medie otteniamo un indicatore della variabilità tra i diversi processi di misura che rende conto del fatto che processi di misura diversi presentano valori attesi diversi.

Da queste considerazioni deduciamo dunque che la variabilità osservabile tra le 21 misure presentate in tabella è il risultato della variabilità all’interno di ciascun processo di misura e della variabilità fra i processi di misura. Le misure sono 7 campioni statistici estratti da 7 popolazioni differenti. A causa degli errori che si compongono in maniera diversa, le popolazioni presentano valori centrali diversi.

Analisi della variabilità

Per capire come possa essere interpretata la variabilità delle misure nel caso in cui si tenga conto anche della variabilità tra i diversi processi di misura, facciamo alcune ipotesi che, pur semplificando il ragionamento, non invalidano la generalità dei risultati ai quali si perviene.

A) le popolazioni associate ai diversi processi di misura possiedono tutte la stessa varianza che indichiamo con σ_p^2. Questa ipotesi equivale a prendere in considerazione e a confrontare processi di misura simili tra loro, evitando il confronto diretto fra processi caratterizzati da variabilità molto diverse.

B) Le medie di ciascuna popolazione, che indichiamo con μ_i, appartengono esse stesse ad una popolazione (normale) avente varianza σ_L^2 (L sta per laboratori). Quest'ipotesi è confermata dalla pratica quotidiana delle misure eseguite da laboratori diversi e/o con strumenti di misura diversi.

Per il processo di misura i-esimo, μ_i è visto come una costante. Se riferito alla popolazione di tutti i processi, μ_i è una variabile con varianza σ_L^2.
La singola misura y può essere pensata come il risultato di un'estrazione casuale dalla popolazione risultante dall'unione di tutte le popolazioni delle misure possibili. La varianza associata a questa popolazione, che comprende tutte le misure ottenibili con un qualsiasi processo di misura, vale:

$$\sigma_y^2 = \sigma_L^2 + \sigma_p^2 \qquad (75)$$

L'equazione (75) evidenzia il fatto che la variabilità delle misure comprende due componenti distinte, la prima dipende dalla variabilità tra processi di misura, la seconda dalla variabilità all'interno dello stesso processo, entrambe contribuiscono all'incertezza di misura. L'equazione (75) rende conto del fatto che quando eseguiamo una misura, di fatto, estraiamo lo strumento di misura dalla popolazione degli strumenti disponibili (varianza σ_L^2), poi utilizzando lo strumento scelto estraiamo un valore dalla popolazione delle misure possibili con quello strumento (varianza σ_p^2).
La componente di variabilità interna al processo di misura può essere ridotta eseguendo una serie di misure ripetute e calcolando poi la media. In questo caso indicando con n la numerosità del campione sui cui mediamo, l'equazione (75) diventa:

$$\sigma_y^2 = \sigma_L^2 + \frac{\sigma_p^2}{n} \qquad (76)$$

E' evidente che l'operazione di media applicata alle misure ripetute non è in grado di cancellare la variabilità delle misure. Il termine σ_L^2 non viene influenzato dall'operazione di media.
Scopo della metrologia è quello di studiare ed attuare le soluzioni che garantiscano la minima variabilità tra misure diverse minimizzando sia la variabilità all'interno del singolo processo di misura che, altrettanto importante, la variabilità tra i diversi processi di misura.

Definizione operativa (misurazione) di valore vero

Per una specifica grandezza realizziamo un suo campione fisico e prendiamo in considerazione l'insieme dei processi di misura che minimizzano in senso assoluto sia σ_L^2 che σ_p^2 dell'equazione (75), definiamo valore vero del misurando il valore medio delle misurazioni fatte. In realtà con questa definizione stiamo definendo una distribuzione di valori veri: quelli ottenibili utilizzando i processi di misura che garantiscono la minima variabilità. Il valore vero, dunque, non è unico perché esisterà sempre una variabilità residua. Per questo motivo è più corretto fare riferimento ad "un valore vero" piuttosto che "al valore vero" di una data grandezza.
Sulla base delle conoscenze scientifiche e tecnologiche di cui si dispone, si definisce il procedimento operativo che garantisce la variabilità più piccola possibile. L'evoluzione delle conoscenze porta ad un continuo miglioramento dei risultati ottenuti: l'incertezza associata al valore vero diminuisce con il progredire delle conoscenze.
Poiché la misura di una grandezza è il risultato di un confronto con un campione di riferimento della stessa, l'incertezza associata alla misura non potrà mai essere migliore dell'incertezza con cui è realizzato il campione di riferimento. La metrologia si preoccupa di

costruire campioni di riferimento e processi di misura caratterizzati dalla minima incertezza, avvalendosi di tutte le conoscenze scientifiche disponibili.

Relazione di compatibilità

Una grandezza di valore vero y_1 e stimata dalla misura $\hat{y}_1$ caratterizzata da incertezza estesa U_1 si dice compatibile con una generica misura y_i di valore $\hat{y}_i$ e incertezza U_i se è verificata la relazione:

$$|y_1 - y_i| \leq U_1 + U_i \tag{77}$$

La relazione (77) esprime il fatto che due misure sono ritenute compatibili se le rispettive fasce di incertezza si sovrappongono almeno in parte. La relazione di compatibilità è naturalmente definita con lo stesso grado di confidenza con cui è definita l'incertezza estesa indicata nella (77). Nel caso le misure provengano da strumenti di cui non è certificata la taratura ci si potrebbe presentare la situazione riportata in *Figura 15*. Qui sono mostrate le misure fornite da tre strumenti diversi, per ciascuna misura è indicata la fascia di incertezza estesa. In questo caso la misura y_1 è compatibile con la misura y_2, quest'ultima è compatibile con la misura y_3 ma è evidente che le misure y_1 e y_3 non sono compatibili fra loro. In questa situazione la compatibilità sembrerebbe non godere della proprietà transitiva.

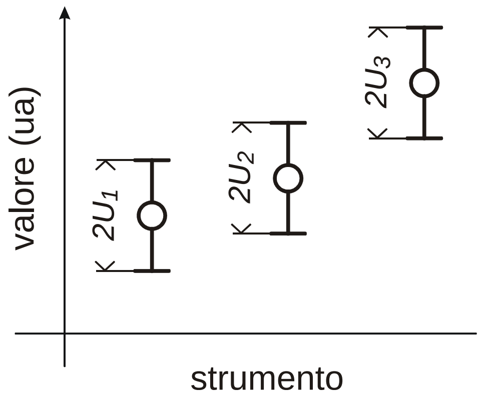

Figura 15. Relazione di compatibilità fra misure.

E' evidente che la situazione rappresentata è incongruente: il valore vero del misurando non potrebbe appartenere all'intervallo di incertezza di y_1 e nello stesso tempo essere incluso nell'intervallo di incertezza di y_3.
Un insieme di misure si dice mutuamente compatibile se esiste almeno un elemento comune a tutte le fasce di incertezza. La figura 16 mostra un insieme di misure mutuamente compatibili.

Riferibilità delle misure

Una misura si definisce riferita solo se appartiene ad un insieme di misure mutuamente compatibili che include il valore vero del misurando. La condizione di riferibilità è essenziale per il possibile utilizzo concreto di una misura. Solo se la misura è riferita possiamo affermare che il valore vero è incluso nell'intervallo di variabilità dichiarato.
Uno strumento si dice riferito se fornisce misure riferite. Per sapere se uno strumento è riferito è necessario controllarne il certificato di taratura che indica le condizioni ed i termini di riferibilità dello strumento stesso.

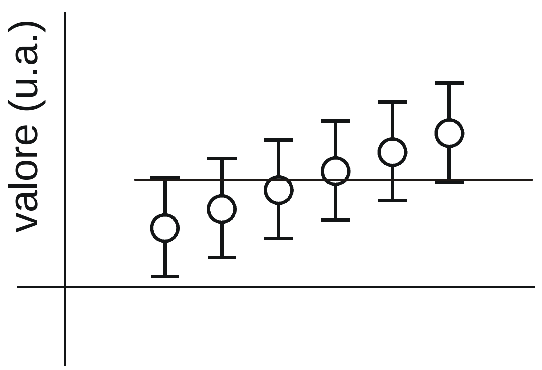

Figura 16. Insieme di misure mutuamente compatibili.

Capitolo 6
Il sistema SI

Sistema di unità di misura

Il valore numerico di una grandezza dipende dall'unità di misura che abbiamo deciso di adottare per la sua misura. Un sistema di unità di misura definisce le unità di misura per tutte le grandezze misurabili. Un sistema di unità di misura è un insieme di definizioni e di regole: definizioni delle unità assunte come "fondamentali", regole per ottenere da queste le unità di tutte le altre grandezze in uso nella fisica, nella chimica, nella biologia, nelle varie attività tecnologiche e nella vita quotidiana.
Sebbene in linea di principio l'unità di misura di una grandezza fondamentale (o di base) possa essere scelta in modo arbitrario si devono tuttavia rispettare e conciliare esigenze diverse di carattere storico, scientifico e pratico:

- dell'unità di misura si devono poter realizzare dei campione fisici. Questi devono poter essere sottoposti a confronti mirati a quantificare la variabilità tra le diverse realizzazioni. I campioni devono essere caratterizzati da una piccola incertezza intrinseca;
- sull'unità di misura ci deve essere accordo internazionale;
- l'unità di misura deve tenere in conto l'evoluzione storica e scientifica relativa alla misura della grandezza stessa;
- le unità di base dovrebbero essere definite mediante elementi di riferimento tendenzialmente e per quanto possibile non legati né al tempo né al luogo della misurazione;
- la scelta delle unità di base deve essere tale da garantire sia l'indipendenza tra di esse, (nessuna unità di base si deve poter esprimere mediante le altre), sia la completezza, esse debbono essere in numero sufficiente da permettere di derivare, mediante le relazioni stabilite dalle leggi della fisica, le unità delle altre grandezze (unità derivate).

All'interno di un sistema di unità di misura distinguiamo quindi due categorie di unità di misura :

- **Unità fondamentali**: da esse si può passare alla definizione di unità da esse derivate. Sono definite in maniera indipendente.
- **Unità derivate**: sono derivate sulla base di leggi fisiche dalle unità fondamentali.

Un sistema di unità di misura è coerente se non è necessario introdurre costanti numeriche per passare dalle unità fondamentali a quelle derivate. Se ad esempio prendiamo in considerazione la grandezza velocità, in un sistema coerente in cui la lunghezza sia espressa in metri ed il tempo in secondi, l'unità di misura della velocità è espressa in metri al secondo.

Sistema internazionale di unità (S.I.)

L'atto di nascita del *Sistema Internazionale* delle unità di misura (simbolo SI) è stato redatto nel 1960 dalla XI *Conferenza Generale dei Pesi e delle Misure* (CGPM). Si tratta di una tappa, non di un traguardo, perché il Sistema Internazionale, anche se può essere considerato il miglior sistema esistente, è suscettibile di ulteriori miglioramenti. Probabilmente le unità di cui è costituito il sistema non subiranno cambiamenti a breve termine; tuttavia, certamente, nel momento in cui il progresso scientifico e tecnologico offrirà campioni più stabili e consentirà misure più precise, le definizioni delle unità verranno modificate.
Oltre alle unità fondamentali sulle quali il sistema è costruito, fanno parte del Sistema Internazionale le unità derivate che si ottengono combinando le precedenti secondo regole molto semplici. Il sistema SI è un sistema coerente.

Unità di base

Nel sistema SI le unità di base sono sette e precisamente: metro, kilogrammo, secondo, ampere, kelvin, mole e candela.
Queste unità sono state scelte in modo tale ed in numero tale da poter rappresentare in modo non ambiguo qualunque grandezza fisica che si voglia misurare. Il loro numero tuttavia rappresenta un compromesso tra esigenza di semplicità, per cui il numero di unità fondamentali dovrebbe essere il minore possibile, ed esigenze di chiarezza e di praticità, per cui forse sarebbe utile definirne un numero maggiore. La scelta è determinata principalmente da ragioni storiche e dal modello fisico matematico con il quale si rappresentano i fenomeni naturali.
Le unità di base sono dimensionalmente indipendenti, nel senso che nessuna di esse si può esprimere come funzione delle altre, anche se poi la definizione di una unità fa riferimento ad altre unità come nei casi del metro, dell'ampere, della candela e della mole. Inoltre sono scelte e definite in modo da poterne realizzare un campione con la miglior precisione possibile allo stato attuale della tecnologia; è questo il motivo per cui le definizioni sono soggette a modifiche anche sostanziali, senza peraltro che vari il nome dell'unità e, entro le incertezze sperimentali, il valore del campione che le realizza. La Tabella 1 riporta le sette grandezze di base del sistema SI. Si può notare che nel sistema SI viene definita come grandezza fondamentale la corrente e, di conseguenza, come grandezza derivata la carica (la carica è l'integrale della corrente): è più semplice definire un campione di corrente piuttosto che un campione di carica.

Grandezza	**Unità SI**	
	nome	**simbolo**
lunghezza	metro	m
massa	kilogrammo	kg
tempo	secondo	s
intensità di corrente elettrica	ampere	A
temperatura termodinamica	kelvin	K
quantità di sostanza	mole	mol
intensità luminosa	candela	cd

Tabella 2 . Grandezze di base del sistema SI

Angolo piano e angolo solido erano (prima del 1995) definite grandezze supplementari, ora sono state classificate come grandezze derivate. L'angolo piano si misura in radianti (rad) e l'angolo solido si misura in steradianti (sr).

Regole di scrittura

I nomi delle unità di misura sono considerati nomi comuni e pertanto si scrivono con l'iniziale minuscola anche se alcuni di essi derivano da nomi di scienziati (Ampere, Kelvin, …). In questo caso il simbolo è rappresentato da una lettera maiuscola (A per l'ampere, K per kelvin, …). Il simbolo delle unità di misura deve essere usato solo quando l'unità è accompagnata dal valore numerico: esso deve essere scritto in carattere non corsivo (A e non *A*), dopo il valore numerico e non deve essere seguito da un punto (a meno che non si tratti del punto di fine periodo). Quando l'unità non è accompagnata dal valore numerico, invece, deve essere scritta per esteso e non con il simbolo:

- "… il kelvin è l'unità di misura della temperatura, …"
- "… il Monviso è alto 3841 m."

Quando l'unità SI è troppo grande o troppo piccola per certe misurazioni, si possono usare suoi multipli o sottomultipli decimali. Per soddisfare le esigenze di tutti gli utilizzatori del sistema SI la Conferenza Generale dei pesi e delle Misure ha stabilito un certo numero di prefissi con nomi speciali.

fattore di moltiplicazione prefisso	*nome*	*simbolo*
1 000 000 000 000 000 000 000 000 = 10^{24}	**yotta**	**Y**
1 000 000 000 000 000 000 000 = 10^{21}	**zetta**	**Z**
1 000 000 000 000 000 000 = 10^{18}	**exa**	**E**
1 000 000 000 000 000 = 10^{15}	**peta**	**P**
1 000 000 000 000 = 10^{12}	**tera**	**T**
1 000 000 000 = 10^{9}	**giga**	**G**
1 000 000 = 10^{6}	**mega**	**M**
1 000 = 10^{3}	**kilo**	**k**
100 = 10^{2}	**etto**	**h**
10 = 10^{1}	**deca**	**da**
0,1 = 10^{-1}	**deci**	**d**
0,01 = 10^{-2}	**centi**	**c**
0,001 = 10^{-3}	**milli**	**m**
0,000 001 = 10^{-6}	**micro**	**m**
0,000 000 001 = 10^{-9}	**nano**	**n**
0,000 000 000 001 = 10-^{12}	**pico**	**p**
0,000 000 000 000 001 = 10^{-15}	**femto**	**f**
0,000 000 000 000 000 001 = 10^{-18}	**atto**	**a**
0,000 000 000 000 000 000 001 = 10^{-21}	**zepto**	**z**
0,000 000 000 000 000 000 000 001 = 10^{-24}	**yocto**	**y**

Tabella 3 Multipli e sottomultipli del sistema SI

Il prefisso precede l'unità di misura con la quale forma il multiplo e sottomultiplo; non può essere usato da solo, né si possono usare due prefissi consecutivi. Si scriverà 1 nm e non 1 mmm, 1pF e non 1mmF. Il simbolo del prefisso è scritto con carattere diritto come il simbolo delle unità, non si lasciano spazi, né si interpone il punto tra i due simboli:

1000 V = 10^3 V = 1kV
0,000 001 s = 10^{-6} s = 1 μS

Definizione delle unità SI di base

Sono qui riportate le definizioni sintetiche delle unità base del sistema SI. Per un approfondimento si rimanda alle leggi di applicazione degli accordi internazionali [5-8].

UNITA' DI LUNGHEZZA: "il metro è la lunghezza del tragitto compiuto dalla luce nel vuoto in un intervallo di tempo di 1/299 792 458 di secondo"; è così fissata, per definizione, la velocità della luce in 299 792 458 m/s.

UNITA' DI MASSA:"il kilogrammo è l'unità di massa ed è eguale alla massa del prototipo internazionale" il prototitpo internazionale, cilindro di platino iridio, è conservato presso il BIPM (Bureau International des Poids et mesures)".

UNITA' DI TEMPO: "il secondo è l'intervallo di tempo che contiene 9 192 631 770 periodi della radiazione corrispondente alla transizione tra i due livelli iperfini dello stato fondamentale dell'atomo di cesio 133".

UNITA' DI CORRENTE ELETTRICA: "l'ampere è l'intensità di corrente elettrica che, mantenuta costante in due conduttori paralleli, di lunghezza infinita, di sezione circolare trascurabile e posti alla distanza di un metro l'uno dall'altro, nel vuoto, produrrebbe tra i due conduttori la forza di 2x10-7 newton per ogni metro di lunghezza".

UNITA' DI TEMPERATURA TERMODINAMICA: "il kelvin, unità di temperatura termodinamica, è la frazione 1/273,16 della temperatura termodinamica del punto triplo dell'acqua". La temperatura termodinamica si indica con il simbolo T; il valore numerico della temperatura Celsius (indicata con t) in gradi celsius è data da: t/°C = T/K-273,15.

UNITA' DI QUANTITA' DI SOSTANZA: "la mole è la quantità di sostanza di un sistema che contiene tante entità elementari quanti sono gli atomi in 0,012 kg di carbonio 12. Le entità elementari devono essere specificate e possono essere atomi, molecole, ioni, elettroni, ecc, ovvero gruppi specificati di tali particelle" In questa definizione va inteso che gli atomi di carbonio 12 sono non legati e nello stato fondamentale.

UNITA' DI INTENSITA' LUMINOSA: "la candela è l'intensità luminosa, in una data direzione, di una sorgente che emette una radiazione monocromatica di frequenza 540 x 1012 hertz e la cui intensità energetica in quella direzione è 1/683 watt allo steradiante"

Organizzazione del SI

La *Convenzione del Metro* è un trattato diplomatico che trasferisce alla *Conférence Générale des Poids et Mesures* (CGPM), al *Comité International des Poids et Mesures* (CIPM) e al *Bureau International des Poids et Mesures* (BIPM) l'autorità di operare per quanto riguarda le questioni relative alla metrologia con particolare riferimento alla definizione di standard di misura caratterizzati da sempre minore incertezza ed alle necessità di mantenere l'equivalenza fra gli standard nazionali dei paesi aderenti.

La Convenzione è stata firmata a Parigi nel 1875 dai rappresentanti di diciassette paesi. L'attuazione della Convenzione è ottenuta mediante una struttura organizzativa permanente finanziata dai governi dei paesi aderenti. La convenzione, aggiornata nel 1921, costituisce il fondamento degli accordi internazionali sulle unità di misura. Attualmente gli stati aderenti alla convenzione sono cinquantuno ed includono tutti i paesi maggiormente industrializzati.

Il BIPM opera sotto la supervisione esclusiva del CIPM che costituisce di fatto l'organo politico della struttura. Il BIPM ha il compito istituzionale di assicurare la compatibilità delle misure a livello mondiale mediante la tracciabilità delle stesse al SI. Il BIPM svolge ricerca relativa alla misurazione, organizza campagne di interscambio di campioni di misura nazionali ed esegue tarature per conto degli stati membri della Convenzione.

Gli istituti metrologici nazionali hanno il compito istituzionale di conservare i campioni (primari) nazionali delle varie grandezze. I campioni nazionali devono essere compatibili tra loro e con il campione conservato a cura del BIPM.

Con legge 11 agosto 1991 n. 273 in Italia è attivo il "Sistema Nazionale di Taratura" (SNT), il cui compito è di assicurare la riferibilità dei risultati delle misurazioni ai campioni nazionali. Costituiscono il SNT gli istituti metrologici primari ed i Centri di taratura. Svolgono le funzioni di Istituti metrologici primari:

- l'Istituto di Metrologia Gustavo Colonnetti del Consiglio Nazionale delle Ricerche, di Torino, per i campioni riguardanti le unità di misura impiegate nel campo della meccanica e della termologia (http://www.imgc.to.cnr.it/);
- l'Istituto Elettrotecnico Nazionale Galileo Ferraris, di Torino, per i campioni riguardanti le unità di misura del tempo e delle frequenze e per le unità di misura impiegate nel campo dell'elettricità, della fotometria, dell'optometria e dell'acustica (http://www.ien.it/);
- l'Ente per le Nuove Tecnologie, l'Energia e l'Ambiente (ENEA) di Roma, per i campioni nazionali delle unità di misura impiegate nel campo delle radiazioni ionizzanti (http://www.enea.it/).

Gli istituti metrologici garantiscono la disseminazione delle unità di misura all'interno del territorio nazionale avvalendosi della collaborazione dei Centri di taratura accreditati che costituiscono la rete del servizio di taratura in Italia (SIT).

La riferibilità al sistema SI di un generico strumento di misura passa attraverso la catena di taratura: in genere uno strumento di misura "da lavoro" viene tarato utilizzando uno strumento di classe superiore o "da laboratorio". Gli strumenti da laboratorio vengono tarati da un laboratorio del SIT che a sua volta è certificato dall'istituto metrologico. Attraverso una catena ininterrotta, la misura di un qualsiasi strumento può essere riferita al campione primario.

Operatività SIT

L'istituto metrologico, prima di accreditare un laboratorio come appartenente al SIT, compie una serie di attività che possiamo così schematizzare come segue:

a) verifica che siano stati definiti i settori di misura, cioè le grandezze, i relativi campi di misura e i livelli di incertezza, per cui il laboratorio fa richiesta di essere accreditato.

b) accerta che il laboratorio disponga di

- campioni di prima linea, dotati di riferibilità documentata agli istituti metrologici primari nazionali o eventualmente a quelli di Paesi con i quali esiste un mutuo riconoscimento; i campioni di prima linea non vengono comunque fisicamente utilizzati per tarare gli strumenti nella pratica comune;
- campioni di seconda linea e di lavoro, riferiti a quelli di prima linea secondo procedure ben determinate; questi verranno utilizzati nell'attività quotidiana di taratura;
- procedure scritte di taratura degli strumenti destinati alla misurazione delle grandezze oggetto di accreditamento;
- un ambiente di adeguate caratteristiche, per il mantenimento dei campioni e per l'esecuzione delle tarature;
- un manuale di qualità del laboratorio;

c) accerta la qualificazione del personale addetto alle attività del laboratorio nei settori di misura interessati dall'accreditamento.

d) verifica in fase di primo accreditamento, di rinnovo o di estensione la capacità metrologica del laboratorio tramite l'esecuzione di:

- "audit", consistenti nella circolazione di un campione, di tipo trasportabile, della grandezza per cui viene chiesto l'accreditamento da sottoporre alla taratura da parte del laboratorio;
- di visite periodiche di ispettori;
- dell'esame dei certificati di taratura emessi dal Centro.

e) comunica ufficialmente l'avvenuto accreditamento quale centro di taratura SIT e firma con esso una convenzione nella quale si dichiara che il laboratorio è abilitato a emettere certificati di taratura per le tarature considerate nell'accreditamento.

Capitolo 7
Specifiche

Specifiche di uno strumento

Non sempre di uno strumento si dispone del certificato di taratura rilasciato da un centro SIT, molto spesso ci si attiene alle specifiche fornite dal costruttore e riportate nell'apposita sezione del manuale d'uso. Qui troviamo la dichiarazione di un numero piuttosto elevato di parametri sulla cui definizione a volte non esiste un accordo generalizzato. Di seguito vengono elencati i parametri di uso più comune insieme con il significato ad essi attribuito.

1) *natura* della grandezza da misurare: tensione elettrica, forza, velocità, ecc.

2) *campo di misura* (range): definisce l'intervallo dei valori misurabili. Si esprime con uno o più intervalli definiti con le stesse unità di misura del misurando.

3) *campo di sicurezza*: definisce l'intervallo dei valori ammissibili per il misurando tali da non danneggiare lo strumento o comunque comprometterne il buon funzionamento.

4) *risoluzione* (resolution): è la più piccola variazione del misurando in grado di produrre una variazione della lettura. In genere non è costante nell'intero campo di misura. La risoluzione non va mai confusa con l'incertezza: possiamo infatti affermare che l'incertezza dello strumento non potrà mai essere più piccola della sua risoluzione, in genere tuttavia numerose altre componenti di incertezza si aggiungono alla componente dovuta alla risoluzione finita e non infinitesimale dello strumento. La risoluzione è normalmente dichiarata in termini assoluti con la stessa unità di misura del misurando.

5) *sensibilità* (sensitivity): è la pendenza della curva di taratura. Viene espressa come rapporto tra l'unità del misurando e l'unità di visualizzazione. Ad esempio Volt/divisione. Se lo strumento ha un comportamento non lineare la sensibilità varia all'interno del campo di misura.

6) *ripetibilità* (repeatability): è la capacità dello strumento di fornire la stessa "lettura" eseguendo ripetute misure dello stesso misurando, nelle stesse condizioni. Facendo riferimento al modello statistico dello strumento di misura, la ripetibilità coincide con l'errore standard della popolazione delle misure possibili. La ripetibilità viene stimata nel breve periodo e può essere espressa sia in termini assoluti (nella stessa unità del misurando) che in termini relativi o percentuali.

7) *stabilità* (stability): si estende la definizione di ripetibilità campionando le misure nel lungo periodo (giorni, mesi, anni). Normalmente viene espressa come deriva del valore centrale della popolazione delle misure possibili rapportata al periodo di osservazione. Ad esempio, nel caso di un voltmetro, la stabilità potrebbe essere dichiarata in mV/anno o in %FS/anno.

8) *riproducibilità* (reproducibility): è la capacità dello strumento di fornire la stessa misura dello stesso misurando anche in condizioni ambientali differenti purché le grandezze di influenza rientrino nelle specifiche previste. Si può esprimere sia in termini assoluti (nella stessa unità del misurando) che relativi al FS o percentuali.

9) *linearità* (linearity): esprime quanto la curva di taratura è ben approssimata da un segmento di retta. A seconda di quale retta viene utilizzata come retta di riferimento possiamo avere:

> *linearità terminale*: la retta di riferimento passa per i punti 0 e FS. La misura della linearità è data dall'errore standard delle misure valutando gli scostamenti rispetto alla retta di riferimento.
> *linearità indipendente*: si considerano i due segmenti di retta, paralleli fra loro, che raccogliendo tutti i punti della curva di taratura minimizzano la loro distanza. La retta di riferimento è la retta media fra le due. La linearità coincide con la distanza fra le due rette.

linearità secondo i minimi quadrati: la retta di riferimento è ottenuta applicando il metodo dei minimi quadrati. La misura della linearità è data dall'errore standard delle misure valutando gli scostamenti rispetto alla retta di riferimento.

La linearità può essere dichiarata sia in termini assoluti che relativi al FS.

10) *incertezza strumentale* (uncertainty): è l'intervallo di incertezza da associare alla misura fornita dallo strumento. Può essere espressa sia in termini di incertezza tipo che di incertezza estesa. Dal punto di vista prettamente misuristico questo è il parametro fondamentale che determina la classe di uno strumento di misura. Possono essere definiti diversi valori di incertezza a seconda di diversi campi di variabilità delle grandezze di influenza.

Grandezze di influenza

Il comportamento di uno strumento di misura è influenzato dalle condizioni ambientali in cui opera durante la misurazione. Le grandezze di influenza possono causare uno spostamento od una deformazione della curva di taratura introducendo quindi incertezza nella misura. Nel caso in cui le variabili di influenza rimangano all'interno del campo di variazione previsto dal costruttore i movimenti della curva di taratura sono in genere reversibili. Viceversa se le variabili ambientali sfuggono al controllo si può avere una staratura permanente dello strumento e, nei casi peggiori, si può arrivare al danneggiamento dello strumento stesso. Le specifiche di uno strumento vengono sempre riferite ad un preciso insieme di condizioni ambientali.

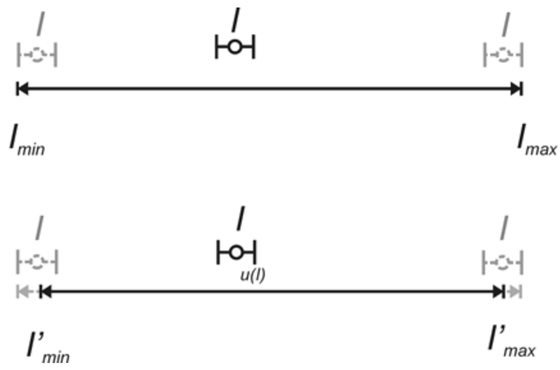

Figura 17. Definizione di campo per le grandezze di influenza.

Si dice che una grandezza di influenza di valore I e incertezza $u(I)$ è compresa in un campo $I_{min} \leftrightarrow I_{max}$ quando

$$\begin{aligned}&I_{\min} \leq I - u(I)\\&e\\&I + u(I) \leq I_{\max}\end{aligned} \qquad (78)$$

o in modo del tutto equivalente

$$\begin{aligned}&I'_{\min} \leq I \leq I'_{\max}\\&con\\&u(I) \leq u_{\max}(I)\end{aligned} \qquad (79)$$

Le condizioni definite dalle relazioni (78) e (79) sono riportate graficamente in Figura 17.
In ordine crescente di ampiezza sono definiti i seguenti campi per le grandezze di influenza:

campo di riferimento: quando la grandezza di influenza rientra in questo campo, il suo valore è compatibile con le condizioni specificate per la taratura. Il campo di riferimento definisce le condizioni *nominali* di utilizzo dello strumento;
campo di impiego: definisce i limiti della grandezza di influenza affinché lo strumento funzioni correttamente secondo le specifiche fornite;

campo di sicurezza: stabilisce i limiti della grandezza di influenza affinché lo strumento non si danneggi, non necessariamente sono rispettate le specifiche;
campo di magazzino: definisce i valori limite da rispettare anche quando lo strumento è inattivo per evitarne il danneggiamento.

Il campo di magazzino è, tra tutti i campi definiti, il più ampio. I valori definiti per questo campo devono essere rispettati durante tutta la vita dello strumento compresi i momenti dedicati al trasporto e allo stoccaggio.
Le grandezze di influenza comunemente prese in considerazione e di cui sono normalmente dichiarati almeno il campo di impiego e di magazzino sono la *temperatura*, l'*umidità relativa*, la *pressione atmosferica*, l'*ampiezza delle vibrazioni* e la resistenza a *shock meccanici*. Vibrazioni e shock meccanici sono solitamente espressi in termini di massima accelerazione ammissibile.

Bibliografia

1. A. Marzocchi, “Appunti di probabilità e statistica”, Cartolibreria Snoopy, Brescia, 2002.
2. Lorenzo Thione, “*Guida alla realizzazione e valutazione dei sistemi di gestione per la qualità dei laboratori di prova*”, monografia SINCERT, 2002.
3. UNI-CEI “*Guida all’espressione dell’incertezza di misura*”, 13005, 2000
4. B. D. Hall, R. Willink, “*Does ‘Welch-Sattertwaite’ make o good uncertainty estimate ?*”, Metrologia, Vol. 38, 2001.
5. “*Attuazione della direttiva (CEE) n. 71/316 relativa alle disposizioni comuni agli strumenti di misura ed ai metodi di controllo metrologico*”, DPR n.789, 12 agosto 1982.
6. “*Attuazione della direttiva (CEE) n. 80/181 relativa alle unità di misura*”, DPR n. 802, 12 agosto 1982.
7. Legge 11 agosto 1991 n. 273: Istituzione del Sistema Nazionale di Taratura
8. “*Regolamento concernente la determinazione dei campioni nazionali di talune unità di misura del Sistema Internazionale (SI) in attuazione dell' art. 3 della legge 11 agosto 1991 n. 273*”, DM n. 591, 30 novembre 1993.

Testi consigliati

S. Leschiutta, *Misure Elettroniche*, Pitagora Editrice Bologna.
G. Zingales, *Misure Elettriche*, UTET.
M. Bertolaccini, C. Bussolati, P.F. Manfredi, *Elettronica per misure industriali*, CLUP.

Internet

CORSI_MISURE: http://misure.ing.unibs.it
CONVENZIONE DEL METRO: http://www.bipm.fr/en/convention
ENEA: http://www.enea.it
IEN: http://www.ien.it
IMGC: http://www.imgc.to.cnr.it
NIST: http://www.nist.gov/
SINAL: http://www.sinal.it
SIT: http://sit.imgc.to.cnr.it

Glossario

accuratezza di misura: grado di concordanza tra il risultato della misurazione ed il valore vero del misurando;

campione di misure: serie di misure ripetute pensate come estratte dalla popolazione delle misure possibili;

catena di elaborazione del segnale: insieme di componenti hardware e software che elaborano il segnale che porta l'informazione di misura;

classificabile: si dice di una grandezza, non direttamente misurabile, la cui la misura si ottiene per confronto con scale di valori definite convenzionalmente;

deviazione standard: è definita come la radice quadrata della varianza;

direttamente misurabile: si dice di una grandezza per cui è fisicamente realizzabile l'operazione di somma;

errore standard della media: errore standard calcolato per la popolazione delle medie;

errore standard: è definito come la radice quadrata della varianza;

errore: scarto tra la misura ed il valore vero;

fattore di copertura: coefficiente che moltiplicato per l'incertezza tipo composta fornisce l'incertezza estesa;

gradi di libertà: numero totale di osservazioni diminuito del numero di limitazioni imposte sui dati raggruppati. Il concetto di gradi di libertà è molto importante quando il campione di osservazioni disponibili è poco numeroso.

grandezza: attributo o proprietà di un fenomeno, un corpo o una sostanza che può essere distinto qualitativamente e determinato quantitativamente;

incertezza composta: incertezza complessiva associata alla stima di un misurando che rende conto di tutte le componenti di incertezza individuabili e stimabili separatamente;

incertezza estesa: è ottenuta moltiplicando l'incertezza tipo composta per il fattore di copertura, la scelta del fattore di copertura determina il grado di confidenza associato alla fascia di incertezza;

incertezza tipo: è la grandezza universalmente accettata per esprimere l'incertezza di misura, si valuta con metodi di categoria A e B;

incertezza: parametro, associato al risultato di una misurazione, che caratterizza la dispersione dei valori ragionevolmente attribuibili al misurando;

misura (valore): espressione quantitativa di una grandezza, risultato della misurazione;

misurabile indirettamente: si dice di una grandezza la cui misura è ricavabile solo dall'elaborazione di altre grandezze;

misurabile: si dice di una proprietà descrivibile oggettivamente e quantificabile;

misurando: grandezza sottoposta a misurazione;

misurazione: insieme di operazioni sperimentali finalizzate a determinare una misura;

popolazione delle medie: distribuzione derivata in cui ciascun elemento è ottenuto calcolando la media di n elementi estratti casualmente dalla popolazione originaria;

popolazione delle misure possibili: la popolazione statistica associata con il misurando, il processo di misura e fissate le condizioni sperimentali;

processo di misura: insieme degli strumenti e delle operazioni usati per la misurazione;

relazione di taratura: relazione ricavata sperimentalmente che lega la lettura di uno strumento di misura con il valore del misurando;

riferito: si dice di un sistema di misura capace di fornire misure tracciabili all'interno di un sistema di unità di misura;

risoluzione di misura: la più piccola variazione del misurando che produce una variazione della lettura dello strumento;

strumento di misura: dispositivo utilizzato per la misurazione, accetta in ingresso il misurando e fornisce in uscita la misura;

unità di misura: qualsiasi manifestazione di una grandezza misurabile convenzionalmente scelta e accettata come riferimento standard per esprimere le misure di tale grandezza;

valore atteso: valore della media calcolata sull'intera popolazione;

valore vero: valore ottenibile da una misurazione perfetta, è indeterminato per definizione;

variabili casuali indipendenti: le rispettive distribuzioni sono scorrelate fra loro;

Appendice A: distribuzione normale

La tabella riporta l'area sottesa alla curva normale standardizzata nell'intervallo ±t.

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0,0	0,00000	0,00798	0,01596	0,02393	0,03191	0,03988	0,04784	0,05581	0,06376	0,07171
0,1	0,07966	0,08759	0,09552	0,10343	0,11134	0,11924	0,12712	0,13499	0,14285	0,15069
0,2	0,15852	0,16633	0,17413	0,18191	0,18967	0,19741	0,20514	0,21284	0,22052	0,22818
0,3	0,23582	0,24344	0,25103	0,25860	0,26614	0,27366	0,28115	0,28862	0,29605	0,30346
0,4	0,31084	0,31819	0,32551	0,33280	0,34006	0,34729	0,35448	0,36164	0,36877	0,37587
0,5	0,38292	0,38995	0,39694	0,40389	0,41080	0,41768	0,42452	0,43132	0,43809	0,44481
0,6	0,45149	0,45814	0,46474	0,47131	0,47783	0,48431	0,49075	0,49714	0,50350	0,50981
0,7	0,51607	0,52230	0,52848	0,53461	0,54070	0,54675	0,55275	0,55870	0,56461	0,57047
0,8	0,57629	0,58206	0,58778	0,59346	0,59909	0,60468	0,61021	0,61570	0,62114	0,62653
0,9	0,63188	0,63718	0,64243	0,64763	0,65278	0,65789	0,66294	0,66795	0,67291	0,67783
1,0	**0,68269**	0,68750	0,69227	0,69699	0,70166	0,70628	0,71086	0,71538	0,71986	0,72429
1,1	0,72867	0,73300	0,73729	0,74152	0,74571	0,74986	0,75395	0,75800	0,76200	0,76595
1,2	0,76986	0,77372	0,77753	0,78130	0,78502	0,78870	0,79233	0,79592	0,79945	0,80295
1,3	0,80640	0,80980	0,81316	0,81648	0,81975	0,82298	0,82617	0,82931	0,83241	0,83547
1,4	0,83849	0,84146	0,84439	0,84728	0,85013	0,85294	0,85571	0,85844	0,86113	0,86378
1,5	0,86639	0,86896	0,87149	0,87398	0,87644	0,87886	0,88124	0,88358	0,88589	0,88817
1,6	0,89040	0,89260	0,89477	0,89690	0,89899	**0,90106**	0,90309	0,90508	0,90704	0,90897
1,7	0,91087	0,91273	0,91457	0,91637	0,91814	0,91988	0,92159	0,92327	0,92492	0,92655
1,8	0,92814	0,92970	0,93124	0,93275	0,93423	0,93569	0,93711	0,93852	0,93989	0,94124
1,9	0,94257	0,94387	0,94514	0,94639	0,94762	0,94882	**0,95000**	0,95116	0,95230	0,95341
2,0	**0,95450**	0,95557	0,95662	0,95764	0,95865	0,95964	0,96060	0,96155	0,96247	0,96338
2,1	0,96427	0,96514	0,96599	0,96683	0,96765	0,96844	0,96923	0,96999	0,97074	0,97148
2,2	0,97219	0,97289	0,97358	0,97425	0,97491	0,97555	0,97618	0,97679	0,97739	0,97798
2,3	0,97855	0,97911	0,97966	0,98019	0,98072	0,98123	0,98173	0,98221	0,98269	0,98315
2,4	0,98360	0,98405	0,98448	0,98490	0,98531	0,98571	0,98611	0,98649	0,98686	0,98723
2,5	0,98758	0,98793	0,98826	0,98859	0,98891	0,98923	0,98953	0,98983	**0,99012**	0,99040
2,6	0,99068	0,99095	0,99121	0,99146	0,99171	0,99195	0,99219	0,99241	0,99264	0,99285
2,7	0,99307	0,99327	0,99347	0,99367	0,99386	0,99404	0,99422	0,99439	0,99456	0,99473
2,8	0,99489	0,99505	0,99520	0,99535	0,99549	0,99563	0,99576	0,99590	0,99602	0,99615
2,9	0,99627	0,99639	0,99650	0,99661	0,99672	0,99682	0,99692	0,99702	0,99712	0,99721
3,0	**0,99730**	0,99739	0,99747	0,99755	0,99763	0,99771	0,99779	0,99786	0,99793	0,99800
3,1	0,99806	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99837	0,99842	0,99848	0,99853	0,99858
3,2	0,99863	0,99867	0,99872	0,99876	0,99880	0,99885	0,99889	0,99892	0,99896	0,99900
3,3	0,99903	0,99907	0,99910	0,99913	0,99916	0,99919	0,99922	0,99925	0,99928	0,99930
3,4	0,99933	0,99935	0,99937	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950	0,99952
3,5	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99963	0,99964	0,99966	0,99967
3,6	0,99968	0,99969	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976	0,99977	0,99978
3,7	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99982	0,99982	0,99983	0,99984	0,99984	0,99985
3,8	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989	0,99989	0,99990	0,99990
3,9	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99993	0,99993	0,99993	0,99993
4,0	**0,99994**	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995	0,99995	0,99995	0,99996

Appendice B: distribuzione t-student

La tabella riporta i valori $t_p(\nu)$ ottenuti dalla distribuzione t-Student.

	Frazione p della distribuzione						
ν	**68,27%**	**90,00%**	**95,00%**	**95,45%**	**99,00%**	**99,73%**	**99,99%**
1	1,84	6,31	12,71	13,97	63,66	235,81	6370,54
2	1,32	2,92	4,30	4,53	9,92	19,21	100,14
3	1,20	2,35	3,18	3,31	5,84	9,22	28,01
4	1,14	2,13	2,78	2,87	4,60	6,62	15,53
5	1,11	2,02	2,57	2,65	4,03	5,51	11,18
6	1,09	1,94	2,45	2,52	3,71	4,90	9,08
7	1,08	1,89	2,36	2,43	3,50	4,53	7,89
8	1,07	1,86	2,31	2,37	3,36	4,28	7,12
9	1,06	1,83	2,26	2,32	3,25	4,09	6,59
10	1,05	1,81	2,23	2,28	3,17	3,96	6,21
11	1,05	1,80	2,20	2,25	3,11	3,85	5,92
12	1,04	1,78	2,18	2,23	3,05	3,76	5,70
13	1,04	1,77	2,16	2,21	3,01	3,69	5,51
14	1,04	1,76	2,14	2,20	2,98	3,64	5,36
15	1,03	1,75	2,13	2,18	2,95	3,59	5,24
16	1,03	1,75	2,12	2,17	2,92	3,54	5,13
17	1,03	1,74	2,11	2,16	2,90	3,51	5,04
18	1,03	1,73	2,10	2,15	2,88	3,48	4,97
19	1,03	1,73	2,09	2,14	2,86	3,45	4,90
20	1,03	1,72	2,09	2,13	2,85	3,42	4,84
21	1,02	1,72	2,08	2,13	2,83	3,40	4,78
22	1,02	1,72	2,07	2,12	2,82	3,38	4,74
23	1,02	1,71	2,07	2,11	2,81	3,36	4,69
24	1,02	1,71	2,06	2,11	2,80	3,34	4,65
25	1,02	1,71	2,06	2,11	2,79	3,33	4,62
26	1,02	1,71	2,06	2,10	2,78	3,32	4,59
27	1,02	1,70	2,05	2,10	2,77	3,30	4,56
28	1,02	1,70	2,05	2,09	2,76	3,29	4,53
29	1,02	1,70	2,05	2,09	2,76	3,28	4,51
30	1,02	1,70	2,04	2,09	2,75	3,27	4,48
35	1,01	1,69	2,03	2,07	2,72	3,23	4,39
40	1,01	1,68	2,02	2,06	2,70	3,20	4,32
45	1,01	1,68	2,01	2,06	2,69	3,18	4,27
50	1,01	1,68	2,01	2,05	2,68	3,16	4,23
60	1,01	1,67	2,00	2,04	2,66	3,13	4,17
70	1,01	1,67	1,99	2,04	2,65	3,11	4,13
80	1,01	1,66	1,99	2,03	2,64	3,10	4,10
90	1,01	1,66	1,99	2,03	2,63	3,09	4,07
100	1,01	1,66	1,98	2,03	2,63	3,08	4,05
∞	1,00	1,65	1,96	2,00	2,58	3,00	3,88

Appendice C: simboli usati

SIMBOLO	SIGNIFICATO
d	scarto tra il generico valore e la media
e	errore di misura espresso in valore assoluto
$e_{\%}$	errore di misura espresso in termini percentuali
e_{rel}	errore di misura espresso in termini relativi
f	densità di frequenza
f_r	frequenza di ripetizione
$f_{r\%}$	frequenza di ripetizione espressa in %
G_{dm}	grandezza direttamente misurabile
k	fattore di copertura
k_p	fattore di copertura associato al grado di confidenza p
m	generico elemento della popolazione delle medie
M	distribuzione delle medie
N	numerosità del campione
P	proprietà
r	numero di ripetizioni
T	tolleranza
t	variabile della distribuzione t-Student
$t_p(\nu)$	valore ottenuto dalla distribuzione t-Student per il grado di libertà ν e la probabilità p
U	incertezza estesa
U_p	incertezza estesa associata al grado di confidenza p
$u(y)$	incertezza tipo della stima di y
$u_r(y)$	incertezza tipo espressa in termini relativi
$u_c(y)$	incertezza tipo composta della stima di y
w	peso in una media pesata
$\bar{x}$	valore medio
$\hat{y}, \hat{x}$	stima di y,x
ν	gradi di libertà
ν_{eff}	gradi di libertà effettivi
$x,y,\ldots$	misura, elemento di una distribuzione
$X,Y,\ldots$	distribuzioni di valori i cui elementi corrispondenti sono $x,y,\ldots$
$S^2, S_x^2, S_m^2, \ldots$	varianza campionaria
$S, S_x, S_m, \ldots$	deviazione standard o errore standard del campione
$\sigma^2, \sigma_y^2, \sigma_p^2, \sigma_L^2$, $Var()$	varianza della popolazione
σ_m^2	varianza della popolazione delle medie
σ	deviazione standard o errore standard della popolazione
σ_m	deviazione standard o errore standard della popolazione delle medie
μ, $E()$	valore atteso della popolazione