

**ATTENZIONE! IL PRESENTE FOGLIO VA CONSEGNATO!**

**UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI BRESCIA**

**FACOLTA' DI INGEGNERIA**

Corso di Laurea di 1° livello in Ingegneria Gestionale/dell'Informazione

Anno Accademico 2001/2002

**PROBABILITÀ E STATISTICA**

**PROVA SCRITTA DEL 19 LUGLIO 2002**

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

---

**AVVERTENZE**

- **SCRIVERE CHIARAMENTE COGNOME E NOME.**
- **Inserire nei riquadri i risultati dei quesiti di calcolo (quesiti Cx).**
- Non è consentita la consultazione di testi o appunti.
- È consentito l'uso della calcolatrice tascabile, purché non programmabile.
- Si raccomanda di scrivere chiaro e leggibile, per facilitare la correzione.
- Durata della prova: **due ore**. La brutta copia può essere acclusa a discrezione del candidato.
- Gli esiti delle prove scritte saranno al più presto resi disponibili al sito internet  
<http://bsing.ing.unibs.it/~amarzocc>
- Si raccomanda la presenza alla prova orale per prendere visione in ogni caso dell'elaborato.
- Lasciare eventuali tabelle sul banco alla fine della prova.
- La prova orale avrà luogo **martedì 23 luglio** alle ore **9:30** in aula **da comunicarsi**.

---

Domanda Teorica) Siano  $A$  e  $B$  due eventi indipendenti. Dimostrare che la probabilità che si verifichi *o*  $A$  *oppure*  $B$  (uno e uno solo dei due) è

$$p(A) + p(B) - 2p(A)p(B).$$

(punti 2)

*Soluzione.* Dire *o*  $A$  *oppure*  $B$  equivale a dire  $A$  e non  $B$  oppure non  $A$  e  $B$ , cioè

$$(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B).$$

Siccome  $A \cap \bar{B}$  e  $\bar{A} \cap B$  sono evidentemente disgiunti, abbiamo innanzitutto

$$p(\text{o } A \text{ oppure } B) = p(A \cap \bar{B}) + p(\bar{A} \cap B).$$

Poi, siccome  $A$  e  $B$  sono indipendenti, abbiamo

$$p(\text{o } A \text{ oppure } B) = p(A) \cdot p(\bar{B}) + p(\bar{A}) \cdot p(B)$$

e ricordando le espressioni di  $p(\overline{A})$  e  $p(\overline{B})$  si trova subito il risultato.

---

C1) Un pezzo viene prodotto difettoso con probabilità  $p = 0.031$ . Calcolare la probabilità che in un lotto di 50 pezzi prodotti indipendentemente vi siano più di due ( $> 2$ ) pezzi difettosi. (punti 4)

*Soluzione.*

$$p(N > 2) = 1 - p(N \leq 2) = 1 - \sum_{k=0}^2 \binom{50}{k} (0.031)^k (0.969)^{50-k} \approx 0.202$$

C2) Indicare il valore atteso della variabile casuale avente densità

$$f_X(x) = C \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ e^{1-x} & x \geq 1 \end{cases}$$

dopo aver calcolato la corrispondente costante di normalizzazione. (punti 3)

*Soluzione.* Poiché

$$\int_0^1 x \, dx + \int_1^{+\infty} e^{1-x} \, dx = \frac{3}{2}$$

si deve avere  $C = 2/3$ . Poi

$$E[X] = \int_0^1 \frac{2}{3} x^2 \, dx + \int_1^{+\infty} \frac{2}{3} x e^{1-x} \, dx = \frac{14}{9}.$$

C3) Una variabile casuale  $X$  è distribuita normalmente con valore atteso 3 e deviazione standard incognita. Indicare il massimo valore della deviazione standard affinché la probabilità che  $X > 5$  sia inferiore all'1%. (punti 4)

*Soluzione.* Abbiamo

$$X > 5 \iff Z = \frac{X - 3}{\sigma} > \frac{2}{\sigma}.$$

Pertanto

$$\frac{2}{\sigma} > \Phi^{*-1}(0.49)$$

e dalle tabelle segue  $\sigma < 0.8547$ .

C4) Una linea di produzione si blocca in media 3 volte all'anno, in maniera indipendente. Indicare la probabilità che si blocchi due volte nello stesso mese.

(punti 4)

*Soluzione.* 3 volte all'anno significa  $1/4$  di volte al mese, per cui  $\lambda = 1/4$ . Quindi

$$p[N = 2] = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \frac{1}{2!} e^{-1/4} = 0.0243.$$

E1) Due prezzi  $X$  e  $Y$  sono distribuiti uniformemente sul quadrato  $[0, l] \times [0, l]$ . Si chiede:

- Calcolare la funzione di densità della somma  $Z = X + Y$ .
- Calcolare il valore atteso e la varianza di  $Z$ .
- Calcolare uno stimatore non distorto di  $l$ .
- Dati i dati campionati

$X$	1.2	1.3	1.2	1.4	1.2	1.3	1.2	1.4	1.3
$Y$	1.4	1.3	1.6	1.5	1.2	1.5	1.1	1.5	1.3

calcolare i corrispondenti valori di  $Z$  e il valore stimato di  $l$ .

Infine

- calcolare  $p[Z < 2]$ .

(punti 8)

*Soluzione.* Innanzitutto

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{l^2} \quad (x, y) \in [0, l] \times [0, l]$$

e nulla altrimenti. Poi

$$F_Z(z) = p(X + Y \leq z) = \frac{1}{l^2} \text{area}(T)$$

dove  $T$  è il triangolo di vertici  $(0, 0)$ ,  $(z, 0)$  e  $(0, z)$  se  $0 \leq z \leq l$ , e il pentagono di vertici  $(0, 0)$ ,  $(l, 0)$ ,  $(l, z - l)$ ,  $(z - l, l)$ ,  $(0, l)$  se  $l \leq z \leq 2l$ . Da un semplice calcolo delle aree segue subito

$$F_Z(z) = \begin{cases} \frac{z^2}{2l^2} & 0 \leq z \leq l \\ 1 - \frac{(2l - z)^2}{2l^2} & l \leq z \leq 2l. \end{cases}$$

Ne segue

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{z}{l^2} & 0 \leq z \leq l \\ \frac{(2l - z)}{l^2} & l \leq z \leq 2l. \end{cases}$$

che è simmetrica rispetto a  $z = l$ . Quindi per simmetria  $E[Z] = l$ . Poi

$$E[Z^2] = \int_0^l \frac{z^3}{l^2} dz + \int_l^{2l} z^2 \frac{(2l-z)}{l^2} dz = \frac{7}{6}l^2$$

per cui

$$\text{var}[Z] = \frac{l^2}{6}.$$

Poiché  $E[Z] = l$ , uno stimatore non distorto di  $l$  è  $\bar{X}_n$ . Dal calcolo dei valori si trova  $l = 2.65$  e

$$p[Z < 2] = \int_0^2 \frac{z}{(2.65)^2} dz \approx 28.47\%.$$

NOTA: Questo esercizio si poteva risolvere fino al punto *d*) anche senza effettuare il punto *a*). Bastava osservare che  $X$  e  $Y$  sono distribuite uniformemente su  $[0, l]$  e indipendenti, per cui

$$E[Z] = E[X] + E[Y] = l$$

e

$$\text{var}[Z] = \text{var}[X] + \text{var}[Y] = 2 \frac{l^2}{12} = \frac{l^2}{6}.$$

E2) Data la variabile casuale di Poisson avente densità

$$f_X(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \quad (x \in \mathbb{N})$$

calcolare lo stimatore di  $\lambda$  di massima verosimiglianza.

Supponendo poi di avere i seguenti dati campionati

$$2, 3, 2, 4, 3, 5, 4, 2, 3, 2, 3, 4, 2, 3, 4, 3, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 3, 4$$

calcolare il valore stimato di  $\lambda$  e trovare  $p[X = 1]$ .

(punti 6)

*Soluzione.* Abbiamo

$$L = \frac{\lambda^{x_1 + \dots + x_n}}{x_1! \dots x_n!} e^{-n\lambda}$$

per cui

$$\frac{d}{d\lambda} \log L = \frac{x_1 + \dots + x_n}{\lambda} - n.$$

Pertanto  $\log L$  è estrema per  $\lambda = \bar{X}_n$ . Poi

$$\frac{d^2}{d\lambda^2} \log L = -\frac{x_1 + \dots + x_n}{\lambda^2} < 0.$$

Dai dati segue infine  $\lambda = 77/42 \approx 3.2$ , per cui

$$p[X = 1] \approx 0.13.$$