

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI BRESCIA



FACOLTA' DI INGEGNERIA

Corso di Laurea in Ingegneria dell'Informazione

Anno Accademico 2001/2002

PROBABILITÀ E STATISTICA

PROVA SCRITTA DEL 15 NOVEMBRE 2001

AVVERTENZE

- Non è consentita la consultazione di testi o appunti.
 - È consentito l'uso della calcolatrice tascabile, purché non programmabile.
 - Si raccomanda di scrivere chiaro e leggibile, per facilitare la correzione.
 - La durata della prova è di **due ore**. La brutta copia può essere acclusa a discrezione del candidato.
 - Gli esiti delle prove scritte saranno al più presto resi disponibili al sito internet
<http://bsing.ing.unibs.it/~amarzocc>
 - Anche in presenza di un esito negativo, si raccomanda la presenza alla prova orale per prendere visione dell'elaborato.
 - Il presente foglio può essere trattenuto dal candidato. Lasciare eventuali tabelle sul banco alla fine della prova.
 - La prova orale avrà luogo **mercoledì 21 novembre alle ore 15:30 in aula da comunicarsi**.
-

1) Il sistema operativo del computer centrale in una certa ditta si blocca in maniera casuale in media cinque volte al mese, causando un blocco dell'attività lavorativa e una perdita pari a 2 ore lavorative per utente per il riavvio del sistema. Si chiede di calcolare la probabilità di avere una settimana (di cinque giorni) senza blocco e la probabilità che vi siano più di due arresti al giorno (di otto ore lavorative). Calcolare poi il valore atteso del numero di ore perse per anno lavorativo (1 anno=48 settimane) per una ditta con 4 dipendenti.

(punti 5)

2) Un materiale ferromagnetico è costituito da $N = 10^6$ domini microscopici che possono avere magnetizzazione verso l'alto o verso il basso, ciascuno con intensità pari a 1 nanotesla (nT), distribuita in maniera indipendente dominio per dominio. In condizioni normali la probabilità p , uguale per ciascun dominio, di essere in uno dei due stati di magnetizzazione è 0.5, mentre sotto l'azione di un campo magnetizzante la probabilità di avere una magnetizzazione di un segno (convenzionalmente positivo) sale a 0.7. Sapendo che la magnetizzazione totale B del materiale è pari alla differenza fra il numero n di domini orientati in verso positivo e il numero $N - n$ orientati al contrario, ossia $B = 2n - N$, si chiede:

- a) la distribuzione del campo magnetico B in funzione di p , tenuto conto dell'alto numero di domini;
- b) il valore atteso del campo magnetico B del materiale in condizioni normali e sotto l'azione del campo magnetizzante;
- c) la probabilità che in condizioni normali il campo magnetico del materiale sia superiore a $+1250$ nT;
- d) la probabilità che il campo magnetico B del materiale sotto l'azione del campo magnetizzante sia inferiore a $3.98 \cdot 10^{-4}$ T (pari a 398 000 nT);

(punti 7)

3) Le concentrazioni di due inquinanti in atmosfera, misurate in parti per milione (ppm) seguono una distribuzione costante sulla regione triangolare di vertici $(0, 0)$, $(1.5, 0)$ $(0, 1.5)$. Determinare il valore atteso di X e Y . Dire se X e Y sono indipendenti. Determinare poi la densità della massima fra le due concentrazioni. (Si tenga presente che $\max\{x, y\} \leq z$ equivale a $x \leq z$ e $y \leq z$). Determinare infine il valore atteso di tale massimo e la probabilità che tale massimo superi 1 ppm.

(punti 8)

4) Un segnale radio viene emesso con frequenza distribuita normalmente e con valore atteso μ e deviazione standard 25 kHz. Supponendo di osservare la seguente serie di frequenze:

610	601	578	615	640	630	618	602	613	610	625	585	622	608	597
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

determinare una stima di μ e la probabilità che la frequenza stia nell'intervallo $[590, 610]$ kHz. Determinare poi un intervallo di confidenza per μ al 95%.

(punti 7)

_____ QUESITI TEORICI _____

A) Una variabile casuale dipendente da un parametro ϑ è tale che il suo valore atteso è proporzionale a ϑ . Dimostrare che lo stimatore di ϑ col metodo dei momenti non è distorto.

(punti 2)

B) Dimostrare che se per una variabile casuale continua avente densità f_X esiste un punto x_0 tale che in x_0 la corrispondente funzione di ripartizione è pari a 1, allora $f_X(x) = 0$ per ogni $x \geq x_0$.

(punti 2)

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI BRESCIA

FACOLTA' DI INGEGNERIA

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Anno Accademico 2000/2001

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ
E STATISTICA MATEMATICA

PROVA SCRITTA DEL 14 SETTEMBRE 2001

AVVERTENZE

- Non è consentita la consultazione di testi o appunti.
- È consentito l'uso della calcolatrice tascabile, purché non programmabile.
- Si raccomanda di scrivere chiaro e leggibile, per facilitare la correzione.
- La durata della prova è di due ore. La brutta copia può essere acclusa a discrezione del candidato.
- Gli esiti delle prove scritte saranno al più presto resi disponibili al sito internet
<http://bsing.ing.unibs.it/~amarzocc>
- Anche in presenza di un esito negativo, si raccomanda la presenza alla prova orale per prendere visione dell'elaborato.
- Il presente foglio può essere trattenuto dal candidato. Lasciare eventuali tabelle sul banco alla fine della prova.
- La prova orale avrà luogo mercoledì 19 settembre 2001 alle ore 14.30 in aula da comunicarsi.

- 1) Il diametro di un certo frutto è distribuito normalmente con valore atteso 5 cm e deviazione standard 1.1 cm, secondo le tabelle agronomiche. Trovare la probabilità che un frutto abbia diametro superiore a 7.5 cm, con due cifre decimali significative. Sapendo che il raccolto si prevede di 100 000 frutti e che ne servirebbero 1200 di essi di diametro superiore a 7.5 cm per delle selezioni pregiate, stimare la probabilità che si abbiano più di 1200 frutti nel raccolto. Durante il raccolto, supponendo poi che il valore $\sigma = 1.1$ sia corretto, si trova che i frutti hanno la seguente distribuzione:

diam.	3.5	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7	7.5
N.	230	444	751	2306	1065	852	413	211	89

Trovare la probabilità che il valore atteso di 5 cm non sia corretto.
(punti 8)

- 2) Una certa variabile casuale X è distribuita linearmente con coefficiente angolare negativo da zero fino a un valore $a > 0$. Determinare l'espressione analitica della distribuzione di X e l'espressione analitica della funzione di ripartizione, al variare di a . Trovare poi uno stimatore non distorto di a e calcolare la sua varianza. Quanti campioni sono necessari perché la varianza dello stimatore sia inferiore a 1?

(punti 6)

$$f_X(x) = \frac{2-x}{a} \quad 0 \leq x \leq a$$

$$F_X(x) = \int_0^x \frac{2-t}{a} dt = \frac{2x - \frac{x^2}{2}}{a} \quad 0 \leq x \leq a$$

3) Il raggio di una particella di carbone disciolto, espresso in μm , è distribuito esponenzialmente con parametro $\lambda = 2.1$. Determinare la distribuzione di probabilità della sua superficie e il suo valore atteso.

(punti 4)

4) Degli elettroni emessi da una sorgente coprono una distanza s in un tempo t , distribuiti in modo indipendente e uniformemente rispettivamente sull'intervallo $[0, 5]$ (in mm) e sull'intervallo $[0, 3]$ (in nanosecondi). Trovare la probabilità che un elettrone abbia velocità superiore a $2/3$ della velocità della luce. (1 nanosecondo = 10^{-9} secondi, velocità della luce = $3 \cdot 10^8$ m/s).

(punti 4)

- 4) In una confezione di vernici è dichiarata una percentuale inferiore allo 0.1% di sostanze cancerogene. Un test effettuato con 10 confezioni in uguali condizioni ha dato i seguenti risultati:

0.076	0.095	0.121	0.130	0.082	0.087	0.091	0.080	0.106	0.098
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

$$\bar{x} = 0.098$$

$$s_x = 0.0144$$

$$T = 2.18, 088$$

$$T_{0.99}(9) = 2.82143$$

Se la legislazione richiede che il 99% delle confezioni deve rispettare, per grandi partite, il limite suddetto, si chiede di effettuare un test di Student e determinare se la vernice si può o meno immettere sul mercato.

(punti 5)

$$\Rightarrow T > t_{0.99}(9)$$

\Rightarrow al 99% dichiarata interf. non vera

\Rightarrow vernice non si può immettere

QUESITI TEORICI

A) Dare la definizione di funzione di densità marginale di una variabile bidimensionale e mostrare che si tratta di una funzione di densità.

(punti 2)

B) Siano A e B due eventi disgiunti, non vuoti e indipendenti. Mostrare che

$$\frac{1}{p(A \cap B | A \cup B)} = \frac{1}{p(A)} + \frac{1}{p(B)}.$$

(punti 2)

Inserzione pubblicitaria

AVVISO AGLI STUDENTI

Il prossimo mese di settembre prenderanno il via i corsi integrativi, tenuti dal prof. Marzocchi, di

STATISTICA AL CALCOLATORE INTRODUZIONE AL CAOS DETERMINISTICO

rivolti agli allievi ingegneri. Chiunque fosse interessato è pregato di contattare il prof. Marzocchi.

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI BRESCIA

FACOLTA' DI INGEGNERIA

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Anno Accademico 2000/2001

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA MATEMATICA

PROVA SCRITTA DEL 5 SETTEMBRE 2001

AVVERTENZE

- Non è consentita la consultazione di testi o appunti.
- È consentito l'uso della calcolatrice tascabile, purché non programmabile.
- Si raccomanda di scrivere chiaro e leggibile, per facilitare la correzione.
- La durata della prova è di due ore. La brutta copia può essere acclusa a discrezione del candidato.
- Gli esiti delle prove scritte saranno al più presto resi disponibili al sito internet <http://bsing.ing.unibs.it/~amarzocc>
- Anche in presenza di un esito negativo, si raccomanda la presenza alla prova orale per prendere visione dell'elaborato.
- Il presente foglio può essere trattenuto dal candidato. Lasciare eventuali tabelle sul banco alla fine della prova.
- La prova orale avrà luogo martedì 11 settembre 2001 alle ore 14.30 in aula da comunicarsi.

1) Il valore di una azione, n giorni ($n \geq 1$) dopo una certa data fissata è supposto distribuito normalmente con valore atteso 2.33 Euro e deviazione standard $0.07\sqrt{n}$ Euro. Si chiede di trovare:

- a) la probabilità che il valore dopo 10 giorni sia superiore a 2.8 Euro;
- b) la probabilità che il valore dopo 5 giorni sia inferiore a 2.28 Euro;
- c) il numero di giorni dopo il quale la probabilità che il valore dell'azione sia più che raddoppiato è superiore al 4%.

(punti 7)

2) Due diverse compagnie telefoniche offrono i loro servizi con differenti sistemi tariffari. La prima chiede 420 lire al minuto per ogni conversazione, senza ulteriori spese. La seconda chiede invece 380 lire al minuto più 100 lire ad ogni risposta. Supponendo che la probabilità di eseguire una telefonata della durata di T secondi sia modellizzata da una variabile casuale avente densità

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda^2} t e^{-t/\lambda} & t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

si chiede:

- a) trovare lo stimatore di massima verosimiglianza di λ e mostrare che è non distorto;

- c) supponendo che la durata di alcune conversazioni sia data dai valori (in secondi)

95	81	86	215	340	30	48	102	135	102	115	85
----	----	----	-----	-----	----	----	-----	-----	-----	-----	----

dedurre il valore di λ secondo lo stimatore trovato.

- d) assumendo il precedente valore di λ stabilire il valore atteso di una conversazione e determinare l'offerta più conveniente per una conversazione avente tale durata;
e) calcolare la probabilità che la durata di una conversazione sia tale da rendere più vantaggiosa l'altra offerta.

(punti 8)

- 3) La base b e il lato obliquo l di un triangolo isoscele sono distribuiti uniformemente nel rettangolo $[0, 5] \times [0, 9]$, dove la prima componente si riferisce a b e la seconda a l . Determinare la distribuzione del perimetro del triangolo, il suo valore atteso e la sua varianza.

(punti 5)

- 4) Un produttore di automobili dichiara che un certo modello ha velocità massima superiore a 192 km/h. Un test effettuato con 17 modelli in uguali condizioni ha dato i seguenti risultati:

195	190	191	197	194	193	194	190	195	192	191	189	190	191	190	192	191
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Si chiede di stabilire se l'affermazione del produttore è attendibile secondo il test di Student al 99.5%.

(punti 7)

QUESITI TEORICI

- A) Dare la definizione di variabile casuale unidimensionale.

(punti 2)

- B) Se A e B sono due eventi disgiunti ed entrambi indipendenti da un evento C , dimostrare che anche $A \cup B$ è indipendente da C .

(punti 2)

Inserzione pubblicitaria

AVVISO AGLI STUDENTI

Il prossimo mese di settembre prenderanno il via i corsi integrativi, tenuti dal prof. Marzocchi, di

STATISTICA AL CALCOLATORE INTRODUZIONE AL CAOS DETERMINISTICO

rivolti agli allievi ingegneri. Chiunque fosse interessato è pregato di contattare il prof. Marzocchi.

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI BRESCIA

FACOLTA' DI INGEGNERIA

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Anno Accademico 2000/2001

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA MATEMATICA

PROVA SCRITTA DEL 17 LUGLIO 2001

AVVERTENZE

- Non è consentita la consultazione di testi o appunti.
- È consentito l'uso della calcolatrice tascabile, purché non programmabile.
- Si raccomanda di scrivere chiaro e leggibile, per facilitare la correzione.
- La durata della prova è di **due ore**. La brutta copia può essere acclusa a discrezione del candidato.
- Gli esiti delle prove scritte saranno al più presto resi disponibili al sito internet
<http://bsing.ing.unibs.it/~amarzocc>
- Anche in presenza di un esito negativo, si raccomanda la presenza alla prova orale per prendere visione dell'elaborato.
- Il presente foglio può essere trattenuto dal candidato. Lasciare eventuali tabelle sul banco alla fine della prova.
- La prova orale avrà luogo **venerdì 20 luglio 2001 alle ore 14.30 in aula da comunicarsi**.

1) Un pezzo viene levigato 10 volte da una macchina levigatrice e ad ogni passaggio vi è una probabilità $p = 3.6\%$ che la macchina si inceppi. Trovare la probabilità che per un dato pezzo la macchina si inceppi più di quattro volte (> 4), supponendo indipendenza.

Si supponga poi che ad ogni passaggio lo spessore del pezzo sia ridotto di una quantità distribuita normalmente con valore atteso 0.05 mm e deviazione standard 0.01 mm. I pezzi partono con uno spessore costante pari a 2.48 mm e si considerano difettosi se il loro spessore finale è esterno all'intervallo $[1.90, 2.10]$, espresso in mm. Calcolare la probabilità che un pezzo risulti difettoso dopo i dieci passaggi.

AmMESSO che un pezzo sia irreparabilmente danneggiato se la macchina si è inceppata anche solo una volta, calcolare la probabilità di avere un pezzo danneggiato o difettoso. Producendo 10000 di tali pezzi, dare una stima della probabilità che 150 di essi siano danneggiati o difettosi.

Sia infine S_n la variabile casuale che dà lo spessore del pezzo dopo n passaggi (supposti avvenuti senza inceppamenti). Determinare la distribuzione di S_n , il suo valore atteso e la sua deviazione standard.

Se un pezzo risulta, dopo i dieci passaggi, avere uno spessore pari a 2.2 mm, calcolare il numero di ulteriori passaggi necessari affinché sia del 90% la probabilità che lo spessore scenda sotto il valore di 2.10 mm.

(punti 10)

2) Nella produzione di una gettoniera viene costruito un pezzo in grado di riconoscere il peso delle monete. L'intervallo di peso riconosciuto è distribuito normalmente con valore atteso

3 g e deviazione standard da determinarsi. Si sa che due monete di diverso valore pesano rispettivamente 14 e 19 grammi e che la gettoniera non può essere venduta se confonde queste due monete. Determinare la massima deviazione standard necessaria affinché, supponendo di produrre molti pezzi, sia del 4% la percentuale di gettoniere difettose.

(punti 5)

3) La densità di probabilità rappresentante il rapporto fra i valori di due indici azionari cresce in modo direttamente proporzionale a x per x compreso fra 0 e 1 e decresce in modo inversamente proporzionale a x^4 per x maggiore di 1 (per $x < 0$ è nulla). Sapendo che si tratta di una funzione continua, si chiede:

- scrivere l'espressione analitica della densità;
- determinare il valore atteso del rapporto fra gli indici e la relativa varianza,
- calcolare la probabilità che il rapporto sia superiore a 2.

(punti 6)

4) Le quantità X e Y di due componenti ausiliarie di una lega metallica sono distribuite secondo una variabile casuale bidimensionale avente funzione di densità data da

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{3}(x^2 + y) e^{-x-y} & x, y \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si immagini che un pezzo prodotto con questa lega non possa avere $Y > 10X$. Calcolare la probabilità di avere un pezzo difettoso. Supposto poi che tale funzione possa non rappresentare la situazione reale, si costruiscono 1000 pezzi e 35 di essi risultano difettosi. Qual è la probabilità che la densità annunciata non sia corretta?

(punti 6)

_____ QUESITI TEORICI _____

A) Sia X una variabile casuale e sia g una funzione positiva. Mostrare che la variabile casuale $Y = g(X)$ ha funzione di ripartizione nulla per $y \leq 0$.

(punti 2)

B) Enunciare e dimostrare la formula di Bayes.

(punti 2)

Inserzione pubblicitaria

AVVISO AGLI STUDENTI

Il prossimo mese di **settembre** prenderanno il via i corsi integrativi, tenuti dal prof. Marzocchi, di

STATISTICA AL CALCOLATORE INTRODUZIONE AL CAOS DETERMINISTICO

rivolti agli allievi ingegneri. Chiunque fosse interessato è pregato di contattare il prof. Marzocchi.