ANTONINO SOMMARIVA

FONDAMENTI DI TEORIA DEI CIRCUITI

Bozza del 10 maggio 2006

Indice

Capitolo 1

Modello di Kirchhoff

In questo capitolo sarà presentato il modello di Kirchhoff dei circuiti elettrici.

1.1 Struttura grafico-topologica dei circuiti

I circuiti fisici sono manufatti che sfruttano i fenomeni elettrici per realizzare determinati scopi. I modelli dei circuiti fisici sono detti circuiti ideali. La Teoria dei Circuiti Superiore studia i circuiti ideali in modo squisitamente matematico. La Teoria dei Circuiti Elementare invece studia i circuiti ideali in modo grafico-matematico.

I circuiti fisici sono immersi nello spazio tridimensionale, ma, ovviamente, la rappresentazione grafica convenzionale dei circuiti ideali (nel seguito, però, solo circuiti, per brevità) si realizza nel piano mediante opportune regole e convenzioni.

I circuiti consistono di componenti e nodi. I componenti si differenziano per topologia e per natura (si veda il Capitolo 2). Se si prescinde per il momento dalla natura, essi si rappresentano nel piano mediante una figura semplice chiusa (genericamente poligonale o circolare) detta nucleo, in cui incidono alcuni archi di curva semplici distinti, detti terminali o poli, a seconda del contesto. La differenziazione topologica tra i componenti consiste soltanto nel numero dei terminali. Se p sono i terminali, il componente è detto a p-terminali o p-polare o, in breve, un p-polo (bipoli, tripoli, quadripoli, etc). Qui si prenderanno in considerazione per lo più bipoli, tripoli e quadripoli di un tipo particolare, i doppi bipoli (si veda il Capitolo 2). In particolare, è prassi rappresentare un generico bipolo con un rettangolo allungato dal mezzo dei cui lati corti si staccano i due archi, e un generico doppio bipolo con due di queste figure. I nodi si rappresentano nel piano mediante cerchietti scuri. Un insieme di componenti e nodi rappresentati nel piano si dice uno schema circuitale valido sse ogni terminale di ciascun componente insiste tra un nucleo e un nodo e a ogni nodo afferisce almeno un terminale. I punti di giunzione tra terminali e nuclei si dicono morsetti. Terminali e nodi nell'insieme si dicono contatti, nuclei e nodi si dicono centri. Dato un contatto, si dice nodo associato al contatto, se il contatto è un nodo, il nodo stesso, se il contatto è un terminale, il nodo cui il terminale afferisce.

Evidentemente, uno stesso circuito può essere rappresentato mediante innumerevoli schemi validi, apparentemente anche molto diversi tra loro, ma ciò, come si vedrà meglio nel seguito, non ha nessun particolare significato. In generale, però, si cerca di evitare ogni sovrapposizione tra i vari enti grafici, salvo ammettere, se altrimenti impossibile, qualche incrocio tra terminali. Un circuito si dice planare sse esiste un suo schema planare, ossia tracciato nel piano senza sovrapposizioni tra nuclei, terminali e nodi.

Occorre tenere presente che spesso lo schema di un circuito è disegnato in modo non del tutto coerente con le regole enunciate sopra. In particolare, quasi sempre i terminali sono rappresentati mediante spezzate a tratti orizzontali e verticali, e i nodi non sono ben evidenziati o addirittura non sono evidenziati del tutto. In questo caso, conviene formulare una congettura sui possibili nodi e poi verificarla tenendo conto che due nodi non possono mai essere direttamente connessi da un terminale. Quindi, se nello schema due candidati nodi sono in tale condizione, essi e il presunto terminale sono in realtà lo stesso nodo un po' stirato.

1.1.1 Notazione

Ovviamente, occorre distinguere nello schema (e poi nel testo) i componenti, i loro terminali e i nodi con opportuni simboli numerici, letterali o misti. Qui si adotterà un approccio insiemistico; in particolare si userà:

- per l'insieme dei componenti del circuito il simbolo $\mathcal{K}$;
- per i componenti nello schema lettere latine o greche, le prime per lo più stampatello, eventualmente con pedice numerico, ricorrendo, nel caso generico, alla lettera K (K_1, K_2), e, per certe categorie, a lettere specifiche (R per i resistori, C per i condensatori, L per gli induttori, M per gli induttori accoppiati, etc);
- per l'insieme dei terminali del componente K il simbolo $\mathcal{T}_K$;
- per i terminali del componente K nello schema lettere minuscole (a, b), e in corrispondenza, nel testo, le stesse lettere con pedice K (a_K, b_K);
- per l'insieme dei terminali afferenti al nodo N il simbolo $\mathcal{T}_N$;
- per l'insieme di tutti i terminali dei componenti del circuito il simbolo $\mathcal{T}$;
- per l'insieme dei nodi il simboli $\mathcal{N}$;
- per i nodi del circuito nello schema numeri interi o lettere stampatello cerchiati (①, ②, Ⓐ, Ⓑ,), e in corrispondenza, nel testo, gli stessi numeri o lettere non cerchiati (1, 2, A, B).

1.1.2 Terminologia

Si dice coppia di contatti un paio ordinato di contatti. Le due coppie associate a uno stesso paio di contatti si dicono opposte. La coppia in considerazione si segnala nello schema apponendo un segno "+" accanto al primo contatto e un segno "−" accanto al secondo contatto, nel testo mediante il modo matematico consueto (esempio: se i contatti sono il terminale a del componente K_1 e il nodo 1, allora si scrive $(a_{K_1}, 1)$). I simboli "+" e "−" non significano affatto che qualcosa nel circuito abbia un valore positivo o negativo; si tratta solo di un espediente grafico usato per segnalare la coppia di contatti di interesse, espediente peraltro non universalmente condiviso.

Si dice terminale orientato ciascuno dei due archi orientati relativi a un dato terminale. I due terminali orientati associati ad uno stesso terminale si dicono opposti. Il terminale orientato in considerazione si segnala nello schema sovrapponendo una freccia all'arco, nel testo (ma in una prima fase soltanto) aggiungendo un apice al simbolo del terminale stesso (a') per l'orientamento entrante nel nucleo, e un doppio apice (a'') per l'orientamento uscente dal nucleo. La freccia non significa affatto che qualcosa nel circuito segua la direzione indicata dalla freccia; si tratta solo di un espediente grafico usato per segnalare il terminale orientato di interesse, espediente peraltro non universalmente condiviso.

Si dice percorso di un circuito una qualsiasi linea semplice lungo le strutture grafiche dello schema. Il percorso si dice aperto o chiuso, orientato o meno a seconda che la corrispondente linea sia aperta o chiusa, dotata di orientamento o meno. L'orientamento si rappresenta nello schema sovrapponendo al percorso una freccia. Per agio grafico, spesso, il percorso si rappresenta affiancato e non sovrapposto alle strutture interessate. Un percorso chiuso si dice anche maglia. Una maglia che non abbia nodi, nuclei o terminali al suo interno (esterno) si dice anello (anello esterno). Gli anelli di un circuito planare si dicono uniformemente orientati sse i loro orientamenti sui percorsi comuni sono opposti. Si dice che una sequenza di contatti è appoggiata a un percorso o a una maglia o a un anello, sse i suoi elementi sono i contatti consecutivi incontrati lungo un percorso o una maglia o un anello orientati.

Si dice sezione di un circuito una qualsiasi linea semplice chiusa che intersechi uno schema del circuito solo in corrispondenza di terminali e non più di una volta per ciascun terminale. La sezione si dice orientata o meno a seconda che la corrispondente linea sia dotata o meno di normale orientata. La sezione si rappresenta nel piano dello schema con una linea tratteggiata, che interseca solo i terminali interessati, e l'orientamento con un segmento ad essa ortogonale dotato di freccia. Le due sezioni orientate associate ad una stessa sezione si dicono opposte. Si dice sezione nodale una sezione che racchiuda solo un nodo. Si dice sezione nucleare una sezione che racchiuda solo un nucleo. Una sezione nodale o nucleare si dice espansa sse racchiude un solo nodo o un solo nucleo, rispettivamente.

Un circuito si dice connesso (in senso topologico) sse per ogni coppia di nodi esiste almeno un percorso dall'uno all'altro nodo. Se il circuito non è connesso, si dice che consta di parti connesse. Un circuito si dice ciclicamente connesso (in senso topologico) sse per ogni coppia di nodi esistono almeno due percorsi completamente distinti dall'uno all'altro nodo.

1.2 Tipi di variabili del modello di Kirchhoff

La sola variabile indipendente dei circuiti è il tempo con simbolo t, valore dimensionale [t], unità di misura il secondo con simbolo s, e dominio $\mathbf{R}$ (i numeri reali). Le altre variabili in gioco sono associate alle strutture topologiche dei circuiti e sono di due tipi fondamentali:

- tensioni con simbolo generale v o e (si veda oltre), valore dimensionale [V] e unità di misura il volt con simbolo V;

- correnti con simbolo generale i o j (si veda oltre), valore dimensionale [I] e unità di misura l'ampere con simbolo A.

Talora, a queste variabili, dette primarie, si aggiungono, per varî motivi, variabili di due altri tipi, dette secondarie, che ne sono gli integrali:

- flussi con simbolo generale ϕ, valore dimensionale [V][t], e unità di misura il weber con simbolo Wb;

- cariche con simbolo generale q, valore dimensionale [I][t], e unità di misura il coulomb con simbolo C.

Il numero di variabili che saranno definite sui circuiti potrà sembrare eccessivo, ma occorre tenere presente che ciascuna di esse corrisponde ad una grandezza effettivamente misurabile nei circuiti fisici, e che quindi sarebbe riduttivo non prenderla in considerazione nel modello iniziale.

Tutte le suddette variabili dipendono dal tempo, nel senso che esse assumono valori entro un opportuno insieme di funzioni a valori reali di variabile reale, detto insieme fondamentale dei segnali, e quindi, in ogni istante in cui tali funzioni sono definite, assumono valori in $\mathbf{R}$. In questa trattazione l'insieme fondamentale dei segnali è l'insieme delle funzioni definite a tratti regolari con derivate di qualsiasi ordine definite a tratti quasi-regolari $C^{-}_{\infty}(\mathbf{R}_{qo}, \mathbf{R})$ (si veda l'Appendice A.1).

Ovviamente, le variabili circuitali non sono libere; tra loro sussistono vincoli di due tipi, detti, rispettivamente, topologici e costitutivi, in quanto i primi dipendono dalla struttura del circuito, mentre i secondi dipendono dalla natura dei componenti. A loro volta, i vincoli topologici sono di due tipi e sono noti come Legge di Kirchhoff delle tensioni e Legge di Kirchhoff delle correnti. Ogni insieme di valori (funzioni) delle variabili primarie simultaneamente ammessi si dice una soluzione del circuito. Lo scopo della Teoria dei circuiti è di determinare la collezione di questi insiemi.

1.3 Legge di Kirchhoff delle tensioni

Questa legge (denotata LKT) pone in relazione i valori delle tensioni definite sul circuito.

1.3.1 Tensioni definite sul circuito

A ogni coppia di contatti di ogni parte connessa di un circuito è associata una tensione, designata con una e o una v (secondo un'apposita convenzione) avente a pedice i simboli dei contatti stessi.

Se i due contatti sono due nodi, un nodo e un terminale, o due terminali di componenti diversi, si usa la lettera e e tali variabili si dicono di circuito o globali (esempio: se nello schema ①, ② sono nodi, allora $e_{1,2}$; se nello schema ① è un nodo, b un terminale del componente K_2, allora $e_{1,\mathrm{b}_{\mathrm{K}_2}}$).

Se i due contatti sono due terminali di uno stesso componente, si usa la lettera v (esempio: se nello schema a, b sono due terminali del componente K_1, allora $v_{\mathrm{a}_{\mathrm{K}_1}, \mathrm{b}_{\mathrm{K}_1}}$), e tali variabili si dicono di componente o locali.

Le tensioni si dicono:

- nodali sse i due contatti sono nodi; queste, a loro volta, si dicono
  - nodali identiche sse i due nodi coincidono; il loro numero è
$$|\mathcal{N}|$$
  - nodali distinte sse i due nodi sono distinti; il loro numero è
$$2\binom{|\mathcal{N}|}{2}$$
- polari se i due contatti sono terminali; queste, a loro volta, si dicono
  - polari identiche sse i due terminali coincidono; il loro numero è
$$|\mathcal{T}|$$
  - polari distinte se i due terminali sono distinti; il loro numero è
$$2\binom{|\mathcal{T}|}{2}$$
- ibride sse uno dei contatti è un nodo e l'altro un terminale; il loro numero è
$$2|\mathcal{N}|\,|\mathcal{T}|.$$

Quindi complessivamente le tensioni definite sono:

$$|\mathcal{N}|+2\binom{|\mathcal{N}|}{2}+2\,|\mathcal{T}|+2\binom{|\mathcal{T}|}{2}+2|\mathcal{N}||\mathcal{T}|$$

mentre le tensioni polari locali definite sono:

$$|\mathcal{T}|+2\sum_{\mathrm{X}\in\mathcal{K}}\binom{|\mathcal{T}_{\mathrm{X}}|}{2}.$$

1.3.2 Modello LKT

Legge di Kirchhoff delle tensioni
In ogni circuito, quale che sia la natura dei componenti:

1. per qualsiasi coppia di contatti i cui elementi siano un nodo e un terminale ad esso afferente, il valore della tensione della coppia è nullo (LKT di connessione);
2. per qualsiasi sequenza finita chiusa di contatti di ogni sua parte connessa, la somma dei valori delle tensioni di coppie consecutive di elementi della sequenza è nulla quasi ovunque (LKT di sequenza). □

Si osservi subito che LKT è una regola per formulare equazioni (lineari omogenee), ma che il sistema completo di tali equazioni non è tabulabile, in quanto le sequenze sono in numero infinito. Si pone quindi il problema di accertare se tale regola dia luogo a soluzioni non banali (autosoluzioni). Sussiste in proposito il seguente teorema.

Teorema fondamentale della LKT
Il sistema di equazioni generato dalla LKT è sottodeterminato e ogni sua base ha dimensione $|\mathcal{N}|-1$. □

1.3.3 Casi particolari notevoli della LKT

Conviene esaminare subito alcune importanti conseguenze della LKT di sequenza. Se α, β, γ sono contatti, e si usa comunque, per semplicità, la lettera e per tutte le tensioni, allora:

- la LKT di sequenza applicata alla sequenza identica (α, α) fornisce:

$$e_{\alpha,\alpha} = 0$$

- la LKT di sequenza applicata alla sequenza opposta (α, β, α) fornisce:

$$e_{\alpha,\beta} + e_{\beta,\alpha} = 0$$

  da cui

$$e_{\beta,\alpha} = -e_{\alpha,\beta}$$

- la LKT di sequenza applicata alla sequenza triangolare $(\alpha, \beta, \gamma, \alpha)$ fornisce:

$$e_{\alpha,\beta} + e_{\beta,\gamma} + e_{\gamma,\alpha} = 0$$

  da cui

$$e_{\alpha,\beta} = e_{\alpha,\gamma} - e_{\beta,\gamma}.$$

1.4 Base globale di tensioni nodali

La ricerca di una base globale di tensione formata da tensioni nodali è molto semplice.

In primo luogo, è immediato osservare che le tensioni relative alle $|\mathcal{N}|-1$ coppie di nodi (distinti) il cui secondo elemento è uno stesso nodo prefissato, detto di riferimento, sono libere da vincoli (linearmente indipendenti). Infatti, non esiste nessuna sequenza finita chiusa che sia formata solo da tali coppie e quindi non sussiste nessuna equazione tra loro. In secondo luogo, è facile verificare che ogni tensione fra contatti è esprimibile in termini di queste tensioni. Siano α, β due contatti generici, A, B i due nodi ad essi associati, e Z il nodo di riferimento. Dalla LKT applicata alla sequenza (α, β, B, Z, A, α) si ricava che

$$e_{\alpha,\beta} + e_{\beta,\mathrm{B}} + e_{\mathrm{B},\mathrm{Z}} + e_{\mathrm{Z},\mathrm{A}} + e_{\mathrm{A},\alpha} = 0.$$

Ma la LKT di connessione porge

$$e_{\beta,\mathrm{B}} = e_{\mathrm{A},\alpha} = 0$$

e la LKT di opposizione porge

$$e_{\mathrm{Z},\mathrm{A}} = -e_{\mathrm{A},\mathrm{Z}}$$

per cui

$$e_{\alpha,\beta} = e_{\mathrm{A},\mathrm{Z}} - e_{\mathrm{B},\mathrm{Z}}.$$

I risultati dell'analisi condotta sono riassunti nel teorema seguente che costituisce anche una dimostrazione costruttiva del Teorema fondamentale della LKT.

Teorema della base globale a stella di tensione
Sia dato un circuito connesso (o una sua parte connessa). Allora, l'insieme formato dalle tensioni $e_{\mathrm{X},\mathrm{Z}}$, ove Z è un qualsiasi nodo prefissato del circuito (o della sua parte connessa), detto di riferimento, e X ogni altro nodo, è una base globale di tensioni, detta a stella. □

Se si adotta una base di tensioni nodali di questo tipo, è possibile una semplificazione della notazione: si indica nello schema il nodo di riferimento con un apposito simbolo e si denomina ogni tensione nodale della base con un pedice che riporta solo il simbolo del nodo in questione (esempio: se Z è il nodo di riferimento, non più $e_{\mathrm{X},\mathrm{Z}}$ ma solo e_{X}).

1.5 Ricerca di una base globale di tensioni polari locali

La ricerca di una base globale di tensioni formata da tensioni polari locali non è altrettanto semplice e si sviluppa in tre fasi.

La prima fase consiste nel dimostrare che per ogni coppia di contatti esiste (almeno) un'equazione che ne esprime la tensione in termini delle tensioni polari locali (il che significa che l'insieme di queste tensioni contiene una base). Infatti, si consideri una qualsiasi sequenza chiusa formata dai due contatti e da una sottosequenza di contatti appoggiata ad un qualsiasi percorso semplice aperto tra i due contatti stessi. Ne consegue, grazie alla LKT di connessione, che la tensione tra i due contatti è espressa da una somma di sole tensioni polari. Si noti che tale espressione non è unica perché tra i due contatti sono possibili più percorsi del tipo descritto. Ovviamente, le tensioni polari locali non sono libere da vincoli, ma è facile riconoscere che le sole sequenze finite chiuse che danno vincoli su di esse sono quelle che si appoggiano a percorsi chiusi. Quindi, la LKT di sequenza si riformula come segue.

LKT di sequenza nelle tensioni polari locali
In ogni circuito, quale che sia la natura dei componenti, per qualsiasi percorso chiuso orientato, la somma dei valori delle tensioni delle coppie terminale/terminale dei componenti disposti lungo il percorso è nulla quasi ovunque. □

La seconda fase consiste nel ridurre il numero di tensioni polari locali in gioco introducendo le cosiddette basi locali di tensione. Si consideri un generico componente K. Se si replica il ragionamento visto a proposito delle tensioni nodali, risulta che ogni sottoinsieme di tensioni polari locali formato da tensioni del tipo $v_{\mathrm{x_K},\mathrm{z_K}}$, ove z è un qualsiasi terminale prefissato nello schema, detto di riferimento, e x un qualsiasi altro terminale, è una base locale di tensioni polari (detta a stella). Questo dimostra anche che la dimensione di ogni base locale di tensioni polari è $|\mathcal{T}_{\mathrm{K}}|-1$. In particolare:

- per un bipolo K con terminali di schema a, b le tensioni polari locali sono due, $v_{\mathrm{a_K},\mathrm{b_K}}$, $v_{\mathrm{b_K},\mathrm{a_K}}$, ed esistono due basi locali di tensione a stella, ciascuna formata da una tensione, ossia $\{v_{\mathrm{a_K},\mathrm{b_K}}\}$, $\{v_{\mathrm{b_K},\mathrm{a_K}}\}$; scelta, ad esempio, la prima, si ha: $v_{\mathrm{b_K},\mathrm{a_K}} = -v_{\mathrm{a_K},\mathrm{b_K}}$;
- per un tripolo K con terminali di schema a, b, c le tensioni polari locali sono sei, $v_{\mathrm{a_K},\mathrm{b_K}}$, $v_{\mathrm{b_K},\mathrm{a_K}}$, $v_{\mathrm{a_K},\mathrm{c_K}}$, $v_{\mathrm{c_K},\mathrm{a_K}}$, $v_{\mathrm{b_K},\mathrm{c_K}}$, $v_{\mathrm{c_K},\mathrm{b_K}}$, ed esistono tre basi a stella, ciascuna formata da due tensioni, ossia $\{v_{\mathrm{a_K},\mathrm{c_K}}, v_{\mathrm{b_K},\mathrm{c_K}}\}$, $\{v_{\mathrm{a_K},\mathrm{b_K}}, v_{\mathrm{c_K},\mathrm{b_K}}\}$ e $\{v_{\mathrm{b_K},\mathrm{a_K}}, v_{\mathrm{c_K},\mathrm{a_K}}\}$; scelta, ad esempio, la prima, risulta: $v_{\mathrm{c_K},\mathrm{a_K}} = -v_{\mathrm{a_K},\mathrm{c_K}}$, $v_{\mathrm{c_K},\mathrm{b_K}} = -v_{\mathrm{b_K},\mathrm{c_K}}$, $v_{\mathrm{a_K},\mathrm{b_K}} = v_{\mathrm{a_K},\mathrm{c_K}} - v_{\mathrm{b_K},\mathrm{c_K}}$, $v_{\mathrm{b_K},\mathrm{a_K}} = v_{\mathrm{b_K},\mathrm{c_K}} - v_{\mathrm{a_K},\mathrm{c_K}}$.

Nel complesso, quindi, il numero delle tensioni polari locali da considerare (la pre-base) si riduce da

$$2\sum_{\mathrm{X}\in\mathcal{K}} \binom{|\mathcal{T}_{\mathrm{X}}|}{2}$$

a

$$|\mathcal{T}|-|\mathcal{K}|.$$

L'introduzione delle basi locali di tensione consente una importante semplificazione dello schema e della notazione. Infatti, le tensioni di ogni base locale vengono indicate sullo schema ponendo accanto al terminale di riferimento del componente un segno "−" e accanto agli altri terminali un segno "+", e vengono designate riportando a pedice di v il nome del solo terminale in questione (ad esempio: se nello schema d è un terminale del componente K_2, allora $v_{\mathrm{d_{K_2}}}$). In particolare, poi, per i bipoli l'unica tensione di interesse si indica mediante il simbolo del componente (esempio: se K_1 è un componente, allora v_{K_1}. I simboli grafici suddetti sono spesso detti direzioni di riferimento o polarità di riferimento delle tensioni.

Occorre adesso determinare la regola descrittiva del sistema di equazioni che vincolano le tensioni delle basi locali di tensioni polari. Evidentemente, le equazioni cercate sono tutte e solo quelle relative a sequenze finite chiuse che si appoggiano a percorsi orientati chiusi che coinvolgano coppie di terminali consecutivi marcati in modo opposto (detti percorsi ammissibili). Quindi la LKT di sequenza si riformula come segue.

LKT di sequenza nelle tensioni delle basi locali: I versione
In ogni circuito, quale che sia la natura dei componenti, per qualsiasi percorso chiuso orientato ammissibile, la somma algebrica dei valori delle tensioni delle coppie terminale/terminale di base dei componenti disposti lungo il percorso è nulla quasi ovunque, ove si applichi il segno positivo ai valori delle tensioni delle coppie terminale/terminale orientate in modo concorde con il percorso (ossia disposte dal "+" al "−" attraverso il nucleo del componente), e il segno negativo ai valori delle tensioni delle coppie terminale/terminale orientate in modo discorde con i percorso (ossia disposte dal "−" al "+" attraverso il nucleo del componente). □

Una versione alternativa a volte conveniente è la seguente.

LKT di sequenza nelle tensioni delle basi locali: II versione
In ogni circuito, quale che sia la natura dei componenti, per qualsiasi percorso chiuso orientato ammissibile, la somma dei valori delle tensioni delle coppie terminale/terminale dei componenti disposti lungo il percorso orientate in modo concorde con esso e la somma dei valori delle tensioni delle coppie terminale/terminale dei componenti disposti lungo il percorso orientate in modo discorde da esso sono uguali. □

La terza fase infine consiste nell'estrarre dal sistema nelle tensioni di pre-base un sottosistema di equazioni rappresentativo di tutti i vincoli che sussistono tra loro, ossia un sottosistema di rango pieno e massimo (rispetto a tutti i sistemi di rango pieno). Sfortunatamente, non è disponibile una tecnica semplice e generale per selezionare un tale sottosistema. Tuttavia sussiste il seguente teorema.

Teorema degli anelli
In ogni circuito planare ciclicamente connesso (o per ogni sua parte planare ciclicamente connessa), le equazioni agli anelli ammissibili uniformemente orientati formano un sistema di rango pieno e massimo nelle tensioni polari di base locale. □

L'analisi condotta costituisce la traccia di un'altra dimostrazione del Teorema fondamentale della LKT. In particolare fornisce il numero degli anelli. Infatti, visto che il rango del sistema è pieno e massimo, il numero delle equazioni è dato dalla differenza tra il numero delle variabili rimaste in gioco

$$|\mathcal{T}| - |\mathcal{K}|$$

e la dimensione della base

$$|\mathcal{N}| - 1$$

ossia

$$|\mathcal{T}| - |\mathcal{K}| - |\mathcal{N}| + 1.$$

1.6 Legge di Kirchhoff delle correnti

Questa legge (denotata LKC) pone in relazione i valori delle correnti definite sul circuito.

1.6.1 Correnti definite sul circuito

A ogni terminale orientato di un circuito è associata una corrente, designata con una i avente a pedice il suo simbolo (esempio: se nello schema a è un terminale del componente K_1, allora $i_{\mathrm{a}'_{\mathrm{K}_1}}$ o $i_{\mathrm{a}''_{\mathrm{K}_1}}$).

Le correnti definite sono dunque

$$2\,|\mathcal{T}|.$$

1.6.2 Modello LKC

Legge di Kirchhoff delle correnti
In ogni circuito, quale che sia la natura dei componenti:

1. per qualsiasi terminale, i valori delle correnti dei due terminali orientati opposti sono opposti (LKC di opposizione);

2. per qualsiasi sezione orientata, la somma dei valori delle correnti dei terminali intersecati orientati secondo la sezione stessa è nulla quasi ovunque (LKC di sezione). □

Si osservi subito che anche la legge di Kirchhoff delle correnti è una regola per formulare equazioni (lineari omogenee), ma che il sistema completo di tali equazioni non è tabulato in modo esplicito. Tuttavia, esso è tabulabile e il numero di equazioni è pari al numero di sezioni orientate, ie

$$\sum_{h=1}^{|\mathcal{K}|+|\mathcal{N}|-1} \binom{|\mathcal{K}|+|\mathcal{N}|}{h}.$$

Si pone quindi il problema di accertare se tale regola dia luogo a soluzioni non banali (autosoluzioni). Sussiste in proposito il seguente teorema.

Teorema fondamentale della LKC
Il sistema di equazioni generato dalla LKC è sottodeterminato e ogni sua base ha dimensione

$$|\mathcal{T}|-|\mathcal{K}|-|\mathcal{N}|+1.$$

□

1.6.3 Casi particolari notevoli della LKC

Conviene esaminare subito alcune importanti conseguenze della LKC di sezione. Se K è un componente e N un nodo, allora:

- la LKC applicata alle due sezioni orientate attorno al nucleo del componente (nucleare entrante e nucleare uscente) fornisce:

$$\sum_{x\in\mathcal{T}_K} i_{x'} = 0, \qquad \sum_{x\in\mathcal{T}_K} i_{x''} = 0$$

- la LKC applicata alle due sezioni orientate attorno al nodo (nodale uscente e nodale entrante) fornisce:

$$\sum_{x\in\mathcal{T}_N} i_{x'} = 0, \qquad \sum_{x\in\mathcal{T}_N} i_{x''} = 0.$$

1.7 Ricerca di una base globale di correnti

La ricerca di una base globale di correnti non è semplice e si sviluppa in due fasi.

La prima fase consiste nel ridurre il numero di correnti in gioco introducendo le cosìddette basi locali di corrente. Si consideri un componente K. Le correnti di tutti i terminali entranti tranne uno sono libere da vincoli (linearmente indipendenti), e costituiscono una base locale di correnti (detta a stella). Infatti, non esiste nessuna sezione che intersechi solo tali terminali e quindi non esiste nessuna equazione tra loro. Inoltre, ogni altra corrente di terminale orientato del componente può essere espressa in funzione di quelle grazie alla LKC di opposizione e di sezione nucleare. Questo dimostra anche che la dimensione di ogni base locale di corrente è $|\mathcal{T}_K|-1$. In particolare:

- per un bipolo K con terminali di schema a, b le correnti di terminale orientato sono quattro, $i_{a'_K}, i_{b'_K}, i_{a''_K}, i_{b''_K}$ ed esistono due basi a stella, ciascuna formata da una corrente, ossia $\{i_{a'_K}\}, \{i_{b'_K}\}$; scelta, ad esempio, la prima, risulta: $i_{b'_K} = -i_{a'_K}, i_{a''_K} = -i_{a'_K}, i_{b''_K} = i_{a'_K}$;

- per un tripolo K con terminali di schema a, b, c le correnti interpolari sono sei, $i_{a'_K}, i_{b'_K}, i_{c'_K}, i_{a''_K}, i_{b''_K}, i_{c''_K}$, ed esistono tre basi a stella, ciascuna formata da due correnti, ossia $\{i_{a'_K}, i_{b'_K}\}, \{i_{a'_K}, i_{c'_K}\}, \{i_{b'_K}, i_{c'_K}\}$; scelta, ad esempio, la prima, risulta: $i_{c'_K} = -i_{a'_K} - i_{b'_K}, i_{a''_K} = i_{a'_K}, i_{b''_K} = -i_{b'_K}, i_{c''_K} = i_{a'_K} + i_{b'_K}$.

Nel complesso, quindi, il numero delle correnti di terminale orientato da considerare (la pre-base) si riduce da

$$\sum_{h=1}^{|\mathcal{K}|+|\mathcal{N}|-1} \binom{|\mathcal{K}|+|\mathcal{N}|}{h}$$

a

$$|\mathcal{T}|-|\mathcal{K}|.$$

L'introduzione delle basi locali di correnti consente una importante semplificazione dello schema e della notazione. Infatti, le correnti di ogni base locale vengono indicate sullo schema marcando con una freccia orientata verso il nucleo i rispettivi terminali, e vengono designate nel testo riportando a pedice di i il nome (senza apice) del terminale in questione (ad esempio: se nello schema a è un terminale del componente K_2, allora i_{aK_2}). In particolare, per i bipoli l'unica corrente di interesse si indica mediante il simbolo del componente (esempio: se K_1 è un componente, allora i_{K_1}). I simboli grafici suddetti sono spesso detti direzioni di riferimento o polarità di riferimento delle correnti.

Occorre adesso determinare la regola descrittiva del sistema di equazioni che vincolano le correnti delle basi locali di correnti. Ma, evidentemente, le equazioni cercate sono tutte e solo quelle associate alle sezioni che includono solo terminali di basi locali (dette sezioni ammissibili). Quindi la LKC di sezione si riformula come segue.

LKC di sezione nelle correnti delle basi locali: I versione
In ogni circuito, quale che sia la natura dei componenti, per qualsiasi sezione orientata ammissibile, la somma algebrica dei valori delle correnti afferenti alla sezione è nulla quasi ovunque, ove si applichi il segno positivo alla corrente dei terminali orientati in senso concorde con la sezione, e il segno negativo alla corrente dei terminali orientati in senso discorde con la sezione stessa. □

Una versione alternativa a volte conveniente è la seguente.

LKC di sezione nelle correnti delle basi locali: II versione
In ogni circuito, quale che sia la natura dei componenti, per qualsiasi sezione orientata consentita, la somma dei valori delle correnti di base afferenti ad essa e concordi con essa è pari alla somma dei valori delle correnti di base afferenti ad essa e discordi con essa. □

La seconda fase consiste nell'estrarre dal sistema nelle correnti di pre-base un sottosistema di equazioni rappresentativo di tutti i vincoli che sussistono tra loro, ossia un sottosistema di rango pieno e massimo (rispetto a tutti i sistemi di rango pieno). Fortunatamente, è disponibile un risultato semplice e generale per selezionare un siffatto sottosistema. Infatti, sussiste il seguente teorema.

Teorema delle sezioni nodali
In ogni circuito connesso (o per ogni sua parte connessa), le equazioni alle sezioni nodali espanse ammissibili uscenti tranne una a scelta (o una a scelta per ogni parte connessa) formano un sistema di rango pieno e massimo nelle correnti delle basi locali. □

L'analisi condotta fornisce la dimensione della base globale di correnti. Infatti, visto che il rango del sistema è pieno e massimo, la dimensione della base è data dalla differenza tra il numero delle variabili rimaste in gioco

$$|\mathcal{T}|-|\mathcal{K}|$$

e il numero delle equazioni rimaste in gioco

$$|\mathcal{N}|-1$$

ossia

$$|\mathcal{T}|-|\mathcal{K}|-|\mathcal{N}|+1.$$

1.8 Considerazioni finali su LKT e LKC

In conclusione, vale la pena di sottolineare che il numero delle tensioni polari di basi locali è

$$|\mathcal{T}|-|\mathcal{K}|$$

la dimensione di una qualsiasi base globale di tensione

$$|\mathcal{N}|-1$$

e quindi il numero richiesto di equazioni in tali variabili

$$|\mathcal{T}|-|\mathcal{K}|-|\mathcal{N}|+1.$$

Di contro, il numero delle correnti di basi locali è

$$|\mathcal{T}|-|\mathcal{K}|$$

la dimensione di una qualsiasi base globale di corrente

$$|\mathcal{T}|-|\mathcal{K}|-|\mathcal{N}|+1$$

e quindi il numero richiesto di equazioni in tali variabili

$$|\mathcal{N}|-1.$$

Complessivamente, dunque, il numero delle variabili in gioco è

$$2\ (|\mathcal{T}|-|\mathcal{K}|)$$

la dimensione di una qualsiasi base globale di tensione/corrente

$$|\mathcal{T}|-|\mathcal{K}|$$

e quindi il numero di equazioni richiesto

$$|\mathcal{T}|-|\mathcal{K}|.$$

Il numero di variabili in gioco è pari al doppio del numero di equazioni di Kirchhoff utili.

1.9 Potenza

1.9.1 Basi associate

Le basi di tensione e di corrente a stella di un componente si dicono associate (o si dice che le direzioni di riferimento del componente sono associate) sse le basi di tensione e di corrente sono scelte in modo che ogni freccia di terminale punti da un polo marcato "+" al polo marcato "−" attraverso il nucleo. Altrimenti si dicono non-associate. È chiaro che se si decide di usare sempre basi associate, basta indicare sullo schema una sola delle due basi, perché l'altra è nota di conseguenza. In tale ipotesi, si può facilmente riformulare la legge di Kirchhoff la cui base non è esplicitata facendo riferimento ai simboli della base in uso. Quest'uso è frequente specialmente nel caso di reti di soli bipoli.

Dato un componente K riferito a date basi associate con terminale di riferimento z nello schema, si definisce:

- potenza (topologica) assorbita la variabile dipendente

$$p_{\mathrm{a}_\mathrm{K}} := \sum_{\mathrm{x} \in \mathcal{T}_\mathrm{K} \setminus \{\mathrm{z}_\mathrm{K}\}} v_\mathrm{x}\, i_\mathrm{x}$$

- potenza (topologica) erogata la variabile dipendente

$$p_{\mathrm{e}_\mathrm{K}} := -\sum_{\mathrm{x} \in \mathcal{T}_\mathrm{K} \setminus \{\mathrm{z}_\mathrm{K}\}} v_\mathrm{x}\, i_\mathrm{x}.$$

Il valore dimensionale della potenza è [V][I], e l'unità di misura il watt con simbolo W. Si noti inotre che, in virtù delle definizioni, l'ambiente di $p_{\mathrm{a}_\mathrm{K}}$ e $p_{\mathrm{e}_\mathrm{K}}$ è $C_\infty^=(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R})$. Evidentemente, risulta:

$$p_{\mathrm{a}_\mathrm{K}} = -p_{\mathrm{e}_\mathrm{K}}.$$

In particolare, per i bipoli risulta:

$$p_{\mathrm{a}_\mathrm{K}} = v_\mathrm{K}\, i_\mathrm{K}, \qquad p_{\mathrm{e}_\mathrm{K}} = -v_\mathrm{K}\, i_\mathrm{K}.$$

Ovviamente, se le basi non sono associate, i segni esterni delle precedenti espressioni della potenza cambiano in modo conseguente. La definizione di potenza data è comunque ben posta perché sussiste il seguente teorema.

Teorema di invarianza della definizione di potenza
La definizione di potenza assorbita (o erogata) è invariante rispetto al cambio di basi a stella associate. □

La potenza assorbita o erogata si dice effettivamente assorbita o erogata in un certo istante sse in quell'istante è positiva per gli specifici valori (funzioni) attribuiti alle variabili delle basi locali.

1.9.2 Conservazione della potenza

Teorema di Tellegen: I versione
In qualsiasi circuito, la somma delle potenze assorbite (o erogate) dai componenti è nulla quasi ovunque, ossia:

$$\sum_{\mathrm{K} \in \mathcal{K}} p_{\mathrm{a}_\mathrm{K}} = 0.$$

□

Se nello schema z è il polo di riferimento del componente K, il teorema di Tellegen può essere così formulato in termini delle variabili locali di base

$$\sum_{\mathrm{K} \in \mathcal{K}} \; \sum_{\mathrm{x} \in \mathcal{T}_\mathrm{K} \setminus \{\mathrm{z}_\mathrm{K}\}} v_\mathrm{x}\, i_\mathrm{x} = 0$$

nel caso generale, e

$$\sum_{\mathrm{K} \in \mathcal{K}} v_\mathrm{K}\, i_\mathrm{K} = 0$$

nel caso di un circuito di soli bipoli.

In alternativa, il teorema può essere formulato come segue.

Teorema di Tellegen: II versione
In qualsiasi circuito, la somma delle potenze assorbite dal sottoinsieme $\mathcal{K}'$ di componenti è uguale alla somma delle potenze erogate dal sottoinsieme $\mathcal{K}''$ dei rimanenti, ossia:

$$\sum_{\mathrm{K} \in \mathcal{K}'} p_{\mathrm{a}_\mathrm{K}} = \sum_{\mathrm{K} \in \mathcal{K}''} p_{\mathrm{e}_\mathrm{K}}.$$

□

Se nello schema z è il polo di riferimento del componente K, il teorema di Tellegen può essere così formulato in termini delle variabili locali di base

$$\sum_{\mathrm{K} \in \mathcal{K}'} \; \sum_{\mathrm{x} \in \mathcal{T}_\mathrm{K} \setminus \{\mathrm{z}_\mathrm{K}\}} v_\mathrm{x}\, i_\mathrm{x} = \sum_{\mathrm{K} \in \mathcal{K}''} \; \sum_{\mathrm{x} \in \mathcal{T}_\mathrm{K} \setminus \{\mathrm{z}_\mathrm{K}\}} v_\mathrm{x}\, i_\mathrm{x}$$

nel caso generale, e

$$\sum_{\mathrm{K} \in \mathcal{K}'} v_\mathrm{K}\, i_\mathrm{K} = \sum_{\mathrm{K} \in \mathcal{K}''} v_\mathrm{K}\, i_\mathrm{K}$$

nel caso di un circuito di soli bipoli.

1.10 Lavoro

Dato un componente K riferito a date basi associate, e il generico intervallo di tempo $[t_{\mathrm{i}}, t_{\mathrm{f}}]$, si definisce:

- lavoro (topologico) assorbito dal componente l'integrale della potenza assorbita dall'istante iniziale all'istante finale dell'intervallo, ie la variabile dipendente

$$W_{\mathrm{aK}} \coloneqq \int_{t_{\mathrm{i}}}^{t_{\mathrm{f}}} p_{\mathrm{aK}}$$

- lavoro (topologico) erogato dal componente l'integrale della potenza erogata dall'istante iniziale all'istante finale, ie la variabile dipendente

$$W_{\mathrm{eK}} \coloneqq \int_{t_{\mathrm{i}}}^{t_{\mathrm{f}}} p_{\mathrm{eK}}.$$

Il valore dimensionale del lavoro è [V][I][t], e l'unità di misura il joule con simbolo J. Si noti inotre che, in virtù delle definizioni, per ogni prefissato istante iniziale e ogni prefissato andamento di potenza, l'ambiente di W_{aK} e W_{eK} come funzioni dell'istante finale libero in $\mathbf{R}$ è $C^0_\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Evidentemente, risulta:

$$W_{\mathrm{aK}} = -W_{\mathrm{eK}}.$$

Come per la potenza, il lavoro assorbito o erogato si dice effettivamente assorbito o erogato in un certo intervallo sse è positivo per quell'intervallo e per gli specifici valori (funzioni) attribuiti alle variabili delle basi locali.

1.10.1 Conservazione del lavoro

Teorema di Tellegen: I versione
In qualsiasi circuito, la somma dei lavori assorbiti (o erogati) dai componenti è nulla, ossia:

$$\sum_{\mathrm{K} \in \mathcal{K}} W_{\mathrm{aK}} = 0.$$

□

In alternativa, il teorema può essere formulato come segue.

Teorema di Tellegen: II versione
In qualsiasi circuito, la somma dei lavori assorbiti dal sottoinsieme $\mathcal{K}'$ di componenti è uguale alla somma dei lavori erogati dal sottoinsieme $\mathcal{K}''$ dei rimanenti, ossia:

$$\sum_{\mathrm{K} \in \mathcal{K}'} W_{\mathrm{aK}} = \sum_{\mathrm{K} \in \mathcal{K}''} W_{\mathrm{eK}}.$$

□

Capitolo 2

Componenti

In questo capitolo sarà presentato il catalogo dei componenti che più di frequente si incontrano nella Teoria dei Circuiti Classica.

2.1 Caratterizzazione

Come anticipato nel Capitolo 1, i componenti si differenziano anche per natura. Con ciò si intende che le variabili di ogni componente, quale che sia il circuito in cui questo operi, possono assumere simultaneamente solo specifici valori (funzioni). Tenuto conto dei vincoli topologici locali vigenti sulle variabili primarie, i vincoli dovuti alla natura dei componenti, detti costitutivi, possono essere riferiti alle sole variabili di base (spesso, ma non sempre, associate). Queste, per quanto visto, sono, per il componente K, in numero di $2\,(|\mathcal{T}_\mathrm{K}|-1)$, e quindi per un bipolo due, per un tripolo quattro, per un quadripolo sei, etc.

Prima di procedere, occorre però far cenno dei cosiddetti vincoli costitutivi paratopologici, che sono propri di un'importante categoria di componenti, i multipli bipoli o multiporta. Qui si prenderanno in considerazione solo i doppi bipoli o biporta.

2.1.1 Doppi bipoli

Un quadripolo K si dice un doppio bipolo o biporta sse i suoi terminali possono essere raggruppati in coppie (a,b) e (c,d) tali per cui i vincoli costitutivi comprendano l'equazione $i_{\mathrm{a_K}} = -\,i_{\mathrm{b_K}}$ (e quindi anche $i_{\mathrm{c_K}} = -\,i_{\mathrm{d_K}}$), e coinvolgano solo le tensioni $v_{\mathrm{a_K},\mathrm{b_K}}$ e $v_{\mathrm{c_K},\mathrm{d_K}}$. Le coppie ordinate di terminali (a,b) e (c,d) sono dette porte. Per la loro natura, vincoli di questo tipo possono essere trasferiti allo schema del componente, suddividendo il nucleo del componente in due seminuclei, facendo afferire a ciascun seminucleo una coppia di terminali, considerando le consuete variabili dei bipoli e applicando le leggi di Kirchhoff. I due "bipoli" che si vengono così a creare sono detti falsi bipoli. Si noti infine che la potenza assorbita dal doppio bipolo K risulta data da:

$$\begin{aligned} p_{\mathrm{a_K}} &= v_{\mathrm{a_K}\,\mathrm{d_K}}\, i_{\mathrm{a_K}} + v_{\mathrm{b_K}\,\mathrm{d_K}}\, i_{\mathrm{b_K}} + v_{\mathrm{c_K}\,\mathrm{d_K}}\, i_{\mathrm{c_K}} = \\ &= v_{\mathrm{a_K}\,\mathrm{d_K}}\, i_{\mathrm{a_K}} + v_{\mathrm{b_K}\,\mathrm{d_K}}\, (-i_{\mathrm{a_K}}) + v_{\mathrm{c_K}\,\mathrm{d_K}}\, i_{\mathrm{c_K}} = (v_{\mathrm{a_K}\,\mathrm{d_K}} - v_{\mathrm{b_K}\,\mathrm{d_K}})\, i_{\mathrm{a_K}} + v_{\mathrm{c_K}\,\mathrm{d_K}}\, i_{\mathrm{c_K}} = \\ &= v_{\mathrm{a_K},\mathrm{b_K}}\, i_{\mathrm{a_K}} + v_{\mathrm{c_K},\mathrm{d_K}}\, i_{\mathrm{c_K}}. \end{aligned}$$

Evidentemente, per un biporta la dimensione della base delle variabili si riduce da 6 a 4 (per un triporta da 10 a 6, per un q-porta da $4q-2$ a $2q$).

La dimensione di base di un componente, eventualmente ridotta per effetto dei vincoli paratopologici, si dice la dimensione di Kirchhoff (o K-dimensione) d_K del componente.

2.1.2 Comportamento

L'insieme di tutti i valori (funzioni) simultaneamente ammessi dalle tensioni e dalle correnti di base del componente K si dice comportamento (behavior), $\mathfrak{B}$, del componente. Ciascuno di questi insiemi di valori si dice un processo (di base) ammissibile del componente.

Formalmente, il comportamento viene rappresentato mediante una struttura del tipo

$$\mathfrak{B} := \{\{\{x, \mathrm{f}\}, \{y, \mathrm{g}\}, \dots, \{z, \mathrm{h}\}\} \quad | \quad \mathrm{f} \in F, \mathrm{g} \in G, \dots, \mathrm{h} \in H \quad \mathcal{E}(\mathrm{f}, \mathrm{g}, \dots, \mathrm{h})\}$$

dove $x, y, \dots, z$ sono le variabili in gioco, $F, G, \dots, H$ sono sottoinsiemi dell'insieme fondamentale dei segnali, detti ambienti (simbolo "amb"), entro cui le variabili possono assumere valori (non necessariamente tutti), ed $\mathcal{E}(\mathrm{f}, \mathrm{g}, \dots, \mathrm{h})$ è un insieme di condizioni, espresse mediante equazioni integro-algebrico-differenziali, scalari o matriciali, sui suoi argomenti. Gli elementi di $\mathfrak{B}$ sono per l'appunto i processi ammissibili. In questa trattazione, l'insieme fondamentale dei segnali è $C^-_\infty(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R})$, e gli ambienti delle variabili sono soltanto $C^-_\infty(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R})$ stesso e $C^0_\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ (si veda l'Appendice A.1).

Praticamente, però, il comportamento viene assegnato mediante una scrittura semplificata, che riporta solo l'insieme delle condizioni $\mathcal{E}$ direttamente espresso in termini delle variabili, ie $\mathcal{E}(x, y, \dots, z)$ (detto insieme delle equazioni generatrici i/v), e l'indicazione degli ambienti, ie $\mathrm{amb}\, x = F$, $\mathrm{amb}\, y = G$, ..., $\mathrm{amb}\, z = H$. A volte le equazioni sono scritte in termini di variabili primarie e/o secondarie.

2.1.3 Componenti semplici

Un componente si dice semplice (non-semplice, altrimenti) sse le sue relazioni costitutive possono esprimersi algebricamente in termini delle variabili di solo due fra i quattro tipi v, i, q, φ. In tal caso, le equazioni (e le loro rappresentazioni grafiche nei corrispondenti spazi delle variabili) si dicono caratteristiche. Quindi, i componenti semplici si classificano in famiglie a seconda del tipo di variabili coinvolte nelle equazioni costitutive caratteristiche:

- resistivi se del tipo (v, i) con ambiente per entrambi i tipi $C^-_\infty(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R})$;
- capacitivi se del tipo (v, q) con ambiente per entrambi i tipi $C^0_\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, e quindi con ambiente di corrente $C^-_\infty(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R})$;
- induttivi se del tipo (φ, i) con ambiente per entrambi i tipi $C^0_\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, e quindi con ambiente di tensione $C^-_\infty(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R})$;
- memristivi se del tipo (φ, q) con ambiente per entrambi i tipi $C^0_\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, e quindi con ambiente di corrente e di tensione $C^-_\infty(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R})$.

2.1.4 Caratterizzazione costitutiva

Un componente si dice:

- tempo-invariante (tempo-variante, altrimenti) sse le equazioni generatrici i/v non coinvolgono la variabile tempo;
- lineare (nonlineare, altrimenti) sse le equazioni generatrici i/v sono lineari;
- adinamico (dinamico, altrimenti) sse le equazioni generatrici i/v sono algebriche;
- controllato in certe variabili circuitali (non controllato in tali variabili, altrimenti) sse le equazioni generatrici i/v definiscono tutte le altre variabili in funzione di tali variabili.

Inoltre, un bipolo si dice bilaterale sse le equazioni generatrici i/v sono invarianti rispetto al cambio di segno delle variabili.

Le proprietà suddette si riconoscono facilmente anche nelle caratteristiche grafiche dei bipoli.

2.1.5 Caratterizzazione lavorativa

Si dice lavoro disponibile di un componente K all'istante di osservazione t_{o}, denotato W_{dK}, l'estremo superiore del lavoro erogato da K calcolato con $t_{\mathrm{i}} = t_{\mathrm{o}}$ e $t_{\mathrm{f}} \geqslant t_{\mathrm{o}}$, ie la variabile dipendente

$$W_{\mathrm{dK}} := \sup_{t_{\mathrm{f}} \geqslant t_{\mathrm{i}} = t_{\mathrm{o}}} W_{\mathrm{eK}}.$$

Evidentemente, risulta $W_{\mathrm{dK}} \geqslant 0$.

Un componente si dice:

- inerte sse per ogni intervallo di tempo il lavoro assorbito entro il comportamento è nullo;
- dissipativo sse per ogni intervallo di tempo il lavoro assorbito entro il comportamento è strettamente non-negativo ($\geqslant 0$ con occorrenza del caso > 0);
- generativo sse per ogni intervallo di tempo il lavoro assorbito entro il comportamento è strettamente non-positivo ($\leqslant 0$ con occorrenza del caso < 0);
- conservativo sse esiste un sottoinsieme delle variabili di base, detto stato del componente, tale per cui il lavoro assorbito in ogni intervallo di tempo lungo un qualsiasi processo dipende solo dal valore dello stato all'istante iniziale e all'istante finale;
- passivo (attivo, altrimenti) sse per ogni istante di osservazione e per ogni processo ammissibile il lavoro disponibile è limitato superiormente.

Evidentemente, un componente è:

- inerte sse la sua potenza assorbita è identicamente nulla;
- dissipativo sse la sua potenza assorbita è strettamente non-negativa;
- generativo sse la sua potenza assorbita è strettamente non-positiva;
- passivo se è inerte o dissipativo;
- attivo se è generativo.

Si osservi che se lo stato di un componente conservativo al termine di un intervallo di tempo riassume il valore iniziale, allora il lavoro assorbito dal componente in tale intervallo deve essere nullo. Questo implica che il lavoro assorbito in una qualsiasi prima parte dell'intervallo è uguale e opposto al lavoro assorbito nella seconda parte dell'intervallo, e quindi che se il primo lavoro è effettivamente assorbito il secondo è effettivamente erogato, ovvero, in una parola, restituito. Infatti, per indicare questa particolare proprietà di un componente conservativo si usa il termine "restitutivo".

In base alla definizione, un componente K conservativo deve ammettere un potenziale U_{K}, dipendente dallo stato attuale del componente e definito a meno di una costante, la cui variazione finale/iniziale risulta pari al lavoro assorbito. Ma, allora, la differenza tra il valore attuale di U_{K} e il valore del suo estremo inferiore è il massimo lavoro disponibile del componente in quell'istante relativamente a tutti i processi che condividono quello stato, denotato $W_{\mathrm{d_x K}}$. Ne consegue che il componente è passivo sse tale estremo inferiore è finito. Quel particolare potenziale di un componente conservativo il cui valore attuale è pari a $W_{\mathrm{d_x K}}$ si dice energia (istantanea) del componente, E_{K}, e, per quanto osservato, E_{K} è quel particolare potenziale il cui estremo inferiore è nullo.

2.2 Componenti resistivi

Nel seguito viene fornito il catalogo di alcuni componenti resistivi suddivisi in bipoli, doppi bipoli e quadripoli, con l'indicazione di nome, simbolo, simbolo grafico, basi usate, equazioni generatrici i/v, caratteristica geometrica, nome unità e simbolo dei parametri, proprietà. Converrà ricordare che l'ambiente di tensione e di corrente è $C_{\infty}^{-}(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R})$.

2.2.1 Bipoli resistivi

- Resistori classici o ohmici (variabili v_{R}, i_{R}).
  Un bipolo in basi associate si dice un resistore classico o ohmico sse la sua equazione generatrice è
  $$a\, v_{\mathrm{R}} = b\, i_{\mathrm{R}}$$
  con
  $$a, b \in \mathbf{R}, \qquad a\, b > 0.$$

La caratteristica geometrica di tali componenti è una retta per l'origine a pendenza positiva. Questi componenti sono tempo-invarianti, lineari, adinamici, i-controllati con equazione

$$v_\mathrm{R} = R\, i_\mathrm{R}, \qquad \text{con} \qquad R := \frac{b}{a} > 0$$

v-controllati con equazione

$$i_\mathrm{R} = G\, v_\mathrm{R}, \qquad \text{con} \qquad G := \frac{a}{b} > 0.$$

Il parametro R è detto resistenza, e ha dimensione [R] := [V]/[I] e unità ohm con simbolo Ω. Il parametro G è detto conduttanza, e ha dimensione [G]:= [I]/[V] e unità siemens con simbolo S. Evidentemente:

$$R\, G = 1.$$

Essi sono anche bilaterali e dissipativi (passivi). Infatti, risulta:

$$p_{\mathrm{a}_\mathrm{R}} := v_\mathrm{R}\, i_\mathrm{R} = R\, i_\mathrm{R}^2 = G\, v_\mathrm{R}^2$$

$$W_{\mathrm{a}\mathrm{R}} := \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} p_{\mathrm{a}_\mathrm{R}} = R \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} i_\mathrm{R}^2 = G \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} v_\mathrm{R}^2$$

il che mostra che

$$W_{\mathrm{eR}} \leq 0$$

e quindi che al più

$$W_{\mathrm{dR}} = 0.$$

I singoli componenti si distinguono solo per il valore della resistenza o della conduttanza.

- Cortocircuiti (variabili v_cc, i_cc)
  Un bipolo si dice un cortocircuito sse la sua equazione generatrice è

  $$v_\mathrm{cc} = 0.$$

  La caratteristica geometrica di tali componenti è l'asse i.
  Questi componenti sono tempo-invarianti, lineari, adinamici, (banalmente) i-controllati, non v-controllati, bilaterali, inerti (passivi). Infatti, risulta:

  $$p_{\mathrm{a}_\mathrm{cc}} := v_\mathrm{cc}\, i_\mathrm{cc} = 0$$

  $$W_{\mathrm{a}\mathrm{cc}} := \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} p_{\mathrm{a}_\mathrm{cc}} = 0$$

  il che mostra che

  $$W_{\mathrm{ecc}} = 0$$

  e quindi che sempre

  $$W_{\mathrm{dcc}} = 0.$$

  I singoli componenti sono indistinguibili.

- Circuiti aperti (variabili v_ca, i_ca)
  Un bipolo si dice un circuito aperto sse la sua equazione generatrice è

  $$i_\mathrm{ca} = 0.$$

  La caratteristica geometrica di tali componenti è l'asse v.
  Questi componenti sono tempo-invarianti, lineari, adinamici, (banalmente) v-controllati, non i-controllati, bilaterali, inerti (passivi). Infatti, risulta:

  $$p_{\mathrm{a}_\mathrm{ca}} := v_\mathrm{ca}\, i_\mathrm{ca} = 0$$

$$W_{\mathrm{aca}} := \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} p_{\mathrm{aca}} = 0$$

il che mostra che

$$W_{\mathrm{eca}} = 0$$

e quindi che sempre

$$W_{\mathrm{dca}} = 0.$$

I singoli componenti sono indistinguibili.

- Sorgenti ideali di tensione (variabili v_E, i_E)
  Un bipolo si dice una sorgente ideale di tensione sse la sua equazione generatrice è:

  $$v_\mathrm{E} = v_\mathrm{s}$$

  con

  $$v_\mathrm{s} \in C_\infty^-(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R}) \setminus \{0\}$$

  La caratteristica geometrica di tali componenti è un fascio (degenere se v_s è costante) di rette parallele all'asse i. La funzione v_s è detta il segnale di tensione della sorgente.
  Essi sono tempo-invarianti sse v_s è costante, non lineari (affini), adinamici, (banalmente) i-controllati, non v-controllati, non-bilaterali, attivi. Infatti, risulta:

  $$p_{\mathrm{aE}} := v_\mathrm{E}\, i_\mathrm{E} = v_\mathrm{s}\, i_\mathrm{E}$$

  $$W_{\mathrm{aE}} := \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} p_{\mathrm{aE}} = \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} v_\mathrm{s}\, i_\mathrm{E}$$

  il che mostra che W_{eE} può assumere valori positivi illimitati e quindi che a volte

  $$W_{\mathrm{dE}} = \infty.$$

  I singoli componenti si distinguono solo per la funzione v_s. A volte è conveniente rilassare la condizione $v_\mathrm{s} \neq 0$ ammettendo anche $v_\mathrm{s} = 0$ e allora il componente viene detto sorgente ideale di tensione estesa.

- Sorgenti ideali di corrente (variabili v_J, i_J)
  Un bipolo si dice una sorgente ideale di corrente sse la sua equazione generatrice è

  $$i_\mathrm{J} = i_\mathrm{s}$$

  con

  $$i_\mathrm{s} \in C_\infty^-(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R}) \setminus \{0\}.$$

  La caratteristica geometrica di tali componenti è un fascio (degenere se i_s è costante) di rette parallele all'asse v. La funzione i_s è detta il segnale di tensione della sorgente.
  Essi sono tempo-invarianti sse i_s è costante, non lineari (affini), adinamici, (banalmente) v-controllati, non i-controllati, non-bilaterali, attivi. Infatti, risulta:

  $$p_{\mathrm{aJ}} := v_\mathrm{J}\, i_\mathrm{J} = v_\mathrm{J}\, i_\mathrm{s}$$

  $$W_{\mathrm{aJ}} := \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} p_{\mathrm{aJ}} = \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} v_\mathrm{J}\, i_\mathrm{s}$$

  il che mostra che W_{eJ} può assumere valori positivi illimitati e quindi che a volte

  $$W_{\mathrm{dJ}} = \infty.$$

  I singoli componenti si distinguono solo per la funzione i_s. A volte è conveniente rilassare la condizione $i_\mathrm{s} \neq 0$ ammettendo anche $i_\mathrm{s} = 0$ e allora il componente viene detto sorgente ideale di corrente estesa.

- Diodi ideali (variabili v_D, i_D)
  Un bipolo si dice un diodo sse in basi associate opportune la sua equazione generatrice è
  $$v_D + |v_D| - i_D + |i_D| + |v_D\, i_D| = 0.$$
  La caratteristica geometrica di tali componenti è formata dal semiasse $i_D \geq 0$ e dal semiasse $v_D \leq 0$.
  Questi componenti sono tempo-invarianti, non lineari, adinamici, non v-controllati né i-controllati, non-bilaterali, inerti (passivi). Infatti, risulta:
  $$p_{aD} := v_D\, i_D = 0$$
  $$W_{aD} := \int_{t_i}^{t_f} p_{aD} = 0$$
  il che mostra che
  $$W_{eD} = 0$$
  e quindi che sempre
  $$W_{dD} = 0.$$
  I singoli componenti sono indistinguibili.
- Interruttori in apertura all'istante $t = 0$ (variabili v_{S_a}, i_{S_a})
  Un bipolo si dice un interruttore in apertura all'istante $t = 0$ sse la sua equazione generatrice è
  $$(1 - \mathrm{u})\, v_{S_a} = \mathrm{u}\; i_{S_a}.$$
  La caratteristica geometrica di tali componenti è prima dell'istante di commutazione l'asse v e dopo tale istante l'asse i.
  Questi componenti sono tempo-varianti, lineari, adinamici, non v-controllati né i-controllati, bilaterali, inerti (passivi). Infatti, risulta:
  $$p_{aS_a} := v_{S_a}\, i_{S_a} = 0$$
  $$W_{aS_a} := \int_{t_i}^{t_f} p_{aS_a} = 0$$
  il che mostra che
  $$W_{eS_a} = 0$$
  e quindi che sempre
  $$W_{dS_a} = 0.$$
  I singoli componenti sono indistinguibili.
- Interruttori in chiusura all'istante $t = 0$ (variabili v_{S_c}, i_{S_c})
  Un bipolo si dice un interruttore in chiusura all'istante $t = 0$ sse la sua equazione generatrice è
  $$(1 - \mathrm{u})\, i_{S_c} = \mathrm{u}\; v_{S_c}.$$
  La caratteristica geometrica di tali componenti è prima dell'istante di commutazione l'asse i e dopo tale istante l'asse v.
  Questi componenti sono tempo-varianti, lineari, adinamici, non i-controllati né v-controllati, bilaterali, inerti (passivi). Infatti, risulta:
  $$p_{aS_c} := v_{S_c}\, i_{S_c} = 0$$
  $$W_{aS_c} := \int_{t_i}^{t_f} p_{aS_c} = 0$$
  il che mostra che
  $$W_{eS_c} = 0$$
  e quindi che sempre
  $$W_{dS_c} = 0.$$
  I singoli componenti sono indistinguibili.

2.2.2 Doppi bipoli resistivi

- Trasformatori ideali (variabili $v_{1\,\mathrm{T}}$, $v_{2\,\mathrm{T}}$, $i_{1\,\mathrm{T}}$, $i_{2\,\mathrm{T}}$)
  Un doppio bipolo in basi associate si dice un trasformatore ideale sse le sue equazioni generatrici sono
  $$\frac{v_{1\,\mathrm{T}}}{N_1} = \frac{v_{2\,\mathrm{T}}}{N_2}, \qquad N_1\, i_{1\,\mathrm{T}} = -\,N_2\, i_{2\,\mathrm{T}}$$
  con
  $$N_1,\, N_2 \in \mathbf{R}, \qquad N_1\, N_2 \neq 0.$$
  Questi componenti sono tempo-invarianti, lineari, adinamici. Essi sono:
  - $\{v_2,\, i_1\}$-controllati con equazioni
    $$v_{1\,\mathrm{T}} = n_{12}\, v_{2\,\mathrm{T}}, \qquad i_{2\,\mathrm{T}} = -\,n_{12}\, i_{1\,\mathrm{T}}$$
  - $\{v_1,\, i_2\}$-controllati con equazioni
    $$v_{2\,\mathrm{T}} = n_{21}\, v_{1\,\mathrm{T}}, \qquad i_{1\,\mathrm{T}} = -\,n_{21}\, i_{2\,\mathrm{T}}$$
  - $\{v_1,\, i_1\}$-controllati con equazioni
    $$v_{2\,\mathrm{T}} = n_{21}\, v_{1\,\mathrm{T}}, \qquad i_{2\,\mathrm{T}} = -\,n_{12}\, i_{1\,\mathrm{T}}$$
  - $\{v_2,\, i_2\}$-controllati con equazioni
    $$v_{1\,\mathrm{T}} = n_{12}\, v_{2\,\mathrm{T}}, \qquad i_{1\,\mathrm{T}} = -\,n_{21}\, i_{2\,\mathrm{T}}$$

  ove
  $$n_{12} := \frac{N_1}{N_2}, \qquad n_{21} := \frac{N_2}{N_1}$$
  si dicono, rispettivamente, rapporto di trasformazione diretto e inverso. Non sono altrimenti controllati.
  Questi componenti sono inerti (passivi). Infatti, risulta:
  $$p_{\mathrm{aT}} = v_{1\,\mathrm{T}}\, i_{1\,\mathrm{T}} + v_{2\,\mathrm{T}}\, i_{2\,\mathrm{T}} = n_{12}\, v_{2\,\mathrm{T}}\, i_{1\,\mathrm{T}} + v_{2\,\mathrm{T}}\,(-\,n_{12}\, i_{1\,\mathrm{T}}) = 0$$
  $$W_{\mathrm{aT}} := \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} p_{\mathrm{aT}} = 0$$
  il che mostra che
  $$W_{\mathrm{eT}} = 0$$
  e quindi che sempre
  $$W_{\mathrm{dT}} = 0.$$
  I singoli componenti si distinguono solo per il valore del rapporto di trasformazione diretto o inverso.

- Sorgenti di tensione controllate in tensione (variabili $v_{1\,\alpha}$, $v_{2\,\alpha}$, $i_{1\,\alpha}$, $i_{2\,\alpha}$)
  Un doppio bipolo in basi associate dichiarate si dice una sorgente di tensione controllata in tensione sse le sue equazioni generatrici sono
  $$i_{1\,\alpha} = 0, \qquad a\, v_{1\,\alpha} = b\, v_{2\,\alpha}$$
  con
  $$a,\, b \in \mathbf{R}, \qquad a\, b \neq 0.$$
  Questi componenti sono tempo-invarianti, lineari, adinamici. Essi sono:
  - $\{v_1,\, i_2\}$-controllati con equazioni
    $$i_{1\,\alpha} = 0, \qquad v_{2\,\alpha} = \alpha\, v_{1\,\alpha}$$

– $\{v_2, i_2\}$-controllati con equazioni

$$i_{1\,\alpha} = 0, \qquad v_{1\,\alpha} = \alpha' \, v_{2\,\alpha}$$

ove

$$\alpha := \frac{a}{b}, \qquad \alpha' := \frac{b}{a}$$

si dicono, rispettivamente, guadagno di tensione diretto e inverso (adimensionali). Non sono altrimenti controllati.
Essi sono attivi. Infatti, risulta:

$$p_{\mathrm{a}_\alpha} = v_{1\,\alpha}\, i_{1\,\alpha} + v_{2\,\alpha}\, i_{2\,\alpha} = v_{2\,\alpha}\, i_{2\,\alpha} = \alpha\, v_{1\,\alpha}\, i_{2\,\alpha}$$

$$W_{\mathrm{a}\alpha} := \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} p_{\mathrm{a}_\alpha} = \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} v_{2\,\alpha}\, i_{2\,\alpha} = \alpha \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} v_{1\,\alpha}\, i_{2\,\alpha}$$

il che mostra che $W_{\mathrm{e}\alpha}$ può assumere valori positivi illimitati e quindi che a volte

$$W_{\mathrm{d}\alpha} = \infty.$$

I singoli componenti si distinguono solo per il valore del guadagno di tensione diretto o inverso.

- Sorgenti di tensione controllate in corrente (variabili $v_{1\,\varrho}$, $v_{2\,\varrho}$, $i_{1\,\varrho}$, $i_{2\,\varrho}$)
  Un doppio bipolo in basi associate dichiarate si dice una sorgente di tensione controllata in corrente sse le sue equazioni generatrici sono

$$v_{1\,\varrho} = 0, \qquad a\, i_{1\,\varrho} = b\, v_{2\,\varrho}$$

con

$$a, b \in \mathbf{R}, \qquad a\, b \neq 0.$$

Questi componenti sono tempo-invarianti, lineari, adinamici. Essi sono:

– $\{i_1, i_2\}$-controllati con equazioni

$$v_{1\,\varrho} = 0, \qquad v_{2\,\varrho} = \varrho\, i_{1\,\varrho}$$

– $\{v_2, i_2\}$-controllati con equazioni

$$v_{1\,\varrho} = 0, \qquad i_{1\,\varrho} = \varrho' \, v_{2\,\varrho}$$

ove

$$\varrho := \frac{a}{b}, \qquad \varrho' := \frac{b}{a}$$

si dicono, rispettivamente, transresistenza diretta e inversa e hanno, rispettivamente, dimensione [R] (e quindi unità ohm con simbolo Ω) e [G] (e quindi unità siemens con simbolo S). Non sono altrimenti controllati.
Essi sono attivi. Infatti, risulta:

$$p_{\mathrm{a}_\varrho} = v_{1\,\varrho}\, i_{1\,\varrho} + v_{2\,\varrho}\, i_{2\,\varrho} = v_{2\,\varrho}\, i_{2\,\varrho} = \varrho\, i_{1\,\varrho}\, i_{2\,\varrho}$$

$$W_{\mathrm{a}_\varrho} := \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} p_{a_\varrho} = \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} v_{2\,\varrho}\, i_{2\,\varrho} = \varrho \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} i_{1\,\varrho}\, i_{2\,\varrho}$$

il che mostra che W_{e_ϱ} può assumere valori positivi illimitati e quindi che a volte

$$W_{\mathrm{d}_\varrho} = \infty.$$

I singoli componenti si distinguono solo per il valore della transresistenza diretta o inversa.

- Sorgenti di corrente controllate in corrente (variabili $v_{1\beta}$, $v_{2\beta}$, $i_{1\beta}$, $i_{2\beta}$)
Un doppio bipolo in basi associate dichiarate si dice una sorgente di corrente controllata in corrente sse le sue equazioni generatrici sono

$$v_{1\beta} = 0, \qquad a\, i_{1\beta} = b\, i_{2\beta}$$

con

$$a,\, b \in \mathbf{R}, \qquad a\, b \neq 0.$$

Questi componenti sono tempo-invarianti, lineari, adinamici. Essi sono:

  - $\{i_1,\, v_2\}$-controllati con equazioni

$$v_{1\beta} = 0, \qquad i_{2\beta} = \beta\, i_{1\beta}$$

  - $\{i_2,\, v_2\}$-controllati con equazioni

$$v_{1\beta} = 0, \qquad i_{1\beta} = \beta'\, i_{2\beta}$$

ove

$$\beta := \frac{a}{b}, \qquad \beta' := \frac{b}{a}$$

si dicono, rispettivamente, guadagno di corrente diretto e inverso (adimensionali).
Essi sono attivi. Infatti, risulta:

$$p_{\mathrm{a}\beta} = v_{1\beta}\, i_{1\beta} + v_{2\beta}\, i_{2\beta} = v_{2\beta}\, i_{2\beta} = \beta\, v_{2\beta}\, i_{1\beta}$$

$$W_{\mathrm{a}\beta} := \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} p_{\mathrm{a}\beta} = \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} v_{2\beta}\, i_{2\beta} = \beta \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} v_{2\beta}\, i_{1\beta}$$

il che mostra che $W_{\mathrm{e}\beta}$ può assumere valori positivi illimitati e quindi che a volte

$$W_{\mathrm{d}\beta} = \infty.$$

I singoli componenti si distinguono solo per il valore del guadagno di corrente diretto o inverso.

- Sorgenti di corrente controllate in tensione (variabili $v_{1\gamma}$, $v_{2\gamma}$, $i_{1\gamma}$, $i_{2\gamma}$)
Un doppio bipolo in basi associate dichiarate si dice una sorgente di corrente controllata in tensione sse le sue equazioni generatrici sono

$$i_{1\gamma} = 0, \qquad a\, v_{1\gamma} = b\, i_{2\gamma}$$

con

$$a,\, b \in \mathbf{R}, \qquad a\, b \neq 0.$$

Questi componenti sono tempo-invarianti, lineari, adinamici. Essi sono:

  - $\{v_1,\, v_2\}$-controllati con equazioni

$$i_{1\gamma} = 0, \qquad i_{2\gamma} = \gamma\, v_{1\gamma}$$

  - $\{i_2,\, v_2\}$-controllati con equazioni

$$i_{1\gamma} = 0, \qquad v_{1\gamma} = \gamma'\, i_{2\gamma}$$

ove

$$\gamma := \frac{a}{b}, \qquad \gamma' := \frac{b}{a}$$

si dicono, rispettivamente, transconduttanza diretta e inversa con dimensione [G] (e quindi unità siemens con simbolo S) e [R] (e quindi unità ohm con simbolo Ω). Non sono altrimente

controllati.
Essi sono attivi. Infatti, risulta:

$$p_{\mathrm{a}_\gamma} = v_{1\gamma}\, i_{1\gamma} + v_{2\gamma}\, i_{2\gamma} = v_{2\gamma}\, i_{2\gamma} = \gamma\, v_{1\gamma}\, v_{2\gamma}$$

$$W_{\mathrm{a}\gamma} := \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} p_{\mathrm{a}_\gamma} = \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} v_{2\gamma}\, i_{2\gamma} = \gamma \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} v_{1\gamma}\, v_{2\gamma}$$

il che mostra che $W_{\mathrm{e}\gamma}$ può assumere valori positivi illimitati e quindi che a volte

$$W_{\mathrm{d}_\gamma} = \infty.$$

I singoli componenti si distinguono solo per il valore della transconduttanza diretta o inversa.

2.2.3 Quadripoli resistivi

- Amplificatori operazionali o nullori (variabili $v_{+\,\mathrm{AO}}$, $v_{-\,\mathrm{AO}}$, $v_{\mathrm{o}\,\mathrm{AO}}$, $i_{+\,\mathrm{AO}}$, $i_{-\,\mathrm{AO}}$, $i_{\mathrm{o}\,\mathrm{AO}}$)
  Un quadripolo in basi associate dichiarate si dice un amplificatore operazionale sse le sue equazioni generatrici sono

  $$i_{+\,\mathrm{AO}} = 0, \qquad i_{-\,\mathrm{AO}} = 0, \qquad v_{+\,\mathrm{AO}} = v_{-\,\mathrm{AO}}.$$

  Questi componenti sono tempo-invarianti, lineari, adinamici. Essi sono (banalmente) $\{v_+, v_\mathrm{o}, i_\mathrm{o}\}$-controllati e $\{v_-, v_\mathrm{o}, i_\mathrm{o}\}$-controllati, mentre non sono altrimenti controllati.
  Essi sono attivi. Infatti, risulta:

  $$p_{\mathrm{a}\,\mathrm{AO}} := v_{+\,\mathrm{AO}}\, i_{+\,\mathrm{AO}} + v_{-\,\mathrm{AO}}\, i_{-\,\mathrm{AO}} + v_{\mathrm{o}\,\mathrm{AO}}\, i_{\mathrm{o}\,\mathrm{AO}} = v_{\mathrm{o}\,\mathrm{AO}}\, i_{\mathrm{o}\,\mathrm{AO}}$$

  $$W_{\mathrm{a}\,\mathrm{AO}} := \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} p_{\mathrm{a}\,\mathrm{AO}} = \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} v_{\mathrm{o}\,\mathrm{AO}}\, i_{\mathrm{o}\,\mathrm{AO}}$$

  il che mostra che $W_{\mathrm{e}\,\mathrm{AO}}$ può assumere valori positivi illimitati e quindi che a volte

  $$W_{\mathrm{d}\,\mathrm{AO}} = \infty.$$

  I singoli componenti sono indistinguibili.

  Questa componenti sono interpretabili anche come doppi bipoli con porta $\mathrm{d} := (+, -)$, porta $\mathrm{o} := (\mathrm{o}, \mathrm{r})$. In tal caso, le sue equazioni generatrici sono

  $$v_{\mathrm{d}\,\mathrm{AO}} = 0, \qquad i_{\mathrm{d}\,\mathrm{AO}} = 0.$$

  Questi componenti sono tempo-invarianti, lineari, adinamici, (banalmente) $\{v_\mathrm{o}, i_\mathrm{o}\}$-controllati, attivi. Infatti, risulta ancora:

  $$p_{\mathrm{a}\,\mathrm{AO}} := v_{\mathrm{d}\,\mathrm{AO}}\, i_{\mathrm{d}\,\mathrm{AO}} + v_{\mathrm{o}\,\mathrm{AO}}\, i_{\mathrm{o}\,\mathrm{AO}} = v_{\mathrm{o}\,\mathrm{AO}}\, i_{\mathrm{o}\,\mathrm{AO}}$$

  $$W_{\mathrm{a}\,\mathrm{AO}} := \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} p_{\mathrm{a}\,\mathrm{AO}} = \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} v_{\mathrm{o}\,\mathrm{AO}}\, i_{\mathrm{o}\,\mathrm{AO}}$$

  il che mostra che $W_{\mathrm{e}\,\mathrm{AO}}$ può assumere valori positivi illimitati e quindi che a volte

  $$W_{\mathrm{d}\,\mathrm{AO}} = \infty.$$

  I singoli componenti sono indistinguibili.

2.3 Componenti induttivi

Nel seguito viene fornito il catalogo di alcuni componenti induttivi suddivisi in bipoli e doppi bipoli, con l'indicazione di nome, simbolo, simbolo grafico, basi usate, equazioni generatrici i/v, caratteristica geometrica, nome unità e simbolo dei parametri, proprietà, caratteristica costitutiva. Converrà ricordare che l'ambiente di tensione è $C^-_\infty(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R})$, mentre l'ambiente di corrente e di flusso è $C^0_\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Inoltre, per il calcolo specifico dei segnali si tenga presente che se $h \in C^0_\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, allora $\int_0 h\, \mathrm{u_a} = (\int_0 h)\, \mathrm{u_c}$.

2.3.1 Bipoli induttivi

- Induttori classici (variabili v_L, i_L)
  Un bipolo in basi associate si dice un induttore classico sse la sua equazione generatrice è

$$a\,v_L = b\,D\,i_L \qquad \vee \qquad a\int_0 v_L = b\,i_L - b\,i_L(0)$$

con

$$a,\, b \in \mathbf{R}, \qquad a\,b > 0.$$

La descrizione pseudostatica del comportamento (si veda l'Appendice A.2) fa uso del flusso φ_L, ossia dell'integrale indefinito della tensione v_L. Un bipolo in basi associate si dice un induttore classico sse nelle variabili φ_L, i_L la sua equazione generatrice è

$$a\,\varphi_L = b\,i_L$$

con

$$a,\, b \in \mathbf{R}, \qquad a\,b > 0.$$

Il comportamento $\mathfrak{B}$ si ottiene tenendo conto che $v_L = D\varphi_L$. La caratteristica pseudostatica geometrica di tali componenti è una retta per l'origine a pendenza positiva.
Questi componenti sono tempo-invarianti, lineari, dinamici, bilaterali. Essi sono i-controllati con equazione

$$v_L = L\,D\,i_L, \qquad \text{con} \qquad L := \frac{b}{a} > 0$$

ma non sono v-controllati perché risulta:

$$i_L = i_L(0) + \Gamma\int_0 v_L, \qquad \text{con} \qquad \Gamma := \frac{a}{b} > 0.$$

Il parametro L è detto induttanza, e ha dimensione [L]:= $[\varphi]/[I]$ con unità henry e simbolo H. Il parametro Γ è detto inertanza, e ha dimensione $[\Gamma] := [I]/[\varphi]$ con unità henry^{-1} e simbolo H^{-1}. Evidentemente:

$$L\,\Gamma = 1.$$

Dunque, i singoli componenti non si distinguono solo per il valore dell'induttanza o dell'inertanza, ma anche per il valore della corrente all'istante di riferimento, $i_L(0)$. In un certo senso, l'induttore con induttanza assegnata non è un singolo componente ma una specie di componenti. Se però si fissa $i_L(0) = I_0 \in \mathbf{R}$, si partiziona il comportamento in insiemi disgiunti e si ottengono i comportamenti individuali, entro i quali possono valere o non valere le proprietà della specie. In particolare, il singolo componente (ie con L e I_0 assegnati) è lineare sse $I_0 = 0$ (affine, altrimenti), v-controllato, bilaterale sse $I_0 = 0$.
Questo componente inoltre è conservativo e passivo. Infatti, risulta:

$$p_{aL} := v_L\,i_L = L\,i_L\,Di_L = D\left(\frac{1}{2}L\,i_L^2 + K\right) \qquad \forall K \in \mathbf{R}$$

$$W_{aL} := \int_{t_i}^{t_f} p_{aL} = \int_{t_i}^{t_f} D\left(\frac{1}{2}L\,i_L^2 + K\right) = \frac{1}{2}L\,i_L^2(t_f) - \frac{1}{2}L\,i_L^2(t_i)$$

il che mostra che

$$U_L = \frac{1}{2}L\,i_L^2 + K$$

e quindi che

$$E_L = \frac{1}{2}L\,i_L^2 = W_{d_xL}.$$

2.3.2 Doppi bipoli induttivi

- Induttori non strettamente accoppiati (variabili $v_{1\,\mathrm{M}}, v_{2\,\mathrm{M}}, i_{1\,\mathrm{M}}, i_{2\,\mathrm{M}}$)
  Un doppio bipolo in basi associate dichiarate si dice un paio di induttori accoppiati sse le sue equazioni generatrici controllate in corrente sono della forma:

$$v_{1\,\mathrm{M}} = L_1\, Di_{1\,\mathrm{M}} + M\, Di_{2\,\mathrm{M}}$$

$$v_{2\,\mathrm{M}} = M\, Di_{1\,\mathrm{M}} + L_2\, Di_{2\,\mathrm{M}}$$

con

$$L_1 > 0, \qquad L_1\, L_2 > M^2, \qquad M \neq 0.$$

I parametri L_1, L_2, M sono detti, rispettivamente, induttanza primaria, induttanza secondaria e mutua induttanza, e hanno dimensione [L] (e quindi unità henry con simbolo H). Al fine di avere una misura dell'entità relativa di M, si usa anche definire il parametro adimensionale

$$k := \frac{|M|}{\sqrt{L_1\, L_2}}$$

detto coefficiente di accoppiamento. Infatti, per i vincoli imposti, risulta:

$$0 < k < 1.$$

Questi componenti sono tempo-invarianti, lineari, dinamici. Essi non sono altrimenti controllati. In particolare, non sono $\{v_1, v_2\}$-controllati, perché risulta:

$$i_{1\,\mathrm{M}} = i_{1\,\mathrm{M}}(0) + \Gamma_1 \int_0 v_{1\,\mathrm{M}} + \Gamma_m \int_0 v_{2\,\mathrm{M}}$$

$$i_{2\,\mathrm{M}} = i_{2\,\mathrm{M}}(0) + \Gamma_m \int_0 v_{1\,\mathrm{M}} + \Gamma_2 \int_0 v_{2\,\mathrm{M}}$$

con

$$\Gamma_1 > 0, \qquad \Gamma_1\, \Gamma_2 - \Gamma_m^2 > 0.$$

I parametri Γ_1, Γ_2, Γ_m sono detti, rispettivamente, inertanza primaria, inertanza secondaria e mutua inertanza, e hanno dimensione $[\Gamma]$ (e quindi unità henry^{-1} con simbolo H^{-1}). Evidentemente:

$$\Gamma_1 = \frac{L_2}{L_1\, L_2 - M^2}, \qquad \Gamma_2 = \frac{L_1}{L_1\, L_2 - M^2}, \qquad \Gamma_m = -\frac{M}{L_1\, L_2 - M^2}$$

$$L_1 = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1\, \Gamma_2 - \Gamma_m^2}, \qquad L_2 = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_1\, \Gamma_2 - \Gamma_m^2}, \qquad M = -\frac{\Gamma_m}{\Gamma_1\, \Gamma_2 - \Gamma_m^2}.$$

Dunque, i singoli componenti non si distinguono solo per il valore delle induttanze o delle inertanze, ma anche per i valori delle correnti all'istante di riferimento, $i_{1\,\mathrm{M}}(0)$ e $i_{2\,\mathrm{M}}(0)$. In un certo senso, gli induttori accoppiati con parametri assegnati non sono un singolo componente ma una specie di componenti. Se però si fissano $i_{1\,\mathrm{M}}(0) = I_{01} \in \mathbf{R}$ e $i_{2\,\mathrm{M}}(0) = I_{02} \in \mathbf{R}$, si partiziona il comportamento in insiemi disgiunti e si ottengono i comportamenti individuali, entro i quali possono valere o non valere le proprietà della specie. In particolare, il singolo componente (ie con L_1, L_2, M e I_{01}, I_{02} assegnati) è lineare sse $I_{01} = I_{02} = 0$ (affine, altrimenti), e controllato rispetto a tutte possibili scelte delle variabili.
Questo componente inoltre è conservativo e passivo. Infatti, risulta:

$$\begin{aligned}
p_{\mathrm{a}M} &= v_{1\,\mathrm{M}}\, i_{1\,\mathrm{M}} + v_{2\,\mathrm{M}}\, i_{2\,\mathrm{M}} = \\
&= (L_1\, Di_{1\,\mathrm{M}} + M\, Di_{2\,\mathrm{M}})\, i_{1\,\mathrm{M}} + (M\, Di_{1\,\mathrm{M}} + L_2\, Di_{2\,\mathrm{M}})\, i_{2\,\mathrm{M}} = \\
&= L_1\, i_{1\,\mathrm{M}}\, Di_{1\,\mathrm{M}} + M\, i_{1\,\mathrm{M}}\, Di_{2\,\mathrm{M}} + M\, i_{2\,\mathrm{M}}\, Di_{1\,\mathrm{M}} + L_2\, i_{2\,\mathrm{M}}\, Di_{2\,\mathrm{M}} = \\
&= D\left(\frac{1}{2} L_1\, i_{1\,\mathrm{M}}^2 + M\, i_{1\,\mathrm{M}}\, i_{2\,\mathrm{M}} + \frac{1}{2} L_2\, i_{2\,\mathrm{M}}^2 + K\right) \qquad \forall K \in \mathbf{R}
\end{aligned}$$

$$W_{\mathrm{aM}} := \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} p_{\mathrm{aM}} = \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} D\left(\frac{1}{2} L_1\, i_{1\,\mathrm{M}}^2 + M\, i_{1\,\mathrm{M}}\, i_{2\,\mathrm{M}} + \frac{1}{2} L_2\, i_{2\,\mathrm{M}}^2 + K\right) =$$

$$= \frac{1}{2} L_1 i^2_{1M}(t_f) + M i_{1M}(t_f) i_{2M}(t_f) + \frac{1}{2} L_2 i^2_{2M}(t_f) +$$

$$- \left(\frac{1}{2} L_1 i^2_{1M}(t_i) + M i_{1M}(t_i) i_{2M}(t_i) + \frac{1}{2} L_2 i^2_{2M}(t_i)\right)$$

il che mostra che

$$U_M = \frac{1}{2} L_1 i^2_{1M} + M i_{1M} i_{2M} + \frac{1}{2} L_2 i^2_{2M} + K.$$

La procedura di completamento del quadrato sotto i vincoli visti sui coefficienti fornisce:

$$\frac{1}{2} L_1 i^2_{1M} + M i_{1M} i_{2M} + \frac{1}{2} L_2 i^2_{2M} =$$

$$\frac{1}{2} L_1 \left(i_{1M} + \frac{M}{L_1} i_{2M}\right)^2 + \frac{1}{2L_1}\left(L_1 L_2 - M^2\right) i^2_{2M} \geqslant 0 \qquad \forall i_{1M}, i_{2M} \in \mathbf{R}$$

il che mostra che

$$E_M = \frac{1}{2} L_1 i^2_{1M} + M i_{1M} i_{2M} + \frac{1}{2} L_2 i^2_{2M} = W_{d_x M}.$$

- Induttori strettamente accoppiati (variabili $v_{1M_s}, v_{2M_s}, i_{1M_s}, i_{2M_s}$)
  Un doppio bipolo in basi associate dichiarate si dice un paio di induttori strettamente accoppiati sse le sue equazioni generatrici controllate in corrente sono della forma:

$$v_{1M_s} = L_1 Di_{1M_s} + M Di_{2M_s}$$

$$v_{2M_s} = MDi_{1M_s} + L_2 Di_{2M_s}$$

con

$$L_1 > 0, \qquad L_1 L_2 = M^2, \qquad M \neq 0.$$

Si noti che le equazioni generatrici i/v moltiplicate la prima per $\sqrt{L_2}$, la seconda per $\sqrt{L_1}$, e sottratte forniscono l'equazione

$$\sqrt{L_2}\, v_{1M_s} = \operatorname{sgn} M \sqrt{L_1}\, v_{2M_s}.$$

I parametri L_1, L_2, M sono detti, rispettivamente, induttanza primaria, induttanza secondaria e mutua induttanza, e hanno dimensione [L] (e quindi unità henry con simbolo H). Si noti che il coefficiente di accoppiamento risulta unitario:

$$k := \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}} = 1.$$

Questi componenti sono tempo-invarianti, lineari, dinamici. Essi non sono altrimenti controllati.

Dunque, i singoli componenti non si distinguono solo per il valore delle induttanze, ma anche per i valori delle correnti all'istante di riferimento, $i_{1M_s}(0)$ e $i_{2M_s}(0)$. In un certo senso, gli induttori strettamente accoppiati con parametri assegnati non sono un singolo componente ma una specie di componenti. Se però si fissano $i_{1M_s}(0) = I_{01} \in \mathbf{R}$ e $i_{2M_s}(0) = I_{02} \in \mathbf{R}$, si partiziona il comportamento in insiemi disgiunti e si ottengono i comportamenti individuali, entro i quali possono valere o non valere le proprietà della specie. In particolare, il singolo componente (ie con L_1, L_2 e I_{01}, I_{02} assegnati) è lineare sse $I_{01} = I_{02} = 0$ (affine, altrimenti), e controllato rispetto a tutte possibili scelte delle variabili, tranne che rispetto a v_1, v_2. Questo componente inoltre è conservativo e passivo, con energia

$$\begin{aligned} E_{M_s} &= \frac{1}{2} L_1 i^2_{1M_s} + M_s i_{1M_s} i_{2M_s} + \frac{1}{2} L_2 i^2_{2M_s} = \\ &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{L_1}\, i_{1M_s} + \operatorname{sgn} M \sqrt{L_2}\, i_{2M_s}\right)^2 = W_{d_x M_s}. \end{aligned}$$

2.4 Componenti capacitivi

Nel seguito viene fornito il catalogo di alcuni componenti capacitivi con l'indicazione di nome, simbolo, simbolo grafico, basi usate, equazioni generatrici i/v, caratteristica geometrica, nome unità e simbolo dei parametri, proprietà, caratteristica costitutiva. Converrà ricordare che l'ambiente di corrente è $C^{-}_{\infty}(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R})$, mentre l'ambiente di tensione e di carica è $C^{0}_{\infty}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Inoltre, per il calcolo specifico dei segnali si tenga presente che se $h \in C^{0}_{\infty}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, allora $\int_0 h\, \mathrm{u_a} = (\int_0 h)\, \mathrm{u_c}$.

2.4.1 Bipoli capacitivi

- Condensatori classici (variabili v_C, i_C)
  Un bipolo in basi associate si dice un condensatore classico sse la sua equazione generatrice è
  $$a\, i_C = b\, D v_C \qquad \vee \qquad a \textstyle\int_0 i_C = b\, v_C - b\, v_C(0)$$
  con
  $$a,\, b \in \mathbf{R}, \qquad a\, b > 0.$$
  La descrizione pseudostatica del comportamento (si veda l'Appendice A.2) fa uso della carica q_C, ossia dell'integrale della corrente i_C. Allora, un bipolo in basi associate si dice un condensatore classico sse nelle variabili v_C, q_C la sua equazione generatrice è
  $$a\, q_C = b\, v_C$$
  con
  $$a,\, b \in \mathbf{R}, \qquad a\, b > 0.$$
  Il comportamento $\mathfrak{B}$ si ottiene tenendo conto che $i_C = D q_C$. La caratteristica pseudostatica geometrica di tali componenti è una retta per l'origine a pendenza positiva.
  Questi componenti sono tempo-invarianti, lineari, dinamici, bilaterali. Essi sono i-controllati con equazione
  $$i_C = C\, D\, v_C, \qquad \text{con} \qquad C := \frac{b}{a} > 0$$
  ma non sono i-controllati perché risulta:
  $$v_C = v_C(0) + S \textstyle\int_0 i_C, \qquad \text{con} \qquad S := \dfrac{a}{b} > 0.$$
  Il parametro C è detto capacità, e ha dimensione [C]:= [q]/[V] e unità farad con simbolo F. Il parametro S è detto elastanza, e ha dimensione [S]:= [V]/[q] e unità farad^{-1}, simbolo F^{-1}. Evidentemente:
  $$C\, S = 1.$$
  Dunque, i singoli componenti non si distinguono solo per il valore della capacità o dell'elastanza, ma anche per il valore della tensione all'istante di riferimento, $v_C(0)$. In un certo senso, il condensatore con capacità assegnata non è un singolo componente ma una specie di componenti. Se però si fissa $v_C(0) = V_0 \in \mathbf{R}$, si partiziona il comportamento in insiemi disgiunti e si ottengono i comportamenti individuali, entro i quali possono valere o non valere le proprietà della specie. In particolare, il singolo componente (ie con C e V_0 assegnati) è lineare sse $V_0 = 0$ (affine, altrimenti), i-controllato, bilaterale sse $V_0 = 0$.
  Questo componente inoltre è conservativo e passivo. Infatti, risulta:
  $$p_{\mathrm{a}C} := v_C\, i_C = C\, v_C\, D v_C = D\left(\frac{1}{2} C\, v_C^2 + K\right) \qquad \forall K \in \mathbf{R}$$
  $$W_{\mathrm{a}C} := \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} p_{\mathrm{a}C} = \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} D\left(\frac{1}{2} C\, v_C^2 + K\right) = \frac{1}{2} C\, v_C^2(t_\mathrm{f}) - \frac{1}{2} C\, v_C^2(t_\mathrm{i})$$
  il che mostra che
  $$U_C = \frac{1}{2} C\, v_C^2 + K$$
  e quindi che
  $$E_C = \frac{1}{2} C\, v_C^2 = W_{\mathrm{d_x}C}.$$

Capitolo 3

Componenti composti e componenti equivalenti

In questo capitolo saranno discussi due concetti, composizione di componenti ed equivalenza tra componenti, che sono molto importanti in Teoria dei Circuiti perché consentono di apportare significative semplificazioni nell'analisi di varie configurazioni circuitali.

3.1 Componenti composti

I componenti presentati nel Capitolo 2 posseggono a volte una struttura interna e sono pertanto detti componenti composti in contrasto con i componenti che ne sono privi e son detti elementari (ovviamente, un componente elementare può essere visto come un componente composto banale). In questo caso, la rappresentazione grafica formale prevede che i terminali, detti esterni, penetrino il nucleo e afferiscano ciascuno a un nodo (detto di frontiera), e che, sempre all'interno del nucleo, siano presenti altri nodi e altri componenti (detti appunto interni) connessi a quei nodi e a questi secondo le consuete regole vigenti per i circuiti. Sui nodi e sui terminali di questi componenti interni sono definite, nel modo solito, tensioni e correnti, soggette anch'esse alle Leggi di Kirchhoff, e quindi potenza e lavoro assorbito ed erogato.

La rappresentazione effettiva non sempre rispetta questi canoni; anzi, spesso, occorre identificare un componente composto in uno schema in cui esso non appare affatto evidente. Per riconoscerne la presenza tra p nodi distinti, occorre identificare una sezione che intersechi lo schema del circuito secondo p fasci di terminali afferenti ai suddetti p nodi, in modo da non separare sottonuclei di multipli bipoli. Quindi i terminali di ogni fascio vengono fatti convergere in un unico punto che costituisce per l'appunto il nodo di frontiera e da questo si traccia il terminale esterno che afferisce allo specifico nodo esterno.

Le variabili di base esterne del componente composto sono in relazione con le variabili di base dei suoi componenti interni. Nel determinare le relative equazioni, è utile scegliere opportunamente le basi dei componenti interni.

Il comportamento esterno del componente composto, espresso in termini delle sue tensioni e correnti esterne di base (ovvero le sue equazioni i/v esterne) è correlato ai comportamenti (ovvero alle equazioni i/v) dei componenti interni, tramite le equazioni che esprimono le variabili di base esterne del componente composto in termini delle variabili di base dei componenti interni, e gli ulteriori vincoli imposti dalla LKT e dalla LKC. In generale, non è detto a priori che il comportamento esterno di un componente composto sia non vuoto, ovvero che le sue equazioni ammettano soluzioni, perché potrebbero porsi problemi di incompatibilità (ad esempio, nel caso di due sorgenti di tensione in parallelo con segnale differente). Se ciò non accade, si dirà che il componente composto è coerente. Si noti poi che uno stesso processo ammissibile di un componente composto può corrispondere o meno a più processi ammissibili dei suoi componenti interni. Una scelta opportuna delle variabili di base dei componenti interni può facilitare la ricerca delle equazioni nelle variabili di base esterne.

3.2 Strutture notevoli di bipoli composti

A prescindere dalla natura dei componenti coinvolti, alcune tra le strutture topologiche interne dei componenti composti meritano una speciale attenzione. In particolare, nel caso dei bipoli composti:

- la disposizione in serie di due bipoli; schema: un terminale di un bipolo e un terminale dell'altro bipolo sono connessi ad uno stesso nodo e nessun altro terminale di nessun altro componente è connesso a quel nodo; la scelta più conveniente delle basi è quella per cui:
$$v = v_1 + v_2, \qquad i = i_1 = i_2$$
- la disposizione in parallelo di due bipoli; schema: un terminale di ciascun bipolo è connesso ad uno stesso nodo, e l'altro terminale di ciascun bipolo è connesso ad un altro stesso nodo diverso dal primo; la scelta più conveniente delle basi è quella per cui:
$$v = v_1 = v_2, \quad i = i_1 + i_2$$
- la disposizione a scala di N bipoli: schema: un bipolo longitudinale, un bipolo trasversale, etc.; la scelta più conveniente delle basi è quella per cui:
$$v = v_{l1} + \ldots + v_{lk} + v_{tk}, \qquad i = i_{t1} + \ldots + i_{tk-1} + i_{lk}.$$

3.3 Bipoli composti notevoli

Tra i bipoli composti alcuni sono di uso così frequente da meritare un nome specifico.

- Sorgenti resistive di Thévenin.
Schema: serie di una sorgente ideale di tensione (estesa) con segnale denotato v_{T} e di un resistore lineare dotato di resistenza denotata R_{T}. Se $R_{\mathrm{T}} \neq 0$ e $v_{\mathrm{T}} \neq 0$, la sorgente si dice propria.
- Sorgenti resistive di Norton.
Schema: parallelo di una sorgente ideale di corrente (estesa) con segnale denotato i_{N} e di un resistore lineare dotato di conduttanza denotata G_{N}. Se $G_{\mathrm{N}} \neq 0$ e $i_{\mathrm{N}} \neq 0$, la sorgente si dice propria.
- Sorgenti induttive di Thévenin.
Schema: serie di una sorgente ideale di tensione (estesa) con segnale denotato v_{T} e di un induttore classico dotato di induttanza denotata L_{T}. Se $v_{\mathrm{T}} \neq 0$, la sorgente si dice propria.
- Sorgenti induttive di Norton.
Schema: parallelo di una sorgente ideale di corrente (estesa) con segnale denotato i_{N} e di un induttore classico dotato di induttanza denotata L_{N}. Se $i_{\mathrm{N}} \neq 0$, la sorgente si dice propria.
- Sorgenti capacitive di Thévenin.
Schema: serie di una sorgente ideale di tensione (estesa) con segnale denotato v_{T} e di un condensatore classico dotato di capacità denotata C_{T}. Se $v_{\mathrm{T}} \neq 0$, la sorgente si dice propria.
- Sorgenti capacitive di Norton.
Schema: parallelo di una sorgente ideale di corrente (estesa) con segnale denotato i_{N} e di un condensatore classico dotato di capacità denotata C_{N}. Se $i_{\mathrm{N}} \neq 0$, la sorgente si dice propria.

3.4 Componenti equivalenti

Due componenti (composti o meno) si dicono equivalenti sse esiste una corrispondenza biunivoca tra i loro terminali esterni tale per cui se si sostituisce l'uno all'altro in un qualsiasi circuito (nel rispetto della corrispondenza), l'insieme di soluzioni del circuito non cambia per quanto riguarda le variabili di tutti gli altri componenti.

Dalla definizione di equivalenza segue che:

- se uno dei due circuiti ha soluzione, allora anche l'altro circuito deve avere soluzione;
- se uno dei due circuiti ha soluzione unica, allora anche l'altro circuito deve avere soluzione unica per quanto riguarda le variabili dei componenti della parte comune;
- se entrambi i circuiti hanno soluzione unica, allora le due soluzioni devono coincidere per quanto riguarda le variabili dei componenti della parte comune.

Due componenti (composti o meno) si dicono esternamente indistinguibili sse esiste una corrispondenza biunivoca tra i loro terminali esterni tale per cui i loro comportamenti esterni riferiti a basi omologhe, ovvero le loro equazioni costitutive i/v esterne espresse in basi omologhe, sono uguali. Sussiste il seguente teorema.

Teorema fondamentale di equivalenza
Due componenti sono equivalenti sse sono esternamente indistinguibili. □

Grazie a questo teorema, l'espressione "componenti equivalenti" viene considerata identica all'espressione "componenti esternamente indistinguibili", e, nell'uso, preferita alla seconda.

In particolare, un componente composto è equivalente a un componente elementare avente come struttura e comportamento la struttura e il comportamento esterni del multipolo composto. Questo componente si dice il componente equivalente elementare o, semplicemente, l'equivalente del componente composto dato. È chiaro che sostituire in un circuito un componente composto col suo equivalente può dar luogo a una notevole semplificazione.

In generale, due componenti elementari non sono equivalenti, tranne qualche eccezione banale. Più spesso, ma non sempre, l'equivalente di un componente composto è un componente semplice.

La definizione di equivalenza permette di dimostrare agevolmente il seguente importante teorema.

Teorema della conservazione della potenza del componente composto
La potenza assorbita da un componente composto è uguale alla somma delle potenze assorbite dai suoi componenti interni. □

In esplicito, se K è il componente composto e $\mathcal{K}_\mathrm{i}$ è l'insieme dei componenti interni si ha

$$p_{\mathrm{a}_\mathrm{K}} = \sum_{\mathrm{X} \in \mathcal{K}_\mathrm{i}} p_{\mathrm{a}_\mathrm{X}}$$

e, in particolare, se tanto il componente composto che i suoi componenti interni sono bipoli, si ha

$$p_{\mathrm{a}_\mathrm{K}} = v_\mathrm{K}\, i_\mathrm{K}, \quad p_{\mathrm{a}_\mathrm{X}} = v_\mathrm{X}\, i_\mathrm{X}$$

e quindi

$$v_\mathrm{K}\, i_\mathrm{K} = \sum_{\mathrm{X} \in \mathcal{K}_\mathrm{i}} v_\mathrm{X}\, i_\mathrm{X}.$$

Questo teorema consente di ottenere il seguente importante risultato.

Teorema della passività di un componente composto
Un componente composto formato da componenti passivi è passivo. □

3.4.1 Equivalenti banali

Si dice che un bipolo (eventualmente composto) con base $\{v, i\}$ e comportamento $\mathfrak{B}$ ammette:

- la condizione di tensione $f \in C_\infty^-(\mathbf{R}_\mathrm{qo}, \mathbf{R})$ sse esiste un segnale di corrente $g \in C_\infty^-(\mathbf{R}_\mathrm{qo}, \mathbf{R})$ tale per cui la coppia (f, g) appartiene al comportamento del componente; in particolare, se $f = 0$ si dice che il bipolo ammette la condizione in corto;

- la condizione di corrente $f \in C^{-}_{\infty}(\mathbf{R}_{qo}, \mathbf{R})$ sse esiste un segnale di tensione $g \in C^{-}_{\infty}(\mathbf{R}_{qo}, \mathbf{R})$ tale per cui la coppia (f, g) appartiene al comportamento del componente; in particolare, se $f = 0$ si dice che il bipolo ammette la condizione a vuoto.

In concreto, soprattutto nel caso di bipoli composti, per accertare se il bipolo ammette una certa condizione di tensione si studia il circuito ottenuto chiudendo il bipolo su una sorgente di tensione con segnale pari a f (nel caso della condizione in corto su un corto circuito), mentre per accertare se il bipolo ammette una certa condizione di corrente si studia il circuito ottenuto chiudendo il bipolo su una sorgente di corrente con segnale pari a f (nel caso della condizione a vuoto su un circuito aperto).

Nel seguito, viene riportato un elenco di bipoli composti di cui si deduce l'equivalente.

- Un corto circuito e un generico componente K in parallelo.
  Da:
  $$v = v_{\mathrm{cc}} = v_{\mathrm{K}}, \qquad i = i_{\mathrm{cc}} + i_{\mathrm{K}}$$
  $$v_{\mathrm{cc}} = 0$$
  si ricava
  $$v = 0$$
  e quindi si deduce che l'equivalente è un corto circuito, ammesso che il componente K ammetta la condizione in corto.

- Un circuito aperto e un generico componente K in serie.
  Da:
  $$i = i_{\mathrm{ca}} = i_{\mathrm{K}}, \qquad v = v_{\mathrm{ca}} + v_{\mathrm{K}}$$
  $$i_{\mathrm{ca}} = 0$$
  si ricava
  $$i = 0$$
  e quindi si deduce che l'equivalente è un circuito aperto, ammesso che il componente K ammetta la condizione a vuoto.

- Una sorgente di tensione e un generico componente K in parallelo.
  Da:
  $$v = v_{\mathrm{E}} = v_{\mathrm{K}}, \qquad i = i_{\mathrm{E}} + i_{\mathrm{K}}$$
  $$v_{\mathrm{E}} = v_{\mathrm{s}}$$
  si ricava
  $$v = v_{\mathrm{s}}$$
  e quindi si deduce che l'equivalente è una sorgente di tensione con segnale pari a v_{s}, ammesso che il componente K ammetta la condizione di tensione v_s. In particolare, nel caso che anche K sia una sorgente di tensione, si deduce che le due sorgenti devono avere lo stesso segnale di tensione.

- Una sorgente di corrente e un generico componente K in serie.
  Da:
  $$i = i_{\mathrm{J}} = i_{\mathrm{K}}, \qquad v = v_{\mathrm{J}} + v_{\mathrm{K}}$$
  $$i_{\mathrm{J}} = i_{\mathrm{s}}$$
  si ricava
  $$i = i_{\mathrm{s}}$$
  e quindi si deduce che l'equivalente è una sorgente di corrente con segnale pari a i_{s}, ammesso che il componente K ammetta la condizione di corrente i_s. In particolare, nel caso che anche K sia una sorgente di corrente, si deduce che le due sorgenti devono avere lo stesso segnale di tensione.

3.4.2 Equivalente di bipoli composti resistivi

Nel seguito, viene riportato un elenco di bipoli composti di cui si deduce l'equivalente. Vista l'omogeneità di tipo dei componenti interni ai bipoli composti, l'ambiente del comportamento esterno dell'equivalente coincide con gli ambienti dei comportamenti dei bipoli interni e quindi non sono riportati né questo né quelli.

- Due resistori ohmici in serie.
  Da:
  $$v = v_{R_1} + v_{R_2}, \qquad i = i_{R_1} = i_{R_2}$$
  $$v_{R_1} = R_1\, i_{R_1}, \qquad v_{R_2} = R_2\, i_{R_2}$$
  si ricava
  $$v = R_1\, i_{R_1} + R_2\, i_{R_2} = R_1\, i + R_2\, i = (R_1 + R_2)\, i$$
  e quindi si deduce che l'equivalente è un resistore ohmico con
  $$R = R_1 + R_2$$
  ovvero con
  $$G = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}.$$
- Due resistori ohmici in parallelo.
  Da:
  $$i = i_{R_1} + i_{R_2}, \qquad v = v_{R_1} = v_{R_2}$$
  $$i_{R_1} = G_1 v_{R_1}, \qquad i_{R_2} = G_2 v_{R_2}$$
  si ricava
  $$i = G_1 v_{R_1} + G_2 v_{R_2} = G_1 v + G_2 v = (G_1 + G_2)\, v$$
  e quindi si deduce che l'equivalente è un resistore ohmico con
  $$G = G_1 + G_2$$
  ovvero con
  $$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$
- Resistori ohmici a scala.
  Per composizione serie/parallelo, si deduce che l'equivalente è un resistore ohmico con parametro (resistenza o conduttanza) esprimibile in forma di frazione continua.
- Due sorgenti ideali di tensione in serie.
  Da:
  $$v = v_{E_1} + v_{E_2}, \qquad i = i_{E_1} = i_{E_2}$$
  $$v_{E_1} = v_{s_1}, \qquad v_{E_2} = v_{s_2}$$
  si ricava
  $$v = v_{E_1} + v_{E_2} = v_{s_1} + v_{s_2}$$
  e quindi si deduce che l'equivalente è una sorgente ideale di tensione con segnale
  $$v_s = v_{s_1} + v_{s_2}.$$
- Due sorgenti ideali di corrente in parallelo.
  Da:
  $$i = i_{J_1} + i_{J_2}, \qquad v = v_{J_1} = v_{J_2}$$
  $$i_{J_1} = i_{s_1}, \qquad i_{J_2} = i_{s_2}$$
  si ricava
  $$i = i_{J_1} + i_{J_2} = i_{s_1} + i_{s_2}$$
  e quindi si deduce che l'equivalente è una sorgente ideale di corrente con segnale
  $$i_s = i_{s_1} + i_{s_2}.$$

3.4.3 Equivalente di bipoli composti induttivi

Nel seguito, viene riportato un elenco di bipoli composti induttivi di cui si desume l'equivalente. Vista l'omogeneità di tipo dei componenti interni ai bipoli composti, l'ambiente dei comportamento esterno dell'equivalente coincide con gli ambienti dei comportamenti dei bipoli interni e quindi non sono riportati né questo né quelli. La differenza sostanziale con i casi adinamici consiste nel fatto che stavolta occorre considerare anche la collimazione, ossia la corrispondenza di parametrizzazione, tra i comportamenti dei componenti equivalenti. Questa, a seconda dei casi può risultare biunivoca o meno.

- Due induttori in serie.
  Da:
  $$v = v_{L_1} + v_{L_2}, \qquad i = i_{L_1} = i_{L_2}$$
  $$v_{L_1} = L_1\, Di_{L_1}, \qquad v_{L_2} = L_2\, Di_{L_2}$$
  si ricava
  $$v = L_1\, Di_{L_1} + L_2\, Di_{L_2} = L_1\, Di + L_2\, Di = (L_1 + L_2)\, Di$$
  e quindi si deduce che l'equivalente è un induttore con
  $$L = L_1 + L_2.$$
  Poiché la parametrizzazione del comportamento dell'equivalente è dettata da $i(0)$, la collimazione dei comportamenti risulta data da:
  $$i(0) = i_{L_1}(0) = i_{L_2}(0)$$
  e quindi è biunivoca.

- Due induttori in parallelo.
  Da:
  $$i = i_{L_1} + i_{L_2}, \qquad v = v_{L_1} = v_{L_2}$$
  $$v_{L_1} = L_1\, Di_{L_1}, \qquad v_{L_2} = L_2\, Di_{L_2}$$
  si ricava
  $$Di = Di_{L_1} + Di_{L_2} = \frac{1}{L_1}\, v_{L_1} + \frac{1}{L_2}\, v_{L_2} = \frac{1}{L_1}\, v + \frac{1}{L_2}\, v = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right) v$$
  e quindi si deduce che l'equivalente è un induttore con
  $$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$
  ovvero con
  $$L = \frac{L_1\, L_2}{L_1 + L_2}.$$
  Poiché la parametrizzazione del comportamento dell'equivalente è dettata da $i(0)$, la collimazione dei comportamenti risulta data da:
  $$i(0) = i_{L_1}(0) + i_{L_2}(0)$$
  e quindi non è biunivoca.

- Induttori a scala.
  Per composizione serie/parallelo, si deduce che l'equivalente è un induttore con parametro (induttanza o inertanza) esprimibile in forma di frazione continua, e opportuni vincoli di coerenza e collimazione.

3.4.4 Equivalente di bipoli composti capacitivi

Nel seguito, viene riportato un elenco di bipoli composti capacitivi di cui si desume l'equivalente. Vista l'omogeneità di tipo dei componenti interni ai bipoli composti, l'ambiente dei comportamento esterno dell'equivalente coincide con gli ambienti dei comportamenti dei bipoli interni e quindi non sono riportati né questo né quelli. La differenza sostanziale con i casi adinamici consiste nel fatto che stavolta occorre considerare anche la collimazione, ossia la corrispondenza di parametrizzazione, tra i comportamenti dei componenti equivalenti.

- Due condensatori in parallelo.
  Da:
  $$i = i_{C_1} + i_{C_2}, \qquad v = v_{C_1} = v_{C_2}$$
  $$i_{C_1} = C_1\, Dv_{C_1}, \qquad i_{C_2} = C_2\, Dv_{C_2}$$
  si ricava
  $$i = C_1\, Dv_{C_1} + C_2\, Dv_{C_2} = C_1\, Dv + C_2\, Dv = (C_1 + C_2)\, Dv$$
  e quindi si deduce che l'equivalente è un condensatore con
  $$C = C_1 + C_2.$$
  Poiché la parametrizzazione del comportamento dell'equivalente è dettata da $v(0)$, la collimazione dei comportamenti risulta data da
  $$v(0) = v_{C_1}(0) = v_{C_2}(0)$$
  e quindi è biunivoca.

- Due condensatori in serie.
  Da:
  $$v = v_{C_1} + v_{C_2}, \qquad i = i_{C_1} = i_{C_2}$$
  $$i_{C_1} = C_1 Dv_{C_1}, \qquad i_{C_2} = C_2 Dv_{C_2}$$
  si ricava
  $$Dv = Dv_{C_1} + Dv_{C_2} = \frac{1}{C_1}\, i_{C_1} + \frac{1}{C_2}\, i_{C_2} = \frac{1}{C_1}\, i + \frac{1}{C_2}\, i = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) i$$
  e quindi si deduce che l'equivalente è un condensatore con
  $$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$
  ovvero con
  $$C = \frac{C_1\, C_2}{C_1 + C_2}.$$
  Poiché la parametrizzazione del comportamento dell'equivalente è dettata da $v(0)$, la collimazione dei comportamenti risulta data da:
  $$v(0) = v_{C_1}(0) + v_{C_2}(0)$$
  e quindi non è biunivoca.

- Condensatori a scala.
  Per composizione serie/parallelo, si deduce che l'equivalente è un condensatore con parametro (capacità o elastanza) esprimibile in forma di frazione continua, e opportuni vincoli di coerenza e collimazione.

3.4.5 Equivalenti di trasformatori variamente caricati

Nel seguito, viene riportato un elenco di bipoli composti formati da un trasformatore caricato in vario modo al secondario di cui si desume l'equivalente. L'ambiente dei comportamento esterno dell'equivalente coincide con gli ambienti dei comportamenti dei carichi e quindi non sono riportati né questo né quelli. A volte occorre considerare anche la collimazione, ossia la corrispondenza di parametrizzazione, tra i comportamenti dei componenti equivalenti.

In generale, se K è il bipolo di carico, vigono intanto le equazioni:

$$v = v_{1\,\mathrm{T}} = n_{12}\, v_{2\,\mathrm{T}} = n_{12}\, v_{\mathrm{K}}$$
$$i = i_{1\,\mathrm{T}} = -\frac{1}{n_{12}}\, i_{2\,\mathrm{T}} = \frac{1}{n_{12}}\, i_{\mathrm{K}}$$

da cui

$$v_{\mathrm{K}} = \frac{1}{n_{12}}\, v$$
$$i_{\mathrm{K}} = n_{12}\, i.$$

Segue:

- Trasformatore ideale caricato da un resistore ohmico (K = R).
  Da:
  $$v_{\mathrm{R}} = R\, i_{\mathrm{R}}$$
  per sostituzione si ricava
  $$\frac{1}{n_{12}}\, v = R\, n_{12}\, i$$
  ossia
  $$v = n_{12}^2\, R\, i$$
  e quindi si deduce che l'equivalente è un resistore ohmico con
  $$R' = n_{12}^2\, R.$$

- Trasformatore ideale caricato da una sorgente ideale di tensione (K = E).
  Da:
  $$v_{\mathrm{E}} = v_{\mathrm{s}}$$
  per sostituzione si ricava
  $$\frac{1}{n_{12}}\, v = v_{\mathrm{s}}$$
  ossia
  $$v = n_{12}\, v_{\mathrm{s}}$$
  e quindi si deduce che l'equivalente è una sorgente ideale di tensione con segnale
  $$v'_{\mathrm{s}} = n_{12}\, v_{\mathrm{s}}.$$

- Trasformatore ideale caricato da una sorgente ideale di corrente (K = J).
  Da:
  $$i_{\mathrm{J}} = i_{\mathrm{s}}$$
  per sostituzione si ricava
  $$n_{12}\, i = i_{\mathrm{s}}$$
  ossia
  $$i = \frac{i_{\mathrm{s}}}{n_{12}}$$
  e quindi si deduce che l'equivalente è una sorgente ideale di corrente con segnale
  $$i'_{\mathrm{s}} = \frac{i_{\mathrm{s}}}{n_{12}}.$$

- Trasformatore ideale caricato da un induttore (K = L).
  Da:
  $$v_\mathrm{L} = L\,D i_\mathrm{L}$$
  per sostituzione si ricava
  $$\frac{1}{n_{12}}\,v = L\,D(n_{12}\,i)$$
  ossia
  $$v = n_{12}^2\,L\,D i$$
  e quindi si deduce che l'equivalente è un induttore con
  $$L' = n_{12}^2\,L.$$
  Quanto alla collimazione, risulta:
  $$i(0) = \frac{1}{n_{12}}\,i_L(0).$$
- Trasformatore ideale caricato da un condensatore (K = C).
  Da:
  $$i_\mathrm{C} = C\,D v_\mathrm{C}$$
  per sostituzione si ricava
  $$n_{12}\,i = C\,D\left(\frac{1}{n_{12}}\,v\right)$$
  ossia
  $$i = \frac{1}{n_{12}^2}\,C\,D v$$
  e quindi si deduce che l'equivalente è un condensatore con
  $$C' = \frac{1}{n_{12}^2}\,C.$$
  Quanto alla collimazione, risulta:
  $$v(0) = n_{12}\,v_\mathrm{C}(0).$$

3.5 Equivalenza tra sorgenti di Thévenin/Norton

3.5.1 Sorgenti resistive

Teorema di equivalenza per sorgenti resistive di Thévenin/Norton
Una sorgente resistiva di Thévenin con parametri $(R_\mathrm{T}, v_\mathrm{T})$ e una sorgente resistiva di Norton con parametri $(G_\mathrm{N}, i_\mathrm{N})$ sono equivalenti sse

$$R_\mathrm{T} = R_\mathrm{N}, \qquad v_\mathrm{T} = R_\mathrm{N}\,i_\mathrm{N}.$$

□

Dimostrazione
Il comportamento dell'equivalente della sorgente di Thévenin è dato da:

$$v' = R_\mathrm{T}\,i' + v_\mathrm{T}, \qquad R_\mathrm{T} \neq 0, \qquad v_\mathrm{T} \in C_\infty^-(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R})$$
$$\mathrm{amb}\,v' = C_\infty^-(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R}), \qquad \mathrm{amb}\,i' = C_\infty^-(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R})$$

mentre il comportamento dell'equivalente della sorgente di Norton è dato da:

$$v'' = R_\mathrm{N}\,i'' + R_\mathrm{N}\,i_\mathrm{N}, \qquad R_\mathrm{N} \neq 0, \qquad i_\mathrm{N} \in C_\infty^-(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R})$$
$$\mathrm{amb}\,v' = C_\infty^-(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R}), \qquad \mathrm{amb}\,i' = C_\infty^-(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R}).$$

Dal confronto si deduce l'asserto. □

In pratica, questo teorema di equivalenza consente, data la sorgente resistiva di Thévenin con parametri $(R_\mathrm{T}, v_\mathrm{T})$, di ottenere la sorgente resistiva di Norton equivalente grazie alle equazioni

$$G_\mathrm{N} = \frac{1}{R_\mathrm{T}}, \qquad i_\mathrm{N} = \frac{v_\mathrm{T}}{R_\mathrm{T}}$$

ovvero, data la sorgente resistiva di Norton con parametri $(G_\mathrm{N}, i_\mathrm{N})$, di ottenere la sorgente resistiva di Thévenin equivalente grazie alle equazioni

$$R_\mathrm{T} = \frac{1}{G_\mathrm{N}}, \qquad v_\mathrm{T} = \frac{i_\mathrm{N}}{G_\mathrm{N}}.$$

Si noti infine che l'equivalente della sorgente resistiva di Thévenin nel caso in cui sia $R_\mathrm{T} > 0$ e della sorgente resistiva di Norton nel caso in cui sia $G_\mathrm{N} > 0$ è una sorgente reale.

3.5.2 Sorgenti induttive

Teorema di equivalenza per sorgenti induttive di Thévenin/Norton
Una sorgente induttiva di Thévenin con parametri $(L_\mathrm{T}, v_\mathrm{T})$ e una sorgente induttiva di Norton con parametri $(L_\mathrm{N}, i_\mathrm{N})$ sono equivalenti sse

$$L_\mathrm{T} = L_\mathrm{N}, \qquad i_\mathrm{N} \in C^0_\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}), \qquad v_\mathrm{T} = L_\mathrm{N}\, D i_\mathrm{N}$$

e la collimazione dei comportamenti è realizzata sse

$$i_{\mathrm{L_T}}(0) = i_{\mathrm{L_N}}(0) + i_\mathrm{N}(0).$$

□

Dimostrazione
Il comportamento dell'equivalente della sorgente di Thévenin è dato da:

$$v' = L_\mathrm{T}\, D\, i' - v_\mathrm{T}, \qquad L_\mathrm{T} > 0 \qquad v_\mathrm{T} \in C^-_\infty(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R})$$

$$\operatorname{amb} v' = C^-_\infty(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R}) \qquad \operatorname{amb} i' = C^0_\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$$

mentre il comportamento dell'equivalente della sorgente di Norton è dato da:

$$v'' = L_\mathrm{N}\, D\, i'' - L_\mathrm{N}\, D i_\mathrm{N}, \qquad L_\mathrm{N} > 0 \qquad i_\mathrm{N} \in C^-_\infty(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R})$$

$$\operatorname{amb} v'' = C^-_\infty(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R}), \qquad \operatorname{amb} i'' = i_\mathrm{N} + C^0_\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$$

Dal confronto (tenuto conto degli ambienti in cui possono attingere valori i' e i'') si deduce il primo asserto. Poiché la parametrizzazione del comportamento delle due sorgenti è dettato da $i'(0)$ e $i''(0)$, rispettivamente, da:

$$i' = i_{\mathrm{L_T}}, \qquad i'' = i_{\mathrm{L_N}} + i_\mathrm{N}$$

segue il secondo asserto. □

Si noti che le sorgenti induttive di Norton con

$$i_\mathrm{N} \in C^-_\infty(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R}) \setminus C^0_\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$$

non hanno equivalente tra le sorgenti induttive di Thévenin, mentre queste ultime hanno sempre un equivalente tra le prime.

In pratica, questo teorema di equivalenza consente, data la sorgente induttiva di Norton con parametri $(L_\mathrm{N}, i_\mathrm{N})$, di ottenere la sorgente induttiva di Thévenin equivalente grazie alle equazioni

$$L_\mathrm{T} = L_\mathrm{N}, \qquad v_\mathrm{T} = L_\mathrm{N}\, D i_\mathrm{N}$$

ovvero, data la sorgente induttiva di Thévenin con parametri $(L_\mathrm{T}, v_\mathrm{T})$, di ottenere la sorgente induttiva di Norton equivalente grazie alle equazioni

$$L_\mathrm{N} = L_\mathrm{T}, \qquad i_\mathrm{N} \in \Gamma_\mathrm{T} \textstyle\int v_\mathrm{T}.$$

Si noti infine che il teorema applicato al caso di una i_N costante mostra che un induttore con data induttanza e una sorgente induttiva di Norton con la stessa induttanza e segnale di sorgente costante sono equivalenti. Se, in particolare, $i_{\mathrm{L_N}}(0) = 0$, dalla relazione di collimazione tra i comportamenti segue che $i_\mathrm{N} = i_{\mathrm{L_T}}(0)$. Tale circostanza viene usata spesso per ridurre il circuito dato a un circuito con componenti scarichi e sorgenti.

3.5.3 Sorgenti capacitive

Teorema di equivalenza per sorgenti capacitive di Thévenin/Norton
Una sorgente capacitiva di Norton con parametri (C_N, i_N) e una sorgente capacitiva di Thévenin con parametri (C_T, v_T) sono equivalenti sse

$$C_N = C_T, \qquad v_T \in C^0_\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}), \qquad i_N = C_T \, D v_T$$

e la collimazione dei comportamenti è realizzata sse

$$v_{C_N}(0) = v_{C_T}(0) + v_T(0).$$

□

Dimostrazione
Il comportamento dell'equivalente della sorgente di Norton è dato da:

$$i' = C_N \, Dv' - i_N, \qquad C_N > 0, \qquad i_N \in C^-_\infty(\mathbf{R}_{qo}, \mathbf{R})$$

$$\text{amb}\, v' = C^0_\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}), \qquad \text{amb}\, i' = C^-_\infty(\mathbf{R}_{qo}, \mathbf{R})$$

mentre il comportamento dell'equivalente della sorgente di Thévenin è dato da:

$$i'' = C_T \, Dv'' - C_T \, Dv_T, \qquad C_T > 0, \qquad v_T \in C^-_\infty(\mathbf{R}_{qo}, \mathbf{R})$$

$$\text{amb}\, v'' = v_T + C^0_\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}), \qquad \text{amb}\, i'' = C^-_\infty(\mathbf{R}_{qo}, \mathbf{R}).$$

Dal confronto (tenuto conto degli ambienti in cui possono attingere valori v' e v'') si deduce il primo asserto. Poiché la parametrizzazione del comportamento delle due sorgenti è dettato da $v'(0)$ e $v''(0)$, rispettivamente, da:

$$v' = v_{C_N}, \qquad v'' = v_{C_T} + v_T$$

segue il secondo asserto. □

Si noti che le sorgenti capacitive di Thévenin con

$$v_T \in C^-_\infty(\mathbf{R}_{qo}, \mathbf{R}) \setminus C^0_\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$$

non hanno equivalente tra le sorgenti capacitive di Norton, mentre queste ultime hanno sempre un equivalente tra le prime.

In pratica, questo teorema di equivalenza consente, data la sorgente capacitiva di Thévenin con parametri (C_T, v_T), di ottenere la sorgente capacitiva di Norton equivalente grazie alle equazioni

$$C_N = C_T, \qquad i_N = C_T \, Dv_T$$

ovvero, data la sorgente capacitiva di Norton con parametri $(C_N,\ i_N)$, di ottenere la sorgente capacitiva di Thévenin equivalente grazie alle equazioni

$$C_T = C_N, \qquad v_T \in S_N \int i_N.$$

Si noti infine che il teorema applicato al caso di una v_T costante mostra che un condensatore con data capacità e una sorgente capacitiva di Thévenin con la stessa capacità e segnale di sorgente costante sono equivalenti. Se, in particolare, $v_{C_T}(0) = 0$, dalla relazione di collimazione tra i comportamenti segue che $v_T = v_{C_N}(0)$. Tale circostanza viene usata spesso per ridurre il circuito dato a un circuito con componenti scarichi e sorgenti.

3.6 Equivalenti di Thévenin/Norton di bipoli composti resistivi

Dato un bipolo composto K, il bipolo ottenuto azzerando il segnale delle sue sorgenti ideali interne (ovvero sostituendo ogni sorgente di tensione con un corto circuito, ogni sorgente di corrente con un circuito aperto) si dice il bipolo a riposo associato a K, indicato con K_0.

Teorema di Thévenin
Un bipolo composto K formato da componenti resistivi lineari tempo-invarianti e sorgenti ideali è equivalente a una sorgente resistiva di Thévenin sse ammette la condizione a vuoto e, a riposo, è equivalente a un resistore lineare dotato di resistenza. In tali ipotesi, il segnale v_{T} e la tensione a vuoto di K, la resistenza R_{T} e la resistenza dell'equivalente di K_0 sono uguali. □

In concreto, l'uso del teorema comporta due "tentativi" di calcolo: la tensione a vuoto di K, e la resistenza dell'equivalente di K_0. Se anche solo uno dei due non ha esito positivo l'equivalenza non può sussistere, se entrambi hanno esito positivo l'equivalenza sussiste.

Teorema di Norton
Un bipolo composto K formato da componenti resistivi lineari tempo-invarianti e sorgenti ideali è equivalente a una sorgente resistiva di Norton sse ammette la condizione in corto e, a riposo, è equivalente a un resistore lineare dotato di conduttanza. In tali ipotesi, il segnale i_{N} e la corrente in corto di K, la conduttanza G_{N} e la conduttanza dell'equivalente di K_0 sono uguali. □

3.7 Restrizione di un componente

Vari motivi, non solo tecnici, inducono a introdurre il concetto di restrizione di un componente. Si dice restrizione di un componente K il componente $\mathrm{K}|_E$ cui lo riduce una restrizione del suo comportamento generata da una qualche condizione E. Ad esempio, nel caso di un quadripolo K con terminali di schema $\{\,\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{c},\mathrm{d}\,\}$, la restrizione dettata dalla condizione $i_{\mathrm{b_K}} = -i_{\mathrm{a_K}}$, se ammessa, lo riduce a un quadripolo interpretabile come doppio bipolo, se contemporaneamente si considerano solo le tensioni $v_1 := v_{\mathrm{a}} - v_{\mathrm{b}}$ e $v_2 := v_{\mathrm{c}}$.

In generale, il circuito con il componente originale e il circuito con una sua restrizione hanno insiemi di soluzioni disgiunti. Tuttavia, se nel primo circuito può realizzarsi la condizione generatrice della restrizione, allora il primo insieme include il secondo, e, se tale condizione non può non realizzarsi, i due, addirittura, coincidono. Ad esempio, questo è il caso della sostituzione di un quadripolo con la sua restrizione a doppio bipolo, se il quadripolo è chiuso su due bipoli.

3.8 Teorema di sostituzione

Un componente (composto o meno) si dice sur-equivalente a un altro componente (composto o meno) e questo si dice sub-equivalente a quello, sse esiste una corrispondenza biunivoca tra i loro terminali esterni tale per cui il comportamento esterno del primo include propriamente il comportamento esterno del secondo, essendo i due comportamenti riferiti a basi omologhe.

Un caso particolare notevole di sur- o sub-equivalenza è quello che riguarda un componente e le restrizioni del componente stesso.

Lemma di sostituzione
Ogni restrizione di tensione (corrente) di un bipolo è sub-equivalente ad una sorgente di tensione (corrente) con segnale uguale al segnale di restrizione. □

Teorema di sostituzione
Sia N un circuito con soluzione unica, K un suo bipolo (eventualmente composto), e sia con soluzione unica anche il circuito N′ ottenuto da N sostituendo a K una sorgente di tensione (corrente) con segnale pari al segnale di tensione (corrente) che si ha per K in N. Allora la soluzione di N e la soluzione di N′ coincidono per quanto riguarda le variabili di tutti i componenti comuni. □

Capitolo 4

Circuiti dinamici

In questo capitolo sarà analizzato il comportamento dei più semplici circuiti del I ordine (formati da un condensatore o un induttore, un resistore e una sorgente), e del II ordine (formati da un condensatore, un induttore, un resistore e una sorgente), in funzionamento libero, forzato (con segnale a gradino o sinusoidale) e completo. Il lettore dovrebbe prendere visione del materiale esposto nell'Appendice A.3.

4.1 Circuito RCJ

Il circuito ha sei variabili, tre tensioni e tre correnti, ma la corrente della sorgente è data, le tre tensioni sono uguali, la corrente del resistore è proporzionale alla tensione e la corrente del condensatore è proporzionale alla derivata della tensione. Quindi è opportuno scegliere come variabile di risoluzione proprio la tensione del condensatore, il cui ambiente è $C^0_\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$. Risulta:

$$v_\mathrm{C} = v_\mathrm{R} = v_J, \qquad i_\mathrm{C} + i_\mathrm{R} = i_\mathrm{J}$$

$$i_\mathrm{C} = C\,Dv_\mathrm{C} \qquad v_\mathrm{C}(0) = V_0, \qquad i_\mathrm{R} = G\,v_\mathrm{R}, \qquad i_\mathrm{J} = i_\mathrm{s}$$

da cui:

$$C\,Dv_\mathrm{C} + G\,v_\mathrm{C} = i_\mathrm{s}$$

ovvero in forma monica:

$$Dv_\mathrm{C} + \frac{G}{C}\,v_\mathrm{C} = \frac{i_\mathrm{s}}{C}, \qquad v_\mathrm{C}(0) = V_0$$

con

$$0 \leqslant G < \infty, \qquad 0 < C < \infty.$$

Qui si vogliono studiare solo tre casi particolari molto importanti:

- il caso con stato non-nullo e ingresso nullo;
- il caso con stato nullo e ingresso non-nullo 0-causale;
- il caso con stato non-nullo e ingresso non-nullo 0-causale.

4.1.1 Risposta con stato non-nullo e ingresso nullo

Il problema è:

$$Dv_\mathrm{C} + \frac{G}{C}\,v_\mathrm{C} = 0, \qquad v_\mathrm{C}(0) = V_0.$$

L'equazione è omogenea. L'equazione caratteristica e la sua soluzione sono:

$$\lambda + \frac{G}{C} = 0, \qquad \lambda_0 \coloneqq -\frac{G}{C}.$$

La quantità λ_0 si dice frequenza naturale del circuito.

Occorre distinguere due casi.

- se $\lambda_0 \neq 0$ il circuito si dice smorzato e risulta:

$$v_C(t) = K\,e^{\lambda_0 t}$$

con

$$v_C(0) = V_0 = K$$

da cui:

$$K = V_0$$

e quindi:

$$v_C(t) = V_0\,e^{\lambda_0 t}.$$

La quantità

$$\tau := \frac{C}{G} = RC$$

si dice costante di tempo del circuito. Il transitorio si estingue all'infinito, ma dopo quattro o cinque volte τ esso può essere considerato sostanzialmente esaurito.

- se $\lambda_0 = 0$ il circuito si dice non smorzato e risulta:

$$v_C(t) = K$$

con

$$v_C(0) = V_0 = K$$

da cui:

$$K = V_0$$

e quindi:

$$v_C(0) = V_0.$$

4.1.2 Risposta con stato nullo e ingresso non-nullo 0-causale

Il problema è:

$$Dv_C + \frac{G}{C}\,v_C = \frac{i_s}{C}, \qquad v_C(0) = 0.$$

Si considerino i due seguenti casi.

- Caso del gradino: $i_s(t) = I\,u(t)$.
L'equazione in $\mathbf{R}^-$ è:

$$Dv_C + \frac{G}{C}\,v_C = 0, \qquad v_C(0^-) = 0.$$

La sua soluzione è:

$$v_{C-}(t) = 0.$$

L'equazione in $\mathbf{R}^+$ è:

$$Dv_C + \frac{G}{C}\,v_C = \frac{I}{C}, \qquad v_C(0^+) = 0.$$

Se il circuito è smorzato un integrale particolare è:

$$v_{C_{p+}} = R\,I.$$

Se invece il circuito è non smorzato (caso del gradino risonante), un integrale particolare è:

$$v_{C_{p+}}(t) = \frac{I}{C}\,t.$$

Quindi:

– se il circuito è smorzato l'integrale generale è:

$$v_{C_+}(t) = K\,\mathrm{e}^{\lambda_0 t} + R\,I$$

con

$$v_{C_+}(0^+) = 0 = K + R\,I$$

da cui

$$K = -\,R\,I$$

e quindi

$$v_{C_+}(t) = -R\,I\,\mathrm{e}^{\lambda_0 t} + R\,I = R\,I\left(1 - \mathrm{e}^{\lambda_0 t}\right)$$

– se il circuito è non smorzato l'integrale generale è:

$$v_{C_+}(t) = K + \frac{I}{C}\,t$$

con

$$v_{C_+}(0^+) = 0 = K$$

da cui

$$K = 0$$

e quindi

$$v_{C_+}(t) = \frac{I}{C}\,t.$$

La soluzione su **R**, per concatenazione, è data nel primo caso da:

$$v_C(t) = R\,I\left(1 - \mathrm{e}^{\lambda_0 t}\right)\mathrm{u_c}(t)$$

e nel secondo da:

$$v_C(t) = \frac{I}{C}\,t\,\mathrm{u_c}(t)$$

- Caso della sinusoide 0-causale: $i_s(t) = (I_c \cos\omega t + I_s \sin\omega t)\,\mathrm{u_a}(t)$.
  L'equazione in $\mathbf{R}^-$ è:

$$Dv_C + \frac{G}{C}\,v_C = 0, \qquad v_C(0^-) = 0.$$

La sua soluzione è:

$$v_{C-}(t) = 0.$$

L'equazione in $\mathbf{R}^+$ è:

$$Dv_C + \frac{G}{C}\,v_C = \frac{I_c \cos\omega t + I_s \sin\omega t}{C}, \qquad v_C(0^+) = 0.$$

Un integrale particolare è:

$$v_{C_{p+}}(t) = V_c \cos\omega t + V_s \sin\omega t$$

con

$$V_C = \frac{G\,I_c - \omega C\,I_s}{G^2 + \omega^2 C^2}, \qquad V_s = \frac{\omega C\,I_c + G\,I_s}{G^2 + \omega^2 C^2}$$

e quindi:

– se il circuito è smorzato l'integrale generale è:

$$v_{C_+}(t) = K\,\mathrm{e}^{\lambda_0 t} + V_c \cos\omega t + V_s \sin\omega t$$

con

$$v_{C_+}(0^+) = 0 = K + v_C$$

da cui

$$K = -\,v_C$$

e quindi:

$$v_{C_+}(t) = -\,V_c\,\mathrm{e}^{\lambda_0 t} + V_c \cos\omega t + V_s \sin\omega t$$

– se il circuito è non smorzato l'integrale generale è

$$v_{C_+}(t) = K + V_c \cos \omega t + V_s \sin \omega t$$

con

$$v_{C_+}(0^+) = 0 = K + V_c$$

da cui

$$K = -V_c$$

e quindi:

$$v_{C_+}(t) = -V_c + V_c \cos \omega t + V_s \sin \omega t.$$

La soluzione su **R**, per concatenazione, è data, nel primo caso, da:

$$v_C(t) = \left(-V_c\, e^{\lambda_0 t} + V_c \cos \omega t + V_s \sin \omega t\right) u_c(t)$$

e nel secondo da:

$$v_C(t) = (-V_c + V_c \cos \omega t + V_s \sin \omega t)\, u_c(t).$$

4.1.3 Risposta completa

La risposta completa a ingresso causale ossia la soluzione di:

$$Dv_C + \frac{G}{C} v_C = \frac{i_s}{C}, \qquad v_C(0) = V_0$$

si può ottenere come somma delle prime due risposte. Infatti, se v'_C, v''_C sono rispettivamente la soluzione di:

$$Dv_C + \frac{G}{C} v_C = 0, \qquad v_C(0) = V_0$$

$$Dv_C + \frac{G}{C} v_C = \frac{i_s}{C}, \qquad v_C(0) = 0$$

allora $v'_C + v''_C$ è la soluzione del problema iniziale. Infatti:

$$D(v'_C + v''_C) + \frac{G}{C}(v'_C + v''_C) = Dv'_C + \frac{G}{C} v'_C + Dv''_C + \frac{G}{C} v''_C = 0 + \frac{i_s}{C} = \frac{i_s}{C}$$

e

$$(v'_C + v''_C)(0) = v'_C(0) + v''_C(0) = V_0 + 0 = V_0.$$

Ma allora, se si indicano con

$$v_{C_{h1}}, \qquad v_{C_{h2}}$$

due opportune soluzioni dell'equazione omogenea, si può scrivere:

- nel caso del gradino, se non risonante:

$$v_C(t) = v_{C_{h1}}(t) + (v_{C_{h2}}(t) + R\,I)\, u_c(t)$$

  se risonante:

$$v_C(t) = v_{C_{h1}}(t) + \frac{I}{C}\, t\, u_c(t)$$

- nel caso della sinusoide 0-causale:

$$v_C(t) = v_{C_{h1}}(t) + (v_{C_{h2}}(t) + V_c \cos \omega t + V_s \sin \omega t)\, u_c(t).$$

Pertanto, se il circuito è smorzato ($\lambda_0 < 0$), allora $t \to \infty$ si ha:

- nel caso del gradino:

$$v_C(t) \to RI$$

- nel caso della sinusoide 0-causale:

$$v_{\mathrm{C}}(t) \to V_{\mathrm{c}} \cos \omega t + V_{\mathrm{s}} \sin \omega t.$$

Quindi, i suddetti termini assumono il significato di parte a regime del segnale, indipendente dallo stato a $t = 0$, mentre gli altri, ossia

$$v_{\mathrm{C_{h1}}}(t) + v_{\mathrm{C_{h2}}}(t)\, \mathrm{u}(t)$$

assumono il significato di parte transitoria del segnale, dipendente dallo stato a $t = 0$.

Se invece il circuito è non smorzato ($\lambda_0 = 0$), nel caso della sinusoide 0-causale, si ha ancora una sorta di regime composito, costituito da una componente costante dipendente dallo stato a $t = 0$, e da una componente sinusoidale a frequenza ω indipendente da esso (ed eventualmente filtrabile).

Infine, se il circuito è non smorzato nel caso del gradino ($\lambda_0 = 0$) non si ha regime, perché il termine costante, dipendente dallo stato a $t = 0$, si somma (e non è filtrabile) a un termine lineare secolare, indipendente dallo stato a $t = 0$.

4.1.4 Complementi

È interessante ricavare e confrontare le equazioni nelle altre variabili del circuito RCJ parallelo.

L'equazione nella corrente del resistore si ottiene osservando che $v_{\mathrm{C}} = R i_{\mathrm{R}}$ talché:

$$D i_{\mathrm{R}} + \frac{G}{C} i_{\mathrm{R}} = \frac{G}{C} i_s, \qquad \mathrm{amb}\, i_{\mathrm{R}} = C^0_\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}), \qquad i_{\mathrm{R}}(0) = G V_0.$$

L'equazione nella corrente del condensatore si ottiene osservando che $D v_{\mathrm{C}} = \dfrac{i_{\mathrm{C}}}{C}$ talché:

$$D i_{\mathrm{C}} + \frac{G}{C} i_{\mathrm{C}} = D i_s, \qquad \mathrm{amb}\, i_{\mathrm{C}} = C^-_\infty(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R}), \qquad i_{\mathrm{C}}(0^-) = -G V_0, \quad i_{\mathrm{C}}(0^+) = i_{\mathrm{s}}(0^+) - G V_0.$$

4.2 Altri circuiti elementari del I ordine

Per questi circuiti le equazioni differenziali risultano:

- Circuito RC serie:
  Equazione in v_{C}:

$$D v_{\mathrm{C}} + \frac{G}{C} v_{\mathrm{C}} = \frac{G}{C} v_s, \qquad \mathrm{amb}\, v_{\mathrm{C}} = C^0_\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}), \qquad v_{\mathrm{C}}(0) = V_0.$$

  Equazione in v_{R}:

$$D v_{\mathrm{R}} + \frac{G}{C} v_{\mathrm{R}} = D v_s, \qquad \mathrm{amb}\, v_{\mathrm{R}} = C^-_\infty(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R}), \qquad v_{\mathrm{R}}(0^-) = -V_0, \quad v_{\mathrm{R}}(0^+) = v_{\mathrm{s}}(0^+) - V_0.$$

  Equazione in i_{C}:

$$D i_{\mathrm{C}} + \frac{G}{C} i_{\mathrm{C}} = G\, D v_s, \qquad \mathrm{amb}\, i_{\mathrm{C}} = C^-_\infty(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R}), \qquad i_{\mathrm{C}}(0^-) = -G V_0, \quad i_{\mathrm{C}}(0^+) = G v_{\mathrm{s}}(0^+) - G V_0.$$

- Circuito RL serie.
  Equazione in i_{L}:

$$D i_{\mathrm{L}} + \frac{R}{L} i_{\mathrm{L}} = \frac{v_{\mathrm{s}}}{L}, \qquad \mathrm{amb}\, i_{\mathrm{L}} = C^0_\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}), \qquad i_{\mathrm{L}}(0) = I_0.$$

  Equazione in v_{R}:

$$D v_{\mathrm{R}} + \frac{R}{L} v_{\mathrm{R}} = \frac{R}{L} v_{\mathrm{s}}, \qquad \mathrm{amb}\, v_{\mathrm{R}} = C^0_\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}), \qquad v_{\mathrm{R}}(0) = R I_0.$$

  Equazione in v_{L}:

$$D v_{\mathrm{L}} + \frac{R}{L} v_{\mathrm{L}} = D v_{\mathrm{s}}, \qquad \mathrm{amb}\, v_{\mathrm{L}} = C^-_\infty(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R}), \qquad v_{\mathrm{L}}(0^-) = -R I_0, \quad v_{\mathrm{L}}(0^+) = v_{\mathrm{s}}(0^+) - R I_0.$$

- Circuito RL parallelo.
  Equazione in i_L:

$$Di_L + \frac{R}{L}\,i_L = \frac{R}{L}\,i_s, \qquad \text{amb}\, i_L = C^0_\infty(\mathbf{R},\mathbf{R}), \qquad i_L(0) = I_0.$$

  Equazione in i_R:

$$Di_R + \frac{R}{L}\,i_R = Di_s, \qquad \text{amb}\, i_R = C^-_\infty(\mathbf{R}_{qo},\mathbf{R}), \qquad i_R(0^-) = -I_0, \quad i_R(0^+) = i_s(0^+) - I_0.$$

  Equazione in v_L:

$$Dv_L + \frac{R}{L}\,v_L = R\,Di_s, \qquad \text{amb}\, v_L = C^-_\infty(\mathbf{R}_{qo},\mathbf{R}), \qquad v_L(0^-) = -RI_0, \quad v_L(0^+) = Ri_s(0^+) - RI_0.$$

Un generico circuito del I ordine si può talora studiare mediante il teorema di Thévenin o Norton e il teorema di sostituzione. In primis, si determina il bipolo equivalente di Thévenin o Norton del componente composto in parallelo al componente dinamico, e si risolve il circuito elementare del I ordine così ottenuto. In secundis, si sostituisce al componente dinamico, se condensatore, una sorgente di tensione, se induttore, una sorgente di corrente, con segnale pari alla funzione calcolata nel circuito precedente, e si risolve il circuito resistivo così ottenuto per la variabile di interesse, eventualmente riapplicando il teorema di Thévenin o Norton.

4.3 Circuito RCLJ

Il circuito ha otto variabili, quattro tensioni e quattro correnti, ma la corrente della sorgente è data, le quattro tensioni sono uguali e come la corrente del resistore sono proporzionali alla derivata della corrente dell'induttore, e la corrente del condensatore è proporzionale alla derivata seconda della corrente dell'induttore. Quindi è opportuno scegliere come variabile di risoluzione proprio la corrente dell'induttore. Inoltre, il suo segnale dovrà appartenere non solo a $C^0_\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$ ma addirittura a $C^1_\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$, visto che la derivata della corrente dell'induttore è proporzionale alla tensione del condensatore che deve appartenere a $C^0_\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$. Risulta:

$$v_C = v_R = v_L = v_J, \qquad i_C + i_R + i_L = i_J$$

$$i_C = C\,Dv_C \qquad v_C(0) = V_0, \qquad i_R = G\,v_R, \qquad v_L = L\,Di_L \qquad i_L(0) = I_0, \qquad i_J = i_s$$

da cui:

$$C\,Dv_L + G\,v_L + i_L = i_s$$

e infine

$$LC\,D^2 i_L + LG\,Di_L + i_L = i_s$$

ovvero in forma monica

$$D^2 i_L + \frac{G}{C}\,Di_L + \frac{1}{LC}\,i_L = \frac{i_s}{LC}, \qquad i_L(0) = I_0, \qquad Di_L(0) = \frac{V_0}{L}$$

con

$$0 \leqslant G < \infty, \qquad 0 < L < \infty, \qquad 0 < C < \infty.$$

Qui si vogliono studiare solo tre casi particolari molto importanti:

- il caso con stato non-nullo e ingresso nullo;
- il caso con stato nullo e ingresso non-nullo 0-causale;
- il caso con stato non-nullo e ingresso non-nullo 0-causale.

4.3.1 Risposta con stato non-nullo e ingresso nullo

Il problema è:

$$D^2 i_L + \frac{G}{C} D i_L + \frac{1}{LC} i_L = 0, \qquad i_L(0) = I_0, \qquad D i_L(0) = \frac{V_0}{L}.$$

L'equazione è omogenea. L'equazione caratteristica e le sue soluzioni sono:

$$\lambda^2 + \frac{G}{C}\lambda + \frac{1}{LC} = 0, \qquad \lambda_\pm := -\frac{G}{2C} \pm \sqrt{\left(\frac{G}{2C}\right)^2 - \frac{1}{LC}}.$$

Le quantità $\lambda_\pm$ si dicono frequenze naturali del circuito.

Occorre distinguere i vari casi che originano a seconda del segno del discriminante. Conviene introdurre le seguenti quantità di normalizzazione:

$$\omega_n := \frac{1}{\sqrt{LC}}, \qquad Q := \frac{\omega_n C}{G}.$$

Allora:

- se $0 < Q < \frac{1}{2}$, il circuito si dice sovrasmorzato e risulta:

$$\lambda_\pm = \left(-\frac{1}{2Q} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 - 1}\right)\omega_n < 0$$

$$i_L(t) = K_- \, e^{\lambda_- t} + K_+ \, e^{\lambda_+ t}$$

con

$$i_L(0) = I_0 = K_- + K_+$$

e

$$D i_L(0) = \frac{V_0}{L} = \lambda_- K_- + \lambda_+ K_+$$

da cui:

$$K_- = \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-}\left(\lambda_+ I_0 - \frac{V_0}{L}\right), \qquad K_+ = \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-}\left(-\lambda_- I_0 + \frac{V_0}{L}\right)$$

e quindi:

$$i_L(t) = \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-}\left(\lambda_+ I_0 - \frac{V_0}{L}\right) e^{\lambda_- t} + \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-}\left(-\lambda_- I_0 + \frac{V_0}{L}\right) e^{\lambda_+ t}$$

- se $Q = \frac{1}{2}$, il circuito si dice criticamente smorzato e risulta:

$$\lambda_\pm = -\omega_n$$

$$i_L(t) = (K + H\,t)\, e^{-\omega_n t}$$

con

$$i_L(0) = I_0 = K$$

e

$$D i_L(0) = \frac{V_0}{L} = -\omega_n K + H$$

da cui:

$$K = I_0, \qquad H = \frac{V_0}{L} - \omega_n I_0$$

e quindi

$$i_L(t) = \left[I_0 + \left(\frac{V_0}{L} - \omega_n I_0\right) t\right] e^{-\omega_n t}$$

- se $\dfrac{1}{2} < Q < \infty$, il circuito si dice sottosmorzato e risulta:

$$\lambda_\pm = \left(-\frac{1}{2Q} \pm \mathrm{j} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} \right) \omega_\mathrm{n}.$$

  Posto:

$$\alpha := \frac{\omega_\mathrm{n}}{2Q}, \qquad \omega_\mathrm{d} := \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q}\right)^2}\, \omega_\mathrm{n}$$

  si ha:

$$\lambda_\pm = -\,\alpha \pm \mathrm{j}\,\omega_\mathrm{d}$$

  e quindi:

$$i_\mathrm{L}(t) = K_\mathrm{c}\,\mathrm{e}^{-\alpha t} \cos \omega_\mathrm{d} t + K_\mathrm{s}\,\mathrm{e}^{-\alpha t} \sin \omega_\mathrm{d} t$$

  con

$$i_\mathrm{L}(0) = I_0 = K_\mathrm{c}$$

  e

$$Di_\mathrm{L}(0) = \frac{V_0}{L} = -\,\alpha K_\mathrm{c} + \omega_\mathrm{d} K_\mathrm{s}$$

  da cui:

$$K_\mathrm{c} = I_0, \qquad K_\mathrm{s} = \frac{V_0}{\omega_\mathrm{d} L} + \frac{\alpha I_0}{\omega_\mathrm{d}}$$

  e quindi

$$i_\mathrm{L}(t) = I_0\,\mathrm{e}^{-\alpha t} \cos \omega_\mathrm{d} t + \left(\frac{V_0}{\omega_\mathrm{d} L} + \frac{\alpha I_0}{\omega_\mathrm{d}} \right) \mathrm{e}^{-\alpha t} \sin \omega_\mathrm{d} t$$

- se $Q = \infty$, il circuito si dice non smorzato e risulta:

$$\lambda_\pm = \pm \mathrm{j}\,\omega_\mathrm{n}$$

  e quindi

$$i_\mathrm{L}(t) = K_\mathrm{c} \cos \omega_\mathrm{n} t + K_\mathrm{s} \sin \omega_\mathrm{n} t$$

  con

$$i_\mathrm{L}(0) = I_0 = K_\mathrm{c}$$

  e

$$Di_\mathrm{L}(0) = \frac{V_0}{L} = \omega_\mathrm{n} K_\mathrm{s}$$

  da cui:

$$K_\mathrm{c} = I_0, \qquad K_\mathrm{s} = \frac{V_0}{\omega_\mathrm{n} L}$$

  e quindi

$$i_\mathrm{L}(t) = I_0 \cos \omega_\mathrm{n} t + \frac{V_0}{\omega_\mathrm{n} L} \sin \omega_\mathrm{n} t$$

Queste informazioni si possono condensare nel cosiddetto luogo delle radici, ossia tramite la rappresentazione parametrica delle frequenze naturali $\lambda_\pm$ nel piano complesso. Risulta:

- per $0 < Q \leqslant \dfrac{1}{2}$, il luogo è costituito dal semiasse reale negativo, in quanto

$$\lambda_- = \left(-\frac{1}{2Q} - \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 - 1} \right) \omega_\mathrm{n}$$

  cresce da $-\infty$ a $-\,\omega_\mathrm{n}$ in modo monotono (la derivata è positiva) e

$$\lambda_+ = \left(-\frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 - 1} \right) \omega_\mathrm{n}$$

  decresce da 0 a $-\,\omega_\mathrm{n}$ in modo monotono (la derivata è negativa)

- per $\frac{1}{2} \leqslant Q \leqslant \infty$, il luogo si ottiene eliminando Q dalle due equazioni:

$$\operatorname{Re}\lambda_\pm = -\frac{\omega_\mathrm{n}}{2Q}, \qquad \operatorname{Im}\lambda_\pm = \pm\sqrt{1-\left(\frac{1}{2Q}\right)^2}\,\omega_\mathrm{n}$$

e quindi è costituito dalla semicirconferenza:

$$\operatorname{Im}^2\lambda_\pm + \operatorname{Re}^2\lambda_\pm = \omega_\mathrm{n}^2, \qquad \operatorname{Re}\lambda_\pm \leqslant 0.$$

4.3.2 Risposta con stato nullo e ingresso non-nullo 0-causale

Il problema è:

$$D^2 i_\mathrm{L} + \frac{G}{C}\,Di_\mathrm{L} + \frac{1}{LC}\,i_\mathrm{L} = \frac{i_\mathrm{s}}{LC}, \qquad i_\mathrm{L}(0) = 0, \qquad Di_\mathrm{L}(0) = 0.$$

Si considerino i due seguenti casi.

- Caso del gradino: $i_\mathrm{s}(t) = I\,\mathrm{u}(t)$.
  L'equazione in $\mathbf{R}^-$ è:

$$D^2 i_\mathrm{L} + \frac{G}{C}\,Di_\mathrm{L} + \frac{1}{LC}\,i_\mathrm{L} = 0, \qquad i_\mathrm{L}(0^-) = Di_\mathrm{L}(0^-) = 0.$$

La sua soluzione è

$$i_{\mathrm{L}-}(t) = 0.$$

L'equazione in $\mathbf{R}^+$ è:

$$D^2 i_\mathrm{L} + \frac{G}{C}\,Di_\mathrm{L} + \frac{1}{LC}\,i_\mathrm{L} = \frac{I}{LC}, \qquad i_\mathrm{L}(0^+) = Di_\mathrm{L}(0^+) = 0.$$

Un integrale particolare è

$$i_{\mathrm{L_{p+}}} = I$$

e quindi

  - se il circuito è sovrasmorzato l'integrale generale è:

$$i_{\mathrm{L}_+}(t) = K_-\,\mathrm{e}^{\lambda_-\,t} + K_+\,\mathrm{e}^{\lambda_+\,t} + I$$

con

$$i_{\mathrm{L}_+}(0) = 0 = K_- + K_+ I$$

e

$$Di_{\mathrm{L}_+}(0) = 0 = \lambda_-\,K_- + \lambda_+\,K_+$$

da cui:

$$K_- = -\frac{\lambda_+}{\lambda_+ - \lambda_-}\,I, \qquad K_+ = \frac{\lambda_-}{\lambda_+ - \lambda_-}\,I$$

e quindi

$$i_{\mathrm{L}_+}(t) = -\frac{\lambda_+}{\lambda_+ - \lambda_-}\,I\,\mathrm{e}^{\lambda_-\,t} + \frac{\lambda_-}{\lambda_+\lambda_-}\,I\,\mathrm{e}^{\lambda_+\,t} + I$$

  - se il circuito è criticamente smorzato l'integrale generale è:

$$i_{\mathrm{L}_+}(t) = (K + H\,t)\,\mathrm{e}^{-\omega_\mathrm{n} t} + I$$

con

$$i_{\mathrm{L}_+}(0) = 0 = K + I$$

e

$$Di_{\mathrm{L}_+}(0) = 0 = H - \omega_\mathrm{n}\,K$$

da cui:

$$K = -I, \qquad H = -\omega_\mathrm{n}\,I$$

e quindi

$$i_{\mathrm{L}_+}(t) = -I\,(1 + \omega_\mathrm{n}\,t)\,\mathrm{e}^{-\omega_\mathrm{n} t} + I$$

– se il circuito è sottosmorzato l'integrale generale è:

$$i_{L_+}(t) = K_c\,e^{-\alpha t}\cos\omega_d t + K_s\,e^{-\alpha t}\sin\omega_d t + I$$

con

$$i_{L_+}(0) = 0 = K_c + I$$

e

$$Di_{L_+}(0) = 0 = -\alpha K_c + \omega_n K_s$$

da cui:

$$K_c = -I, \qquad K_s = -\frac{\alpha}{\omega_n}\,I$$

e quindi

$$i_{L_+}(t) = -I\,e^{-\alpha t}\cos\omega_d t - \frac{\alpha}{\omega_n}\,I\,e^{-\alpha t}\sin\omega_d t + I$$

– se il circuito è non smorzato l'integrale generale è:

$$i_{L_+}(t) = K_c\cos\omega_n t + K_s\sin\omega_n t + I$$

con

$$i_{L_+}(0) = 0 = K_c + I$$

e

$$Di_{L_+}(0) = 0 = \omega_n K_s$$

da cui:

$$K_c = -I, \qquad K_s = 0$$

e quindi

$$i_{L_+}(t) = -I\cos\omega_n t + I$$

Se si indica con i_{L_h} un'opportuna soluzione dell'equazione omogenea, la soluzione su $\mathbf{R}$, per concatenazione, è data in ogni caso da:

$$i_L(t) = (i_{L_h}(t) + I)\,u_c(t).$$

- Caso della sinusoide 0-causale: $i_s(t) = (I'_c\cos\omega t + I'_s\sin\omega t)\,u_a(t)$
L'equazione in $\mathbf{R}^-$ è:

$$D^2 i_L + \frac{G}{C}\,Di_L + \frac{1}{LC}\,i_L = 0, \qquad i_L(0^-) = Di_L(0^-) = 0.$$

La sua soluzione è:

$$i_{L_-}(t) = 0.$$

L'equazione in $\mathbf{R}^+$ è:

$$D^2 i_L + \frac{G}{C}\,Di_L + \frac{1}{LC}\,i_L = \frac{I'_c\cos\omega t + I'_s\sin\omega t}{LC}, \qquad i_L(0^+) = Di_L(0^+) = 0.$$

Se il circuito è sovrasmorzato o criticamente smorzato o sottosmorzato o non smorzato con $\omega \neq \omega_n$, un integrale particolare è della forma

$$i_{L_{p+}} = I_c\cos\omega t + I_s\sin\omega t$$

con I_c e I_s (ad esempio, calcolabili per sostituzione) dati da:

$$I_c = \frac{(1-\omega^2 LC)\,I'_c - \omega LGI'_s}{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 L^2 G^2}, \qquad I_s = \frac{(1-\omega^2 LC)\,I'_s + \omega LGI'_c}{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 L^2 G^2}.$$

Se invece il circuito è non smorzato con $\omega = \omega_n$ (caso della sinusoide 0-causale risonante), un integrale particolare è della forma

$$i_{L_{p+}} = I_c\,\omega_n t\cos\omega_n t + I_s\,\omega_n t\sin\omega_n t$$

con I_c e I_s (ad esempio, calcolabili per sostituzione) dati da:

$$I_c = -\frac{I'_s}{2}, \qquad I_s = \frac{I'_c}{2}.$$

Quindi:

– se il circuito è sovrasmorzato l'integrale generale è:

$$i_{L_+}(t) = K_-\,e^{\lambda_- t} + K_+\,e^{\lambda_+ t} + I_c\cos\omega t + I_s\sin\omega t$$

con

$$i_{L_+}(0) = 0 = K_- + K_+ I_c$$

e

$$Di_{L_+}(0) = 0 = \lambda_-\,K_- + \lambda_+ K + \omega I_s$$

da cui:

$$K_- = \frac{\omega I_s - \lambda_+ I_c}{\lambda_+ - \lambda_-}, \qquad K_+ = \frac{\lambda_- I_c - \omega I_s}{\lambda_+ - \lambda_-}$$

$$i_{L_+}(t) = \frac{\omega I_s - \lambda_+ I_c}{\lambda_+ - \lambda_-}\,e^{\lambda_- t} + \frac{\lambda_- I_c - \omega I_s}{\lambda_+ - \lambda_-}\,e^{\lambda_+ t} + I_c\cos\omega t + I_s\sin\omega t$$

– se il circuito è criticamente smorzato l'integrale generale è:

$$i_{L_+}(t) = (K + H\,t)\,e^{-\omega_n t} + I_c\cos\omega t + I_s\sin\omega t$$

con

$$i_{L_+}(0) = 0 = K + I_c$$

e

$$Di_{L_+}(0) = 0 = H - \omega_n\,K + \omega I_s$$

da cui:

$$K = -\,I_c, \qquad H = -\,\omega_n\,I_c - \omega I_s$$

e quindi

$$i_{L_+}(t) = -\,(\,I_c + I_c\,\omega_n\,t + I_s\,\omega\,t)\,e^{-\omega_n t} + I_c\cos\omega t + I_s\sin\omega t$$

– se il circuito è sottosmorzato l'integrale generale è:

$$i_{L_+}(t) = K_c\,e^{-\alpha t}\cos\omega_d t + K_s\,e^{-\alpha t}\sin\omega_d t + I_c\cos\omega t + I_s\sin\omega t$$

con

$$i_{L_+}(0) = 0 = K_c + I_c$$

e

$$Di_{L_+}(0) = 0 = -\,\alpha K_c + \omega_d K_s + \omega I_s$$

da cui:

$$K_c = -\,I_c, \qquad K_s = -\frac{\alpha}{\omega_d}\,I_c - \frac{\omega}{\omega_d}\,I_s$$

e quindi

$$i_{L_+}(t) = K_c\,e^{-\alpha t}\cos\omega_d t + K_s\,e^{-\alpha t}\sin\omega_d t + I_c\cos\omega t + I_s\sin\omega t$$

– se il circuito è non smorzato e $\omega \neq \omega_{\mathrm{n}}$ l'integrale generale è:

$$i_{\mathrm{L}_+}(t) = K_{\mathrm{c}} \cos \omega_{\mathrm{n}} t + K_{\mathrm{s}} \sin \omega_{\mathrm{n}} t + I_{\mathrm{c}} \cos \omega t + I_{\mathrm{s}} \sin \omega t$$

con

$$i_{\mathrm{L}_+}(0) = 0 = K_{\mathrm{c}} + I_{\mathrm{c}}$$

e

$$Di_{\mathrm{L}_+}(0) = 0 = \omega_{\mathrm{n}} K_{\mathrm{s}} + \omega I_{\mathrm{s}}$$

da cui:

$$K_{\mathrm{c}} = -I_{\mathrm{c}}, \qquad K_{\mathrm{s}} = -\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{n}}} I_{\mathrm{s}}$$

e quindi

$$i_{\mathrm{L}_+}(t) = -I_{\mathrm{c}} \cos \omega_{\mathrm{n}} t + -\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{n}}} I_{\mathrm{s}} \sin \omega_{\mathrm{n}} t + I_{\mathrm{c}} \cos \omega t + I_{\mathrm{s}} \sin \omega t$$

– se il circuito è non smorzato e $\omega = \omega_{\mathrm{n}}$ l'integrale generale è:

$$i_{\mathrm{L}_+}(t) = K_{\mathrm{c}} \cos \omega_{\mathrm{n}} t + K_{\mathrm{s}} \sin \omega_{\mathrm{n}} t + I_{\mathrm{c}}\, \omega_{\mathrm{n}} t \cos \omega_{\mathrm{n}} t + I_{\mathrm{s}}\, \omega_{\mathrm{n}} t \sin \omega_{\mathrm{n}} t$$

con

$$i_{\mathrm{L}_+}(0) = 0 = K_{\mathrm{c}}$$

e

$$Di_{\mathrm{L}_+}(0) = 0 = \omega_{\mathrm{n}} K_{\mathrm{s}} + \omega_{\mathrm{n}} I_{\mathrm{c}}$$

da cui:

$$K_{\mathrm{c}} = 0, \qquad K_{\mathrm{s}} = -I_{\mathrm{c}}$$

e quindi

$$i_{\mathrm{L}_+}(t) = -I_{\mathrm{c}} \sin \omega_{\mathrm{n}} t + I_{\mathrm{c}}\, \omega_{\mathrm{n}} t \cos \omega_{\mathrm{n}} t + I_{\mathrm{s}}\, \omega_{\mathrm{n}} t \sin \omega_{\mathrm{n}} t$$

Se si indica con $i_{\mathrm{L_h}}$ un'opportuna soluzione dell'equazione omogenea, la soluzione su $\mathbf{R}$, per concatenazione, è data nei primi quattro casi da:

$$i_{\mathrm{L}}(t) = (i_{\mathrm{L_h}}(t) + I_{\mathrm{c}} \cos \omega t + I_{\mathrm{s}} \sin \omega t)\, \mathrm{u_c}(t)$$

e nel quinto da:

$$i_{\mathrm{L}}(t) = (i_{\mathrm{L_h}}(t) + I_{\mathrm{c}}\, \omega_{\mathrm{n}} t \cos \omega_{\mathrm{n}} t + I_{\mathrm{s}}\, \omega_{\mathrm{n}} t \sin \omega_{\mathrm{n}} t)\, \mathrm{u_c}(t).$$

4.3.3 Risposta completa

La risposta completa a ingresso causale ossia la soluzione di:

$$D^2 i_{\mathrm{L}} + \frac{G}{C} Di_{\mathrm{L}} + \frac{1}{LC} i_{\mathrm{L}} = \frac{i_{\mathrm{s}}}{LC}, \qquad i_{\mathrm{L}}(0) = I_0, \qquad Di_{\mathrm{L}}(0) = \frac{V_0}{L}$$

si può ottenere come somma delle prime due risposte. Infatti, se i'_{L}, i''_{L} sono rispettivamente la soluzione di:

$$D^2 i_{\mathrm{L}} + \frac{G}{C} Di_{\mathrm{L}} + \frac{1}{LC} i_{\mathrm{L}} = 0, \qquad i_{\mathrm{L}}(0) = I_0, \qquad Di_{\mathrm{L}}(0) = \frac{V_0}{L}$$

$$D^2 i_{\mathrm{L}} + \frac{G}{C} Di_{\mathrm{L}} + \frac{1}{LC} i_{\mathrm{L}} = \frac{i_{\mathrm{s}}}{LC}, \qquad i_{\mathrm{L}}(0) = 0, \qquad Di_{\mathrm{L}}(0) = 0$$

allora $i'_{\mathrm{L}} + i''_{\mathrm{L}}$ è la soluzione del problema iniziale. Infatti:

$$D^2(i'_{\mathrm{L}} + i''_{\mathrm{L}}) + \frac{G}{C} D(i'_{\mathrm{L}} + i''_{\mathrm{L}}) + \frac{1}{LC}(i'_{\mathrm{L}} + i''_{\mathrm{L}}) =$$

$$= D^2 i'_{\mathrm{L}} + \frac{G}{C} Di'_{\mathrm{L}} + \frac{1}{LC} i'_{\mathrm{L}} + D^2 i''_{\mathrm{L}} + \frac{G}{C} Di''_{\mathrm{L}} + \frac{1}{LC} i''_{\mathrm{L}} = 0 + \frac{i_{\mathrm{s}}}{LC} = \frac{i_{\mathrm{s}}}{LC}$$

con
$$(i'_{\mathrm{L}} + i''_{\mathrm{L}})(0) = i'_{\mathrm{L}}(0) + i''_{\mathrm{L}}(0) = I_0 + 0 = I_0$$
e
$$D(i'_{\mathrm{L}} + i''_{\mathrm{L}})(0) = Di'_{\mathrm{L}}(0) + Di''_{\mathrm{L}}(0) = \frac{V_0}{L} + 0 = \frac{V_0}{L}.$$
Ma allora, se si indicano con
$$i_{\mathrm{L_{h1}}}, \qquad i_{\mathrm{L_{h2}}}$$
due opportune soluzioni dell'equazione omogenea, si può scrivere:

- nel caso del gradino:
$$i_{\mathrm{L}}(t) = i_{\mathrm{L_{h1}}}(t) + \big(i_{\mathrm{L_{h2}}}(t) + I\big)\,\mathrm{u_c}(t)$$
- nel caso della sinusoide 0-causale, se non risonante:
$$i_{\mathrm{L}}(t) = i_{\mathrm{L_{h1}}}(t) + \big(i_{\mathrm{L_{h2}}}(t) + I_{\mathrm{c}}\cos\omega t + I_{\mathrm{s}}\sin\omega t\big)\,\mathrm{u_c}(t)$$
  se risonante:
$$i_{\mathrm{L}}(t) = i_{\mathrm{L_{h1}}}(t) + \big(i_{\mathrm{L_{h2}}}(t) + I_{\mathrm{c}}\,\omega_{\mathrm{n}}t\cos\omega_{\mathrm{n}}t + I_{\mathrm{s}}\,\omega_{\mathrm{n}}t\sin\omega_{\mathrm{n}}t\big)\,\mathrm{u_c}(t)$$

Pertanto, se il circuito è sovrasmorzato o criticamente smorzato o sottosmorzato ($\lambda_\pm < 0$ o $\operatorname{Re}\lambda_\pm < 0$), allora per $t \to \infty$ si ha:

- nel caso del gradino:
$$i_{\mathrm{L}}(t) \to I$$
- nel caso della sinusoide 0-causale:
$$i_{\mathrm{L}}(t) \to I_{\mathrm{c}}\cos\omega t + I_{\mathrm{s}}\sin\omega t.$$

Quindi, i suddetti termini assumono il significato di parte a regime del segnale, indipendente dallo stato a $t = 0$, mentre gli altri, ossia
$$i_{\mathrm{L_{h1}}}(t) + i_{\mathrm{L_{h2}}}(t)\,\mathrm{u}(t)$$
assumono il significato di parte transitoria del segnale, dipendente dallo stato a $t = 0$.

Se invece il circuito è non smorzato ($\operatorname{Re}\lambda_\pm = 0$), nel caso del gradino e nel caso della sinusoide 0-causale non risonante, si ha ancora una sorta di regime composito, costituito

- nel caso del gradino da una componente sinusoidale a frequenza ω_{n} dipendente dallo stato a $t = 0$, e da una componente costante indipendente da esso (ed eventualmente filtrabile);
- nel caso della sinusoide 0-causale non risonante ($\omega_{\mathrm{n}} \neq \omega$) da due componenti sinusoidali, una a frequenza ω_{n} dipendente dallo stato a $t = 0$, e l'altra a frequenza ω indipendente da esso (ed eventualmente filtrabile).

Infine, se il circuito è non smorzato nel caso della sinusoide 0-causale risonante ($\lambda_\pm = \pm\mathrm{j}\,\omega_{\mathrm{n}} = \pm j\omega$) non si ha regime, perché il termine sinusoidale, dipendente dallo stato a $t = 0$, si somma (e non ne è filtrabile) a un termine sinusoidale secolare, indipendente dallo stato a $t = 0$.

4.3.4 Complementi

È interessante ricavare e confrontare le equazioni nelle altre variabili del circuito RLCJ parallelo.

L'equazione nella tensione del condensatore si ottiene osservando che $Di_{\mathrm{L}} = \dfrac{v_{\mathrm{C}}}{L}$ talché:
$$D^2 v_{\mathrm{C}} + \frac{G}{C} Dv_{\mathrm{C}} + \frac{1}{LC} v_{\mathrm{C}} = \frac{1}{L} Di_s, \qquad \operatorname{amb} v_{\mathrm{C}} = C^0_\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$$
con
$$v_{\mathrm{C}}(0) = V_0, \qquad Dv_{\mathrm{C}}(0^-) = -\frac{GV_0 + I_0}{C}, \qquad Dv_{\mathrm{C}}(0^+) = \frac{i_{\mathrm{s}}(0^+) - GV_0 - I_0}{C}.$$

L'equazione nella corrente del condensatore si ottiene osservando che $Dv_{\mathrm{C}} = \dfrac{i_{\mathrm{C}}}{C}$ talché:

$$D^2 i_{\mathrm{C}} + \frac{G}{C} Di_{\mathrm{C}} + \frac{1}{LC} i_{\mathrm{C}} = D^2 i_s, \qquad \text{amb}\, i_{\mathrm{C}} = C^-_\infty(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R})$$

con

$$i_{\mathrm{C}}(0^-) = -GV_0 - I_0, \qquad i_{\mathrm{C}}(0^+) = i_{\mathrm{s}}(0^+) - GV_0 - I_0$$

e

$$Di_{\mathrm{C}}(0^-) = \left(\frac{G^2}{C} - \frac{1}{L}\right) V_0 + \frac{G}{C} I_0, \qquad Di_{\mathrm{C}}(0^+) = Di_{\mathrm{s}}(0^+) - \frac{G}{C} i_{\mathrm{s}}(0^+) + \left(\frac{G^2}{C} - \frac{1}{L}\right) V_0 + \frac{G}{C} I_0$$

4.4 Altri circuiti elementari del II ordine

Per questi circuiti le equazioni differenziali risultano:

- Circuito RLCE serie:
  Equazione in v_{C}:

  $$D^2 v_{\mathrm{C}} + \frac{R}{L} Dv_{\mathrm{C}} + \frac{1}{LC} v_{\mathrm{C}} = \frac{v_s}{LC}, \qquad \text{amb}\, v_{\mathrm{C}} = C^1_\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$$

  con

  $$v_{\mathrm{C}}(0) = V_0, \qquad Dv_{\mathrm{C}}(0) = \frac{I_0}{C}.$$

  Equazione in i_{L}:

  $$D^2 i_{\mathrm{L}} + \frac{R}{L} Di_{\mathrm{L}} + \frac{1}{LC} i_{\mathrm{L}} = \frac{1}{C} Dv_s, \qquad \text{amb}\, i_{\mathrm{L}} = C^0_\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$$

  con

  $$i_{\mathrm{L}}(0) = I_0, \qquad Di_{\mathrm{L}}(0^-) = -\frac{RI_0 + V_0}{L}, \qquad Di_{\mathrm{L}}(0^+) = \frac{v_{\mathrm{s}}(0^+) - RI_0 - V_0}{L}.$$

  Equazione in v_{L}:

  $$D^2 v_{\mathrm{L}} + \frac{R}{L} Dv_{\mathrm{L}} + \frac{1}{LC} v_{\mathrm{L}} = D^2 v_s, \qquad \text{amb}\, v_{\mathrm{L}} = C^-_\infty(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R})$$

  con

  $$v_{\mathrm{L}}(0^-) = -RI_0 - V_0, \qquad v_{\mathrm{L}}(0^+) = v_{\mathrm{s}}(0^+) - RI_0 - V_0$$

  e

  $$Dv_{\mathrm{L}}(0^-) = \left(\frac{R^2}{L} - \frac{1}{C}\right) I_0 + \frac{R}{L} V_0, \qquad Dv_{\mathrm{L}}(0^+) = Dv_{\mathrm{s}}(0^+) - \frac{R}{L} v_{\mathrm{s}}(0^+) + \left(\frac{R^2}{L} - \frac{1}{C}\right) I_0 + \frac{R}{L} V_0.$$

Un generico circuito del II ordine si può talora studiare mediante i teoremi di equivalenza dei quadripoli operanti come doppi bipoli, e il teorema di sostituzione. In primis, si determina l'opportuno doppio bipolo equivalente del quadripolo composto caricato dai componenti dinamici e si risolve il circuito del II ordine così ottenuto. In secundis, si sostituisce a ogni condensatore una sorgente di tensione, a ogni induttore una sorgente di corrente con segnale pari alla funzione calcolata nel circuito precedente, e si risolve il circuito resistivo così ottenuto per la variabile di interesse, eventualmente riapplicando il teorema di Thévenin o Norton.

Capitolo 5

Circuiti in DC e in AC

In questo capitolo sarà analizzato il comportamento dei circuiti formati da componenti lineari tempo-invarianti e sorgenti con segnale costante o sinusoidale.

5.1 Soluzione costante di un circuito

Sia dato un circuito formato da componenti lineari tempo-invarianti e da sorgenti con segnale costante. Il problema che si desidera affrontare è se il circuito ammetta una soluzione in cui tutte le variabili assumano valore costante. Ora, ciò accade se e solo se il sistema delle equazioni di Kirchhoff e delle equazioni costitutive ammette una soluzione costante, che si suole chiamare soluzione in continua o in DC.

Si potrebbe pensare di procedere scrivendo un opportuno sistema di equazioni e poi cercando se esso ammette una soluzione del tipo desiderato. Tuttavia, è più semplice e significativo procedere studiando invece del circuito dato un nuovo circuito (detto in DC) avente la stessa topologia di quello e recante al posto di ogni componente la sua restrizione allo spazio delle funzioni costanti reali $K(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Per sottolineare questo fatto, per indicare le variabili si usano caratteri in stampatello (ie V, I, E) anziché in corsivo (ie v, i, e) e per il comportamento il simbolo $\mathfrak{B}^{\mathrm{DC}}$.

Ne consegue intanto che, per quanto riguarda le leggi di Kirchhoff, le equazioni nelle nuove variabili sono strutturalmente identiche alle vecchie.

Poi, per quanto riguarda le equazioni costitutive dei nuovi componenti nelle nuove variabili, esse vanno tutte precedute dalla specificazione

$$\operatorname{amb} V_{\mathrm{K}} = \operatorname{amb} I_{\mathrm{K}} = K(\mathbf{R}, \mathbf{R})$$

nel caso del bipolo K, e dalla specificazione

$$\operatorname{amb} V_{1\,\mathrm{K}} = \operatorname{amb} V_{2\,\mathrm{K}} = \operatorname{amb} I_{1\,\mathrm{K}} = \operatorname{amb} I_{2\,\mathrm{K}} = K(\mathbf{R}, \mathbf{R})$$

nel caso del doppio bipolo K, che però vengono omesse per brevità.

- Resistori:
$$V_{\mathrm{R}} = R\, I_{\mathrm{R}}, \qquad I_{\mathrm{R}} = G\, V_{\mathrm{R}}$$
- Cortocircuiti:
$$V_{\mathrm{cc}} = 0.$$
- Circuiti aperti:
$$I_{\mathrm{ca}} = 0.$$
- Sorgenti ideali di tensione:
$$V_{\mathrm{E}} = V_{\mathrm{s}}.$$
- Sorgenti ideali di corrente:
$$I_{\mathrm{J}} = I_{\mathrm{s}}.$$

- Trasformatori ideali:
$$\frac{V_{1\,\mathrm{T}}}{N_1} = \frac{V_{2\,\mathrm{T}}}{N_2}, \qquad N_1\, I_{1\,\mathrm{T}} = -\,N_2\, I_{2\,\mathrm{T}}$$

- Sorgenti di tensione controllate in tensione:
$$I_{1\,\alpha} = 0, \qquad V_{2\,\alpha} = \alpha\, V_{1\,\alpha}.$$

- Sorgenti di tensione controllate in corrente:
$$V_{1\,\varrho} = 0, \qquad V_{2\,\varrho} = \varrho\, I_{1\,\varrho}.$$

- Sorgenti di corrente controllate in corrente:
$$V_{1\,\beta} = 0, \qquad I_{2\,\beta} = \beta\, I_{1\,\beta}.$$

- Sorgenti di corrente controllate in tensione:
$$I_{1\,\gamma} = 0, \qquad I_{2\,\gamma} = \gamma\, V_{1\,\gamma}.$$

- Amplificatori operazionali (nullori):
$$I_{+\,\mathrm{AO}} = 0, \qquad I_{-\,\mathrm{AO}} = 0, \qquad V_{+\,\mathrm{AO}} - V_{-\,\mathrm{AO}} = 0.$$

  Interpretato come doppio bipolo:
$$I_{\mathrm{d\,AO}} = 0, \qquad V_{\mathrm{d\,AO}} = 0$$

- Induttori:
$$V_{\mathrm{L}} = 0$$
  talché la restrizione in DC di un induttore è equivalente a un corto circuito;

- Induttori accoppiati:
$$V_{1\,\mathrm{M}} = 0, \qquad V_{2\,\mathrm{M}} = 0$$
  talché la restrizione in DC di un paio di induttori accoppiati è equivalente a una coppia di cortocircuiti;

- Condensatori:
$$I_{\mathrm{C}} = 0$$
  talché la restrizione in DC di un condensatore è equivalente a un circuito aperto.

Allora la soluzione in DC (unica o meno) del circuito dato esiste se e solo se esiste la soluzione (unica o meno) del circuito in DC. Ma questo circuito comporta solo equazioni algebriche in $\mathbf{R}$, quindi è molto semplice da studiare.

Per concludere, si osservi che:

- la soluzione in DC può non esistere (esempio: un circuito in cui sia presente una maglia di soli induttori e sorgenti di tensione, o una sezione di soli condensatori e sorgenti di corrente);

- la soluzione in DC può esistere e non essere unica (esempio: un circuito in cui sia presente una maglia di soli induttori e sorgenti di tensione con segnali opportuni, o una sezione di soli condensatori e sorgenti di corrente con segnali opportuni);

- la soluzione in DC può esistere (unica o meno) e non essere però una soluzione di regime, ossia raggiunta per $t \to \infty$ a prescindere dallo stato a $t = 0$ del circuito.

5.2 Premesse: sinusoidi e fasori

Si denoti con $S_{\bar{\omega}}$ l'insieme delle sinusoidi alla pulsazione $\bar{\omega}$. Questo insieme è uno spazio vettoriale reale (ie su $\mathbf{R}$), in quanto ogni combinazione lineare a coefficienti reali di sinusoidi è una sinusoide a quella stessa frequenza. In più, la derivata (Ds) e una primitiva (denotata $D_S^{-1}s$) di ogni elemento s di $S_{\bar{\omega}}$ appartengono a $S_{\bar{\omega}}$.

Si consideri quindi l'operatore:

$$\Phi : S_{\bar{\omega}} \to K(\mathbf{R}, \mathbf{C}), \qquad \Phi(s) := \frac{2}{T} \int_T s(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\bar{\omega} t}\, dt.$$

Esso viene detto la trasformata fasoriale (in base coseno) della sinusoide s, mentre $\Phi(s)$ si dice il fasore associato a s o anche l'inviluppo complesso di s, e spesso si scrive anche $\dot{S}$ per $\Phi(s)$. Si osservi che:

- se $s(t) = A \cos \bar{\omega} t + B \sin \bar{\omega} t$, allora $\Phi(s) = A - \mathrm{j}\, B$;
- se $s(t) = M \cos(\bar{\omega} t + \phi)$, allora $\Phi(s) = M\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\phi}$;
- se $s(t) = N \sin(\bar{\omega} t + \psi)$, allora $\Phi(s) = -\mathrm{j}\, N\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\psi}$.

Dalla definizione e da queste formule (specialmente dalla seconda) si intuisce come il fasore rappresenti sinteticamente l'andamento nel tempo dell'inviluppo del segnale e della sua fase rispetto al coseno. Visto che il segnale è una sinusoide non modulata, tale inviluppo complesso è costante nel tempo. Esiste una definizione di inviluppo complesso valida per un qualsiasi segnale, ma è molto più sofisticata perché richiede la trasformata di Hilbert. Le due definizioni nel caso di un segnale sinusoidale puro danno risultati identici, mentre nel caso di un segnale sinusoidale lentamente modulato in ampiezza e fase, $s(t) = A(t) \cos[\bar{\omega} t + \phi(t)]$, danno risultati quasi identici e (il lettore non si stupisca!) quasi uguali a $A\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\phi}$.

I Lemma
La trasformata fasoriale Φ è invertibile e

$$\Phi^{-1} \; : \; K(\mathbf{R}, \mathbf{C}) \to S_{\bar{\omega}}, \qquad \Phi^{-1}(z)(t) := \mathrm{Re}\left(z\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\bar{\omega} t}\right) = \mathrm{Re}(z(\cos \bar{\omega} t + \mathrm{j}\, \sin \bar{\omega} t)).$$

□

Dimostrazione
Basta sostituire nella formula una qualsiasi espressione esplicita di una sinusoide. □

Si osservi che se z è un fasore e di z sono noti:

- $\mathrm{Re}\, z$ e $\mathrm{Im}\, z$, allora $\Phi^{-1}(z) = \mathrm{Re}\, z \cos \bar{\omega} t - \mathrm{Im}\, z \sin \bar{\omega} t$
- $|z|$ e $\angle z$, allora $\Phi^{-1}(z) = |z| \cos(\bar{\omega} t + \angle z)$.

$\Phi(s)\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\bar{\omega} t}$ si dice il fasore rotante (nel caso generale, il segnale analitico) in base coseno associato a $s(t)$, e la sua proiezione sull'asse reale fornisce proprio $s(t)$.

II Lemma
La trasformata fasoriale Φ è lineare. □
Dimostrazione
La trasformata Φ è lineare perché l'integrale è un funzionale lineare, e quindi

$$\Phi(a' s' + a'' s'') = a' \Phi(s') + a'' \Phi(s'') \qquad \forall a', a'' \in \mathbf{R}$$

il che dimostra l'asserto □

III Lemma
Il fasore associato alla derivata di una sinusoide $s \in S_{\bar{\omega}}$ è uguale a $\mathrm{j}\, \bar{\omega}$ per il fasore associato a s, ie

$$\Phi(Ds) = \mathrm{j}\, \bar{\omega}\, \Phi(s).$$

□

Dimostrazione
A norma della definizione, risulta:

$$\begin{aligned}\Phi(Ds) &:= \frac{2}{T}\int_T Ds(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\bar\omega t}\,dt = \frac{2}{T}\int_T ds(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\bar\omega t} = \\ &= \frac{2}{T}\left[s(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\bar\omega t}\right]_0^T - \frac{2}{T}\int_T s(t)(-\mathrm{j}\,\bar\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\bar\omega t}\,dt = \\ &= \mathrm{j}\,\bar\omega\,\frac{2}{T}\int_T s(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\bar\omega t}\,dt = \mathrm{j}\,\bar\omega\,\Phi(s).\end{aligned}$$

il che dimostra l'asserto. □

Corollario del III Lemma
Il fasore associato alla primitiva sinusoidale di una sinusoide $s \in S_{\bar\omega}$ è uguale al fasore associato a s diviso per $\mathrm{j}\,\bar\omega$, ie

$$\Phi(D_S^{-1}s) = \frac{1}{\mathrm{j}\,\bar\omega}\,\Phi(s).$$

□

Se una variabile x assume valori in un insieme di funzioni che include $S_{\bar\omega}$, la variabile che ne esprime il fasore quando x assume valori in $S_{\bar\omega}$ si denota con $\dot X$. A volte, con abuso di terminologia, $\dot X$ si dice il fasore di x, anziché la variabile fasoriale associata a x.

Teorema fondamentale dei fasori
L'equazione algebrico-differenziale

$$\sum_{m=1}^{M} p_m(D)\,x_m = 0$$

con $p_m(D)$ ($m = 1, \ldots, M$) polinomi operatoriali in D a coefficienti reali ammette come soluzione l'insieme di sinusoidi $(s_1, \ldots, s_M)$ a frequenza $\bar\omega$ sse l'equazione algebrica

$$\sum_{m=1}^{M} p_m(\mathrm{j}\,\omega)\dot X_m = 0$$

ammette come soluzione alla frequenza $\bar\omega$ l'insieme di fasori $(\dot S_1, \ldots, \dot S_M)$. □

La controparte in variabili fasoriali dell'equazione differenziale data si dice l'equazione fasoriale a frequenza indefinita ad essa associata.

5.3 Soluzione sinusodale di un circuito

Sia dato un circuito formato da componenti lineari tempo-invarianti e da sorgenti con segnale sinusoidale. Il problema che si desidera affrontare è se il circuito ammetta una soluzione in cui tutte le variabili assumano valori sinusoidali. Ora, ciò accade se e solo se il sistema delle equazioni di Kirchhoff e delle equazioni costitutive ammette una soluzione sinusoidale, che si suole chiamare soluzione in alternata o in AC.

Come nel caso della soluzione in DC, si potrebbe pensare di procedere studiando invece del circuito dato un nuovo circuito (detto in AC) avente la stessa topologia di quello e recante al posto di ogni componente la sua restrizione allo spazio delle funzioni sinusoidali alla frequenza $\bar\omega$, ie $S_{\bar\omega}$. Questo, però, a differenza dell'analisi in DC, non conduce ad una semplificazione significativa delle equazioni costitutive. Tuttavia, grazie alle tecniche viste nella Sezione 5.2, è molto più semplice procedere studiando invece di questo circuito in AC un altro circuito (detto circuito simbolico in AC) avente la stessa topologia di quello e recante al posto della restrizione a

$S_{\bar{\omega}}$ di ogni componente la sua controparte fasoriale nello spazio delle funzioni costanti complesse, ie $K(\mathbf{R}, \mathbf{C})$. Al fine di sottolineare questo fatto, per indicare le variabili si userano caratteri in stampatello sovrapuntati (ie $\dot{V}, \dot{I}, \dot{E}$) anziché in corsivo (ie v, i, e) e per il comportamento il simbolo $\mathfrak{B}^{\mathrm{AC}}$.

Allora il circuito dato ammette soluzione in AC (unica o meno) se e solo se il circuito simbolico in AC ammette soluzione (unica o meno). Ma questo circuito, come si vedrà, comporta solo equazioni algebriche in $\mathbf{C}$, quindi è molto semplice da studiare.

Per concludere, si osservi che:

- la soluzione in AC può non esistere (esempio: il caso della sinusoide risonante del circuito RLCJ parallelo non smorzato);
- la soluzione in AC può esistere e non essere unica;
- la soluzione in AC può esistere (unica o meno) e non essere però una soluzione a regime, ossia raggiunta per $t \to \infty$ a prescindere dallo stato a $t = 0$ del circuito.

5.4 Equazioni fasoriali

Nel seguito, vengono presentate le equazioni fasoriali a frequenza indefinita associate alle equazioni di Kirchhoff e alle equazioni costitutive dei componenti.

5.4.1 Equazioni di Kirchhoff fasoriali

Dal Teorema fondamentale dei fasori risultano le equazioni fasoriali a frequenza indefinita di Kirchhoff:

- se $\mathrm{K_M}$ è il sottoinsieme degli identificativi delle tensioni di base coinvolte nell'equazione della maglia M, tale equazione è della forma

$$\sum_{x \in \mathrm{K_M}} (\pm)\, v_{\mathrm{x}} = 0$$

  e quindi l'equazione cui devono soddisfare le variabili fasoriali è

$$\sum_{\mathrm{x} \in \mathrm{K_M}} (\pm)\, \dot{V}_{\mathrm{x}} = 0.$$

- se $\mathrm{K_N}$ è il sottoinsieme degli identificativi delle tensioni di base coinvolte nell'equazione del nodo N, tale equazione è della forma

$$\sum_{\mathrm{x} \in \mathrm{K_N}} (\pm)\, i_{\mathrm{x}} = 0$$

  e quindi l'equazione cui devono soddisfare le variabili fasoriali è

$$\sum_{\mathrm{x} \in \mathrm{K_N}} (\pm)\, \dot{I}_{\mathrm{x}} = 0.$$

Ovviamente, rimangono valide le regole di selezione delle maglie e dei nodi.

5.4.2 Equazioni costitutive fasoriali

Dal Teorema fondamentale dei fasori seguono anche le equazioni costitutive fasoriali a frequenza indefinita per i componenti elementari, sotto riportate nelle forme più frequenti. Ovviamente, esse vanno tutte precedute dalla specificazione

$$\operatorname{amb} \dot{V}_{\mathrm{K}} = \operatorname{amb} \dot{I}_{\mathrm{K}} = K(\mathbf{R}, \mathbf{C})$$

nel caso del bipolo K, e dalla specificazione

$$\operatorname{amb} \dot{V}_{1\,\mathrm{K}} = \operatorname{amb} \dot{V}_{2\,\mathrm{K}} = \operatorname{amb} \dot{I}_{1\,\mathrm{K}} = \operatorname{amb} \dot{I}_{2\,\mathrm{K}} = K(\mathbf{R}, \mathbf{C})$$

nel caso del doppio bipolo K, che però vengono omesse per brevità.

- Resistori ohmici:
$$\dot{V}_{\mathrm{R}} = R\, \dot{I}_{\mathrm{R}}, \qquad \dot{I}_{\mathrm{R}} = G\, \dot{V}_{\mathrm{R}}.$$
- Cortocircuiti:
$$\dot{V}_{\mathrm{cc}} = 0.$$
- Circuiti aperti:
$$\dot{I}_{\mathrm{ca}} = 0.$$
- Sorgenti ideali di tensione:
$$\dot{V}_{\mathrm{E}} = \dot{V}_{\mathrm{s}}.$$
- Sorgenti ideali di corrente:
$$\dot{I}_{\mathrm{J}} = \dot{V}_{\mathrm{s}}.$$
- Trasformatori ideali:
$$N_2\, \dot{V}_{1\,\mathrm{T}} - N_1 \dot{V}_{2\,\mathrm{T}} = 0, \qquad N_1\, \dot{I}_{1\,\mathrm{T}} + N_2\, \dot{I}_{2\,\mathrm{T}} = 0.$$
- Sorgenti di tensione controllate in tensione:
$$\dot{I}_{1\,\alpha} = 0, \qquad \dot{V}_{2\,\alpha} = \alpha\, \dot{V}_{1\,\alpha}.$$
- Sorgenti di tensione controllate in corrente:
$$\dot{V}_{1\,\varrho} = 0, \qquad \dot{V}_{2\,\varrho} = \varrho\, \dot{I}_{1\,\varrho}.$$
- Sorgenti di corrente controllate in corrente:
$$\dot{V}_{1\,\beta} = 0, \qquad \dot{I}_{2\,\beta} = \beta\, \dot{I}_{1\,\beta}.$$
- Sorgenti di corrente controllate in tensione:
$$\dot{I}_{1\gamma} = 0, \qquad \dot{I}_{2\gamma} = \gamma\, \dot{V}_{1\gamma}.$$
- Amplificatori operazionali (nullori):
$$\dot{I}_{+\,\mathrm{AO}} = 0, \qquad \dot{I}_{-\,\mathrm{AO}} = 0, \qquad \dot{V}_{+\,\mathrm{AO}} - \dot{V}_{-\,\mathrm{AO}} = 0.$$
  Interpretato come doppio bipolo:
$$\dot{I}_{\mathrm{d\,AO}} = 0, \qquad \dot{V}_{\mathrm{d\,AO}} = 0.$$
- Induttori:
$$\dot{V}_{\mathrm{L}} = \mathrm{j}\,\omega L\, \dot{I}_{\mathrm{L}}, \qquad \dot{I}_{\mathrm{L}} = \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega L} \dot{V}_{\mathrm{L}}.$$
- Induttori accoppiati:
$$\dot{V}_{1\,\mathrm{M}} = \mathrm{j}\,\omega L_1\, \dot{I}_{1\,\mathrm{M}} + \mathrm{j}\,\omega M\, \dot{I}_{2\,\mathrm{M}}, \qquad \dot{V}_{2\,\mathrm{M}} = \mathrm{j}\,\omega M\, \dot{I}_{1\,\mathrm{M}} + \mathrm{j}\,\omega L_2\, \dot{I}_{2\,\mathrm{M}}$$
  ovvero, se non strettamente accoppiati, anche:
$$\dot{I}_{1\,\mathrm{M}} = \frac{\Gamma_1}{\mathrm{j}\,\omega}\, \dot{V}_{1\,\mathrm{M}} + \frac{\Gamma_m}{\mathrm{j}\,\omega}\, \dot{V}_{2\,\mathrm{M}}, \qquad \dot{I}_{2\,\mathrm{M}} = \frac{\Gamma_m}{\mathrm{j}\,\omega}\, \dot{V}_{1\,\mathrm{M}} + \frac{\Gamma_2}{\mathrm{j}\,\omega}\, \dot{V}_{2\,\mathrm{M}}.$$
- Condensatori:
$$\dot{I}_{\mathrm{C}} = \mathrm{j}\,\omega C\, \dot{V}_{\mathrm{C}}, \qquad \dot{V}_{\mathrm{C}} = \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega C}\, \dot{I}_{\mathrm{C}}.$$

5.4.3 Impedenza e ammettenza

Sia la caratteristica fasoriale a frequenza indefinita di un bipolo K del tipo

$$a_K(j\,\omega)\,\dot{V}_K = b_K(j\,\omega)\,\dot{I}_K$$

con $a_K(j\,\omega)$, $b_K(j\,\omega)$ polinomi in $j\,\omega$ a coefficienti reali non congiuntamente nulli. Pertanto:

- se l'insieme
$$U_{a_K} := \{\,\omega \mid a_K(j\,\omega) \neq 0\,\} \neq \emptyset$$
allora la funzione
$$Z_K : j\,U_{a_K} \to \mathbf{C}, \qquad Z_K(j\,\omega) := \frac{b_K(j\,\omega)}{a_K(j\,\omega)}$$
si dice impedenza del bipolo e
$$R_K(\omega) := \operatorname{Re} Z_K(j\,\omega), \qquad X_K(\omega) := \operatorname{Im} Z_K(j\,\omega)$$
si dicono rispettivamente resistenza e reattanza del bipolo;
- se l'insieme
$$U_{b_K} := \{\,\omega \mid b_K(j\,\omega) \neq 0\,\} \neq \emptyset$$
allora la funzione
$$Y_K : j\,U_{b_K} \to \mathbf{C}, \qquad Y_K(j\,\omega) := \frac{a_K(j\,\omega)}{b_K(j\,\omega)}$$
si dice ammettenza del bipolo e
$$G_K(\omega) := \operatorname{Re} Y_K(j\,\omega), \qquad B_K(\omega) := \operatorname{Im} Y(j\,\omega)$$
si dicono rispettivamente conduttanza e suscettanza del bipolo.

Se esistono sia $Z_K(j\,\omega)$ che $Y_K(j\,\omega)$, allora

$$Z_K(j\,\omega)\,Y_K(j\,\omega) = 1$$

e quindi, trattandosi di quantità complesse:

$$|\,Z_K(j\,\omega)\,|\,|\,Y_K(j\,\omega)\,| = 1, \qquad \angle Z_K(j\,\omega) + \angle Y_K(j\,\omega) = 0$$

$$R_K(\omega) = \frac{G_K(\omega)}{G_K^2(\omega) + B_K^2(\omega)}, \qquad X_K(\omega) = -\frac{B_K(\omega)}{G_K^2(\omega) + B_K^2(\omega)}$$

$$G_K(\omega) = \frac{R_K(\omega)}{R_K^2(\omega) + X_K^2(\omega)}, \qquad B_K(\omega) = -\frac{X_K(\omega)}{R_K^2(\omega) + X_K^2(\omega)}.$$

In base alle definizioni risulta:

$$\dot{V}_K = Z_K\,\dot{I}_K, \qquad |\,\dot{V}_K\,| = |\,Z_K\,|\,|\,\dot{I}_K\,|, \qquad \angle\dot{V}_K = \angle\dot{I}_K + \angle Z_K$$

$$\dot{I}_K = Y_K\,\dot{V}_K, \qquad |\,\dot{I}_K\,| = |\,Y_K\,|\,|\,\dot{V}_K\,|, \qquad \angle\dot{I}_K = \angle\dot{V}_K + \angle Y_K.$$

Conseguenza fondamentale dell'esistenza dell'impedenza (ammettenza) di un bipolo è che, in tal caso, il rapporto tra il fasore di tensione (corrente) e il fasore di corrente (tensione) che possono comunque interessare il bipolo stesso dipende solo dalla frequenza, e quindi a frequenza fissa esso è costante.

Le proprietà di impedenze e ammettenze vengono studiate mediante i diagrammi delle loro parti reale e immaginaria o del modulo e della fase in funzione della frequenza, o anche mediante il diagramma, detto di Nyquist, relativo alla loro rappresentazione nel piano complesso, con parametro la frequenza.

Per i componenti elementari risulta quanto segue.

- Resistore ohmico:
$$Z_R(j\,\omega) = R, \qquad Y_R(j\,\omega) = G.$$
Si noti che Z_R ed Y_R sono invarianti rispetto alla frequenza e che i loro diagrammi di Nyquist sono un punto sull'asse reale di ascissa R o G, rispettivamente.

- Cortocircuito:
$$Z_{cc}(j\,\omega) = 0$$
e si suole dire che $Y_{cc}(j\,\omega) = \infty$. Si noti che Z_{cc}è invariante rispetto alla frequenza e che il suo diagramma di Nyquist concide con l'origine degli assi.

- Circuito aperto:
$$Y_{ca}(j\,\omega) = 0$$
e si suole dire che $Z_{ca}(j\,\omega) = \infty$. Si noti che Y_{ca}è invariante rispetto alla frequenza e che il suo diagramma di Nyquist concide con l'origine degli assi.

- Induttore:
$$Z_L(j\,\omega) = j\,\omega L, \qquad Y_L(j\,\omega) = \frac{1}{j\,\omega L}$$
con
  - $|Z_L(j\,\omega)|$ crescente da zero all'infinito da frequenza nulla a frequenza infinita e $\angle Z_L(j\,\omega)$ costante e pari a $\pi/2$;
  - $|Y_L(j\,\omega)|$ decrescente dall'infinito a zero da frequenza nulla a frequenza infinita e $\angle Y_L(j\,\omega)$ costante e pari a $-\pi/2$;

  il che mostra che l'induttore equivale a un cortocircuito a frequenza nulla (DC) e a un circuito aperto a frequenza infinita. Si noti che i diagrammi di Nyquist di Z_L e Y_L concidono con il semiasse immaginario positivo e negativo, rispettivamente.

- Condensatore
$$Y_C(j\,\omega) = j\,\omega C, \qquad Z_C(j\,\omega) = \frac{1}{j\,\omega C}$$
con
  - $|Y_C(j\,\omega)|$ crescente da zero all'infinito da frequenza nulla a frequenza infinita e $\angle Y_C(j\,\omega)$ costante e pari a $\pi/2$;
  - $|Z_C(j\,\omega)|$ decrescente dall'infinito a zero da frequenza nulla a frequenza infinita e $\angle Y_C(j\,\omega)$ costante e pari a $-\pi/2$;

  il che mostra che il condensatore equivale a un circuito aperto a frequenza nulla (DC) e a un cortocircuito a frequenza infinita. Si noti che i diagrammi di Nyquist di Y_C e Z_C concidono con il semiasse immaginario positivo e negativo, rispettivamente.

Si noti che le sorgenti ideali non sono dotate né di impedenza né di ammettenza, e così anche i falsi bipoli.

5.5 Componenti composti e componenti equivalenti

I concetti di componente composto e di componente equivalente si estendono in modo immediato al funzionamento in AC, e a questi si estendono le definizioni di immettenza.

Di particolare importanza, tra i bipoli composti in AC, sono le sorgenti di Thévenin e di Norton, i cui parametri sono rispettivamente $Z_T \neq 0$, $\dot{V}_T \neq 0$ e $Y_N \neq 0$, $\dot{I}_N \neq 0$.

Nel seguito, viene quindi riportato un elenco di bipoli composti in AC di cui si fornisce l'equivalente.

- Un corto circuito e un componente K in parallelo.
  Si deduce che l'equivalente è un bipolo di impedenza
  $$Z = 0$$
  purché il componente K ammetta la condizione in corto.
- Un circuito aperto e un componente K in serie.
  Si deduce che l'equivalente è un bipolo di ammettenza
  $$Y = 0$$
  purché il componente K ammetta la condizione a vuoto.
- Una sorgente ideale di tensione con segnale $\dot{V}_s$ e un componente K in parallelo.
  Si deduce che l'equivalente è una sorgente ideale di tensione con segnale pari a $\dot{V}_s$, purché il componente K ammetta la condizione di tensione $\dot{V}_s$. In particolare, nel caso che anche K sia una sorgente ideale di tensione, si deduce che le due sorgenti devono avere lo stesso segnale di tensione.
- Una sorgente ideale di corrente con segnale $\dot{I}_s$ e un componente K in serie.
  Si deduce che l'equivalente è una sorgente ideale di corrente con segnale pari a $\dot{I}_s$, purché il componente K ammetta la condizione di corrente $\dot{I}_s$. In particolare, nel caso che anche K sia una sorgente ideale di corrente, si deduce che le due sorgenti devono avere lo stesso segnale di corrente.
- Due bipoli dotati di impedenza Z_1 e Z_2 in serie.
  Si deduce che l'equivalente è un bipolo di impedenza
  $$Z = Z_1 + Z_2$$
  e quindi di ammettenza
  $$Y = \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2}.$$
- Due bipoli dotati di ammettenza Y_1 e Y_2 in parallelo.
  Si deduce che sl'equivalente è un bipolo di ammettenza
  $$Y = Y_1 + Y_2$$
  e quindi di impedenza
  $$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$
- Bipoli dotati alternativamente di impedenza e di ammettenza a scala.
  Per composizione serie/parallelo, si deduce che l'equivalente è un bipolo dotato di immettenza esprimibile in frazione continua.
- Due sorgenti ideali di tensione con segnali $\dot{V}_{s_1}$ e $\dot{V}_{s_2}$ in serie.
  Si deduce che l'equivalente è una sorgente ideale di tensione con segnale
  $$\dot{V}_s = \dot{V}_{s_1} + \dot{V}_{s_2}.$$
- Due sorgenti ideali di corrente con segnali $\dot{I}_{s_1}$ e $\dot{I}_{s_2}$ in parallelo.
  Si deduce che l'equivalente è una sorgente ideale di corrente con segnale
  $$\dot{I}_s = \dot{I}_{s_1} + \dot{I}_{s_2}.$$
- Un trasformatore ideale caricato da un bipolo dotato di impedenza Z.
  Si deduce che l'equivalente è un bipolo di impedenza
  $$Z' = n_{12}^2 Z.$$

- Un trasformatore ideale caricato da un bipolo dotato di ammettenza Y.
  Si deduce che l'equivalente è un bipolo di ammettenza
  $$Y' = n_{21}^2 Y.$$
- Un trasformatore ideale caricato da una sorgente ideale di tensione con segnale $\dot{V}_s$.
  Si deduce che l'equivalente è una sorgente ideale di tensione con segnale
  $$\dot{V}'_s = n_{12}\dot{V}_s.$$
- Un trasformatore ideale caricato da una sorgente ideale di corrente con segnale $\dot{I}_s$.
  Si deduce che l'equivalente è una sorgente ideale di corrente con segnale
  $$\dot{I}'_s = n_{21}\,\dot{I}_s.$$

Teorema di equivalenza per sorgenti di Thévenin/Norton in AC
Una sorgente di Thévenin in AC con parametri $(Z_T, \dot{V}_T)$ e una sorgente di Norton in AC con parametri $(Y_N, \dot{I}_N)$ sono equivalenti sse

$$Z_T\, Y_N = 1, \qquad \dot{V}_T = Z_T\, \dot{I}_N \qquad (\dot{I}_N = Y_N\, \dot{V}_T).$$

□

Teorema di Thévenin in AC
Un bipolo composto in AC K formato da componenti lineari tempo-invarianti e sorgenti ideali è equivalente a una sorgente di Thévenin in AC sse ammette la condizione a vuoto e, a riposo, è equivalente a un componente dotato di impedenza. In tali ipotesi, il segnale $\dot{V}_T$ e la tensione a vuoto di K coincidono, l'impedenza Z_T e l'impedenza dell'equivalente di K_0 coincidono. □

Teorema di Norton in AC
Un bipolo composto in AC K formato da componenti lineari tempo-invarianti e sorgenti ideali è equivalente a una sorgente di Norton in AC sse ammette la condizione in corto e, a riposo, è equivalente a un componente dotato di ammettenza. In tali ipotesi, il segnale $\dot{I}_N$ e la corrente in corto di K, l'ammettenza Y_N e l'ammettenza dell'equivalente di K_0 sono uguali. □

5.6 Potenza

L'analisi di potenza in AC è molto importante.

5.6.1 Preliminari

Data una funzione periodica $f \in C^-(\mathbf{R}_{qo}, \mathbf{R})$ di periodo T si definisce:

- valor medio, il numero:
  $$\overline{f} := \frac{1}{T}\int_T f$$
- valore quadratico medio, il numero:
  $$\overline{f^2} := \frac{1}{T}\int_T f^2$$
- norma o valore efficace, il numero:
  $$\|f\| = F_e := \sqrt{\frac{1}{T}\int_T f^2} = \sqrt{\overline{f^2}}.$$

In base a tali definizioni, se

$$s(t) = M\cos(\omega t + \varphi)$$

risulta:

$$\bar{s} = 0, \qquad \overline{s^2} = \frac{M^2}{2}, \qquad \|s\| = S_e = \frac{M}{\sqrt{2}}$$

e se

$$s'(t) = M'\cos(h\omega t + \varphi'), \qquad s''(t) = M''\cos(k\omega t + \varphi'')$$

risulta:

$$\overline{s'\,s''} = \begin{cases} \frac{1}{2}\,M'\,M''\cos(\angle\varphi' - \angle\varphi'') & h = k \\ 0 & h \neq k. \end{cases}$$

Infine, per una variabile x cui corrisponda la variabile fasoriale $\dot{X}$ si definisce la variabile fasoriale efficace come

$$\dot{X}_e := \frac{\dot{X}}{\sqrt{2}}.$$

5.6.2 Potenza media, attiva, reattiva

Siano $\dot{V}$ e $\dot{I}$ le variabili fasoriali di tensione e corrente di un bipolo in AC riferito a basi associate (o di una porta di un multiporta). Allora:

$$v(t) = |\dot{V}|\cos(\omega t + \angle\dot{V})$$

$$i(t) = |\dot{I}|\cos(\omega t + \angle\dot{I})$$

e

$$p_a(t) := v(t)\,i(t) = |\dot{V}|\,|\dot{I}|\,\cos(\omega t + \angle\dot{V})\,\cos(\omega t + \angle\dot{I}).$$

La quantità fondamentale che descrive il comportamento del bipolo dal punto di vista della potenza è la media della potenza assorbita:

$$\overline{p_a} = \frac{1}{2}\,|\dot{V}|\,|\dot{I}|\,\cos(\angle\dot{V} - \angle\dot{I}).$$

Tuttavia, la sola potenza assorbita media non basta a descrivere compiutamente il funzionamento del bipolo, perché uno stesso valore di tale grandezza può corrispondere a funzionamenti molto diversi sotto altri aspetti. Per una più completa descrizione della situazione, si cominci col riscrivere la corrente evidenziandone le componenti parallela e ortogonale alla tensione:

$$\begin{aligned} i(t) &= |\dot{I}|\cos(\omega t + \angle\dot{I}) = |\dot{I}|\cos[\omega t + \angle\dot{V} - (\angle\dot{V} - \angle\dot{I})] = \\ &= |\dot{I}|\cos(\angle\dot{V} - \angle\dot{I})\,\cos(\omega t + \angle\dot{V}) + |\dot{I}|\,\sin(\angle\dot{V} - \angle\dot{I})\,\sin(\omega t + \angle\dot{V}) \end{aligned}$$

e si definiscano:

- la corrente attiva
$$i_{\|}(t) := |\dot{I}|\cos(\angle\dot{V} - \angle\dot{I})\cos(\omega t + \angle\dot{V})$$
- la corrente reattiva
$$i_{\perp}(t) := |\dot{I}|\sin(\angle\dot{V} - \angle\dot{I})\sin(\omega t + \angle\dot{V}).$$

Se adesso si scrive la potenza assorbita nella forma:

$$p_a := v\,i = v\,(i_{\|} + i_{\perp}) = v\,i_{\|} + v\,i_{\perp}$$

e si introducono:

- la potenza attiva istantanea
$$p_{\|} := v\,i_{\|}$$

- la potenza reattiva istantanea o potenza fluttuante

$$p_\perp := v\, i_\perp$$

si ha:

$$p_\mathrm{a} = p_\parallel + p_\perp$$

con

$$\overline{p_\parallel} = \overline{p_\mathrm{a}}, \qquad \overline{p_\perp} = 0.$$

Queste formule mostrano che solo la corrente attiva istantanea è utile ai fini della potenza assorbita media, e di conseguenza che la corrente reattiva istantanea rappresenta un termine superfluo e quindi potenzialmente dannoso.

Allora, occorre disporre di una misura dell'entità relativa dei due termini di potenza rispetto alla potenza assorbita, Per far sì che essa prescinda dagli specifici segnali in gioco, conviene introdurre le seguenti grandezze:

- la potenza apparente

$$A := V_\mathrm{e}\, I_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\,|\dot V|\,|\dot I|$$

- la potenza attiva assoluta

$$P_\parallel := V_\mathrm{e}\, I_{\parallel\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\,|\dot V|\,|\dot I|\,|\cos(\angle\dot V - \angle\dot I)|$$

- la potenza reattiva assoluta

$$Q_\perp := V_\mathrm{e}\, I_{\perp\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\,|\dot V|\,|\dot I|\,|\sin(\angle\dot V - \angle\dot I)|$$

- il segno associato alla potenza attiva assoluta

$$\sigma_\parallel := \operatorname{sgn}\cos\angle(v,i) = \operatorname{sgn}\cos(\angle\dot V - \angle\dot I)$$

- il segno associato alla potenza reattiva assoluta

$$\sigma_\perp := \operatorname{sgn}\sin\angle(v,i) = \operatorname{sgn}\sin(\angle\dot V - \angle\dot I)$$

- la potenza attiva (con segno)

$$P := \sigma_\parallel\, P_\parallel = \frac{1}{2}\,|\dot V|\,|\dot I|\,\cos(\angle\dot V - \angle\dot I)$$

- la potenza reattiva (con segno)

$$Q := \sigma_\perp\, P_\perp = \frac{1}{2}\,|\dot V|\,|\dot I|\,\sin(\angle\dot V - \angle\dot I).$$

Si noti che:

$$P^2 + Q^2 = A^2$$

e

$$\max_{\angle\dot V - \angle\dot I} P = \max_{\angle\dot V - \angle\dot I} Q = A$$

e

$$P = \overline{p_\mathrm{a}}.$$

Le prime due formule illustrano il gioco tra i due termini di potenza, mentre la terza evidenzia l'importante relazione che sussiste tra potenza attiva e potenza media. Un ulteriore aiuto alla comprensione dei fenomeni risulta, infine, dagli sviluppi seguenti:

$$
\begin{aligned}
p_{\|}(t) := v(t)\, i_{\|}(t) &= |\dot V|\cos(\omega t + \angle\dot V)\,|\dot I|\cos(\angle\dot V - \angle\dot I)\cos(\omega t + \angle\dot V) = \\
&= |\dot V|\,|\dot I|\cos(\angle\dot V - \angle\dot I)\cos^2(\omega t + \angle\dot V) = \\
&= \frac{1}{2}\,|\dot V|\,|\dot I|\cos(\angle\dot V - \angle\dot I)\,[1 + \cos 2(\omega t + \angle\dot V)] = \\
&= P\,[1 + \cos 2(\omega t + \angle\dot V)] \\
p_{\perp}(t) := v(t)\, i_{\perp}(t) &= |\dot V|\cos(\omega t + \varphi_v)\,|\dot I|\sin(\angle\dot V - \angle\dot I)\sin(\omega t + \angle\dot V) = \\
&= |\dot V|\,|\dot I|\sin(\angle\dot V - \angle\dot I)\sin(\omega t + \angle\dot V)\cos(\omega t + \angle\dot V) = \\
&= \frac{1}{2}\,|\dot V|\,|\dot I|\sin(\angle\dot V - \angle\dot I)\sin 2(\omega t + \angle\dot V) = \\
&= Q\sin 2(\omega t + \angle\dot V)
\end{aligned}
$$

da cui segue:

$$p_{\mathrm{a}}(t) = P\,[1 + \cos 2(\omega t + \varphi_v)] + Q\,\sin 2(\omega t + \varphi_v).$$

Si noti che valgono le formule:

$$\operatorname{sgn} p_{\|} = \operatorname{sgn} P, \qquad \operatorname{extr} p_{\|} = \{0,\, 2P\}$$

e

$$\operatorname{sgn} p_{\perp} = \pm, \qquad \operatorname{extr} p_{\perp} = \{-|Q|,\, |Q|\}.$$

5.6.3 Potenza complessa

A questo punto è conveniente introdurre una nuova grandezza che riassuma le precedenti in modo sintetico, ie la potenza complessa:

$$P_{\mathrm{c}} := \frac{1}{2}\,\dot V\,\dot I^* = \dot V_{\mathrm{e}}\,\dot I^*_{\mathrm{e}}.$$

Infatti, si ha:

$$
\begin{aligned}
|P_{\mathrm{c}}| &= \left|\frac{1}{2}\,\dot V\,\dot I^*\right| = \frac{1}{2}\,|\dot V|\,|\dot I| = A \\
\operatorname{Re} P_{\mathrm{c}} &= \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}\,|\dot V|\,|\dot I|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\angle\dot V - \angle\dot I)}\right) = \frac{1}{2}\,|\dot V|\,|\dot I|\cos(\angle\dot V - \angle\dot I) = P \\
\operatorname{Im} P_{\mathrm{c}} &= \operatorname{Im}\left(\frac{1}{2}\,|\dot V|\,|\dot I|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\angle\dot V - \angle\dot I)}\right) = \frac{1}{2}\,|\dot V|\,|\dot I|\sin(\angle\dot V - \angle\dot I) = Q.
\end{aligned}
$$

Nel caso in cui il componente sia dotato di impedenza o di ammettenza si hanno altre formule piuttosto interessanti. Visto che

$$\dot V = Z\,\dot I = (R + \mathrm{j}\,X)\,\dot I, \qquad \dot I = Y\,\dot V = (G + \mathrm{j}\,B)\,\dot V$$

seguono le altre espressioni:

$$
\begin{aligned}
P_{\mathrm{c}} &= \frac{1}{2}\,|Z|\,|\dot I|^2\,(\cos\angle Z + \mathrm{j}\,\sin\angle Z) = \frac{1}{2}\,|Y|\,|\dot V|^2\,(\cos\angle Y - \mathrm{j}\,\sin\angle Y) \\
P_{\mathrm{c}} &= \frac{1}{2}\,(R + \mathrm{j}\,X)\,|\dot I|^2 = \frac{1}{2}\,(G - \mathrm{j}\,B)\,|\dot V|^2
\end{aligned}
$$

da cui

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\,|\,Z\,|\,|\,\dot{I}\,|^2 = \frac{1}{2}\,|\,Y\,|\,|\,\dot{V}\,|^2 \\
P &= \frac{1}{2}\,|\,Z\,|\,|\,\dot{I}\,|^2 \cos\angle Z = \frac{1}{2}\,|\,Y\,|\,|\,\dot{V}\,|^2 \cos\angle Y \\
P &= \frac{1}{2}\,R\,|\,\dot{I}\,|^2 = \frac{1}{2}\,G\,|\,\dot{V}\,|^2 \\
Q &= \frac{1}{2}\,|\,Z\,|\,|\,\dot{I}\,|^2 \sin\angle Z = -\,\frac{1}{2}\,|\,Y\,|\,|\,\dot{V}\,|^2 \sin\angle Y \\
Q &= \frac{1}{2}\,X\,|\,\dot{I}\,|^2 = -\,\frac{1}{2}\,B\,|\,\dot{V}\,|^2
\end{aligned}
$$

Tutte le formule soprastanti possono essere espresse in termini di fasori efficaci. In particolare, si consideri la formula:

$$P = R\,|\,\dot{I}_{\mathrm{e}}\,|^2 = G\,|\,\dot{V}_{\mathrm{e}}\,|^2$$

la quale mostra che

- la potenza media assorbita in AC da un componente con impedenza $Z = R + \mathrm{j}\,X$ e fasore di corrente $\dot{I}$ è uguale alla potenza assorbita in DC da un resistore di resistenza R e corrente $|\,\dot{I}_{\mathrm{e}}\,|$;

- la potenza media assorbita in AC da un componente con ammettenza $Y = G + \mathrm{j}\,B$ e fasore di tensione $\dot{V}$ è uguale alla potenza assorbita in DC da un resistore di conduttanza G e tensione $|\,\dot{V}_{\mathrm{e}}\,|$.

Per i componenti elementari risulta:

- resistore ohmico

$$
\begin{aligned}
P_{\mathrm{c}} &= \frac{1}{2}\,R\,|\,\dot{I}\,|^2 = \frac{1}{2}\,G\,|\,\dot{V}\,|^2 \\
A &= \frac{1}{2}\,R\,|\,\dot{I}\,|^2 = \frac{1}{2}\,G\,|\,\dot{V}\,|^2 \\
P &= \frac{1}{2}\,R\,|\,\dot{I}\,|^2 = \frac{1}{2}\,G\,|\,\dot{V}\,|^2 \\
Q &= 0
\end{aligned}
$$

- induttore

$$
\begin{aligned}
P_{\mathrm{c}} &= \mathrm{j}\,\frac{1}{2}\,\omega L\,|\,\dot{I}\,|^2 = \mathrm{j}\,\frac{1}{2}\,\frac{|\,\dot{V}\,|^2}{\omega L} \\
A &= \frac{1}{2}\,\omega L\,|\,\dot{I}\,|^2 = \frac{1}{2}\,\frac{|\,\dot{V}\,|^2}{\omega L} \\
P &= 0 \\
Q &= \frac{1}{2}\,\omega L\,|\,\dot{I}\,|^2 = \frac{1}{2}\,\frac{|\,\dot{V}\,|^2}{\omega L}
\end{aligned}
$$

- condensatore

$$\begin{aligned}
P_{\mathrm{c}} &= -\mathrm{j}\,\frac{1}{2}\,\omega C\,|\dot{V}|^2 = -\mathrm{j}\,\frac{1}{2}\,\frac{|\dot{I}|^2}{\omega C} \\
A &= \frac{1}{2}\,\omega C\,|\dot{V}|^2 = \frac{1}{2}\,\frac{|\dot{I}|^2}{\omega C} \\
P &= 0 \\
Q &= -\frac{1}{2}\,\omega C\,|\dot{V}|^2 = \frac{1}{2}\,\frac{|\dot{I}|^2}{\omega C}.
\end{aligned}$$

La potenza complessa soddisfa due importanti teoremi, grazie al fatto che i fasori di tensione soddisfano la LKT e i fasori di corrente, nonché i loro coniugati, la LKC. Pertanto, vigono un teorema di Tellegen in AC e un teorema di conservazione della potenza per componenti composti in AC della forma seguente.

Teorema di Tellegen in AC (Boucherot)
Per qualsiasi circuito simbolico in AC si ha:

$$\sum_{\mathrm{K}\in\mathcal{K}} P_{\mathrm{c\,K}} = 0 \qquad \text{ossia} \qquad \sum_{\mathrm{K}\in\mathcal{K}}\sum_{\mathrm{h}\in\mathcal{P}_{\mathrm{K}}} \dot{V}_{\mathrm{h\,K}}\,\dot{I}^*_{\mathrm{h\,K}} = 0.$$

□

Teorema di conservazione della potenza complessa del componente composto
Per un qualsiasi componente composto K simbolico in AC, se $\mathcal{K}_{\mathrm{i}}$ è l'insieme dei componenti interni, si ha:

$$P_{\mathrm{cK}} = \sum_{\mathrm{X}\in\mathcal{K}_{\mathrm{i}}} P_{\mathrm{cX}}.$$

□

In particolare, se tanto il componente composto K che i suoi componenti interni sono bipoli, si ha:

$$\frac{1}{2}\,\dot{V}_{\mathrm{K}}\,\dot{I}^*_{\mathrm{K}} = \sum_{\mathrm{X}\in\mathcal{K}_{\mathrm{i}}} \frac{1}{2}\,\dot{V}_{\mathrm{X}}\,\dot{I}^*_{\mathrm{X}}, \qquad \dot{V}_{\mathrm{K_e}}\,\dot{I}^*_{\mathrm{K_e}} = \sum_{\mathrm{X}\in\mathcal{K}_{\mathrm{i}}} \dot{V}_{\mathrm{X_e}}\,\dot{I}^*_{\mathrm{X_e}}.$$

5.6.4 Massimo trasferimento di potenza in DC

Sia dato lo schema in figura. Evidentemente si ha:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{V_{\mathrm{s}}}{R_{\mathrm{S}} + R_{\mathrm{L}}} \\
P_{\mathrm{a}R_{\mathrm{L}}} &= R_{\mathrm{L}}\,I^2 = \frac{R_{\mathrm{L}}\,V_{\mathrm{s}}^2}{(R_{\mathrm{S}} + R_{\mathrm{L}})^2} \\
P_{\mathrm{a}R_{\mathrm{S}}} &= R_{\mathrm{S}}\,I^2 = \frac{R_{\mathrm{S}}\,V_{\mathrm{s}}^2}{(R_{\mathrm{S}} + R_{\mathrm{L}})^2}.
\end{aligned}$$

Inoltre:

$$\eta := \frac{P_{\mathrm{a}R_{\mathrm{L}}}}{P_{\mathrm{eE}}} = \frac{P_{\mathrm{a}R_{\mathrm{L}}}}{P_{\mathrm{a}R_{\mathrm{S}}} + P_{\mathrm{a}R_{\mathrm{L}}}} = \frac{R_{\mathrm{L}}\,I^2}{R_{\mathrm{S}}\,I^2 + R_{\mathrm{L}}\,I^2} = \frac{R_{\mathrm{L}}}{R_{\mathrm{S}} + R_{\mathrm{L}}}.$$

Lo studio della funzione $P_{\mathrm{a}R_{\mathrm{L}}}$ conduce al teorema seguente.

Teorema di adattamento in DC
Un resistore con resistenza R_L assorbe la massima potenza da una sorgente reale con parametri R_S ($R_S > 0$) e V_s sse

$$R_\mathrm{L} = R_\mathrm{S}$$

e in tali condizioni potenza assorbita e rendimento risultano dati da:

$$P_\mathrm{x} = \frac{V_\mathrm{s}^2}{4R_\mathrm{S}}, \qquad \eta_\mathrm{x} = \frac{1}{2}.$$

□

Dimostrazione
Infatti, l'azzeramento della derivata della potenza fornisce il punto stazionario

$$R_\mathrm{L} = R_\mathrm{S}$$

in corrispondenza al quale la potenza assorbita risulta:

$$\frac{V_\mathrm{s}^2}{4R_\mathrm{S}}.$$

Ma vale la catena di equivalenze:

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{a}R_\mathrm{L}} \leqslant \frac{V_\mathrm{s}^2}{4R_S} \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{R_\mathrm{L}\, V_\mathrm{s}^2}{(R_\mathrm{S}+R_\mathrm{L})^2} \leqslant \frac{V_\mathrm{s}^2}{4R_\mathrm{S}} \quad \Leftrightarrow \quad 4R_\mathrm{S}\, R_\mathrm{L} \leqslant (R_\mathrm{S}+R_\mathrm{L})^2 \quad \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant (R_\mathrm{S}-R_\mathrm{L})^2 \end{aligned}$$

e l'ultima disequazione è sempre soddisfatta, ed è soddisfatta come uguaglianza sse $R_\mathrm{L} = R_\mathrm{S}$. Infine, risulta:

$$\lim_{R_\mathrm{L}\to\infty} P_{\mathrm{a}R_\mathrm{L}} = 0$$

il che conclude la dimostrazione. □

Grafico della potenza (curva a campana, convessa da $R_\mathrm{L} = 0$ a $R_\mathrm{L} = 2\,R_\mathrm{S}$, concava oltre, derivata nell'origine pari a $V_\mathrm{s}^2/R_\mathrm{S}^2$). Grafico del rendimento (curva convessa, derivata nell'origine pari a $1/R_\mathrm{S}$).

Considerazioni sulla convenienza di questo tipo di adattamento e sul caso in cui non sia possibile scegliere liberamente il carico.

Caso duale.

5.6.5 Massimo trasferimento di potenza in AC

Sia dato lo schema in figura. Evidentemente si ha:

$$\begin{aligned} \dot I &= \frac{\dot V_\mathrm{s}}{Z_\mathrm{S}+Z_\mathrm{L}} = \frac{\dot V_\mathrm{s}}{R_\mathrm{S}+R_\mathrm{L}+\mathrm{j}\,(X_\mathrm{S}+X_\mathrm{L})} \\ P_{Z_\mathrm{L}} &= \frac{1}{2}\,R_\mathrm{L}\,|\dot I|^2 = \frac{1}{2}\frac{R_\mathrm{L}\,|\dot V_\mathrm{s}|^2}{(R_\mathrm{S}+R_\mathrm{L})^2+(X_\mathrm{S}+X_\mathrm{L})^2} \\ P_{Z_\mathrm{S}} &= \frac{1}{2}\,R_\mathrm{S}\,|\dot I|^2 = \frac{1}{2}\frac{R_\mathrm{S}\,|\dot V_\mathrm{s}|^2}{(R_\mathrm{S}+R_\mathrm{L})^2+(X_\mathrm{S}+X_\mathrm{L})^2}. \end{aligned}$$

Inoltre:

$$\eta := \frac{P_{Z_\mathrm{L}}}{|P_\mathrm{E}|} = \frac{P_{Z_\mathrm{L}}}{P_{Z_\mathrm{S}}+P_{Z_\mathrm{L}}} = \frac{R_\mathrm{L}\,|\dot I|^2}{R_\mathrm{S}\,|\dot I|^2+R_\mathrm{L}\,|\dot I|^2} = \frac{R_\mathrm{L}}{R_\mathrm{S}+R_\mathrm{L}}.$$

Lo studio della funzione P_{Z_L} conduce al teorema seguente.

Teorema di adattamento in AC
Un componente con impedenza Z_L assorbe la massima potenza attiva da una sorgente reale di tensione con parametri Z_S ($\mathrm{Re}\, Z_S > 0$) e $\dot{V}_s$ sse

$$Z_L = Z_S^*$$

e in tali condizioni potenza attiva e rendimento risultano dati da:

$$P_x = \frac{|\dot{V}_s|^2}{8R_S}, \qquad \eta_x = \frac{1}{2}.$$

□

Dimostrazione
Infatti, l'azzeramento delle derivate della potenza fornisce il punto stazionario

$$R_L = R_S, \qquad X_L = -X_S$$

in corrispondenza al quale la potenza attiva risulta:

$$\frac{|\dot{V}_s|^2}{8R_S}.$$

Ma, vale la catena di equivalenze:

$$\begin{aligned}
P_{Z_L} \leqslant \frac{|\dot{V}_s|^2}{8R_S} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\,\frac{R_L\,|\dot{V}_s|^2}{(R_S+R_L)^2+(X_S+X_L)^2} \leqslant \frac{|\dot{V}_s|^2}{8R_S} \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad 4R_S\,R_L \leqslant (R_S+R_L)^2 + (X_S+X_L)^2 \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad 0 \leqslant (R_S-R_L)^2 + (X_S+X_L)^2
\end{aligned}$$

e l'ultima disequazione è sempre soddisfatta, ed è soddisfatta come uguaglianza sse $R_L = R_S, X_L = -X_S$. Infine risulta:

$$\lim_{|R_L^2+X_L^2|\to\infty} P_{Z_L} = 0$$

il che conclude la dimostrazione. □

La condizione così realizzata ($Z_L = Z_S^*$) si dice adattamento su base coniugata.

Considerazioni sulla convenienza di questo tipo di adattamento e sul caso in cui non sia possibile scegliere liberamente il carico.

Caso duale.

5.7 Energia media

L'energia dell'induttore, degli induttori accoppiati e del condensatore valgono:

$$\begin{aligned}
E_L &= \frac{1}{2} L\, i_L^2 \\
E_M &= \frac{1}{2} L_1\, i_{1\,M}^2 + M\, i_{1\,M}\, i_{2\,M} + \frac{1}{2} L_2\, i_{2\,M}^2 \\
E_C &= \frac{1}{2} C\, v_C^2.
\end{aligned}$$

Ergo, se i fasori di tensione e di corrente sono rispettivamente $\dot{I}_L$, $\dot{I}_{1\,M}$, $\dot{I}_{2\,M}$ e $\dot{V}_C$, risulta:

$$\begin{aligned}
i_L(t) &= |\dot{I}_L|\cos(\omega t + \angle\dot{I}_L) \\
i_{1\,M}(t) &= |\dot{I}_{1\,M}|\cos(\omega t + \angle\dot{I}_{1\,M}) \\
i_{2\,M}(t) &= |\dot{I}_{2\,M}|\cos(\omega t + \angle\dot{I}_{2\,M}) \\
v_C(t) &= |\dot{V}_C|\cos(\omega t + \angle\dot{V}_C)
\end{aligned}$$

e l'energia media dei tre componenti vale:

$$\begin{aligned}
\overline{E_\mathrm{L}} &= \frac{1}{4}\,L\,|\dot{I}_\mathrm{L}|^2 \\
\overline{E_\mathrm{M}} &= \frac{1}{4}\,L_1\,|\dot{I}_{1\,\mathrm{M}}|^2 + \frac{1}{2}\,M\,|\dot{I}_{1\,\mathrm{M}}|\,|\dot{I}_{2\,\mathrm{M}}|\,\cos(\angle\dot{I}_{1\,\mathrm{M}} - \angle\dot{I}_{2\,\mathrm{M}}) + \frac{1}{4}\,L_2\,|\dot{I}_{2\,\mathrm{M}}|^2 \\
\overline{E_\mathrm{C}} &= \frac{1}{4}\,C\,|\dot{V}_\mathrm{C}|^2
\end{aligned}$$

5.8 Metodo delle tensioni nodali

Come si è visto, un circuito lineare tempo-invariante soggetto solo a sorgenti ideali con segnali sinusoidali isofrequenziali ammette una soluzione sinusoidale isofrequenziale sse la sua controparte fasoriale (ie il circuito simbolico in AC) ammette una soluzione in $K(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ a quella frequenza. Ma il circuito simbolico in AC è strutturalmente identico ad un circuito di sole sorgenti e componenti resistivi, in quanto le equazioni cui devono soddisfare le variabili sono algebriche sia pure in $\mathbf{C}$. Quindi è possibile applicare tutte le tecniche già viste per quei circuiti. Però, le equazioni di Kirchhoff e le equazioni costitutive costituiscono un sistema sparso e la procedura di risoluzione è piuttosto laboriosa anche per circuiti semplici. Il metodo delle tensioni nodali è invece molto efficiente.

5.8.1 Descrizione del metodo

Sia dato un circuito, sia $\mathcal{N}$ l'insieme dei suoi nodi, e si assuma uno tra questi come nodo di riferimento. Si numerino nodi e relative sezioni nodali da 1 a $|\mathcal{N}|$, indice riservato al nodo di riferimento. Si indichi poi con $\dot{E}_\mathrm{r}$, $r = 1, \ldots, |\mathcal{N}|-1$ la tensione fasoriale del nodo di indice r rispetto al nodo di riferimento. Si denoti infine con:

- $Y_{h,k}$, $h = 1, \ldots, |\mathcal{N}|-1$, $k = 1, \ldots, |\mathcal{N}|$, l'ammettenza del bipolo composto connesso tra il nodo di indice h e il nodo di indice k (se c'è) e con $\dot{I}_{h,k}$ e $\dot{V}_{h,k}$ la corrente e la tensione relative orientate dal nodo di indice h al nodo di indice k;
- Q_h l'insieme (eventualmente vuoto) delle sorgenti ideali di corrente afferenti al nodo di indice h;
- P_h l'insieme (eventualmente vuoto) dei cosiddetti terminali non-standard afferenti al nodo di indice h, ie dei terminali orientati di base intersecati dalla sezione nodale di indice h che non appartengano né ai componenti interni dei suddetti bipoli composti né alle suddette sorgenti ideali di corrente (esempio: terminali di bipoli privi di ammettenza o di falsi bipoli o di multipoli).

L'equazione KCL alla sezione nodale di indice h ($1 \leqslant h \leqslant |\mathcal{N}|-1$) è della forma:

$$\sum_{k=1}^{h-1} \dot{I}_{h,k} + \sum_{k=h+1}^{|\mathcal{N}|} \dot{I}_{h,k} + \sum_{p\in P_h} (\pm)\,\dot{I}_p = \sum_{q\in Q_h} (\pm)\,\dot{I}_q.$$

Ma:

$$\begin{aligned}
\dot{I}_{h,k} &= Y_{h,k}\,\dot{V}_{h,k} = Y_{h,k}\,(\dot{E}_h - \dot{E}_k) \qquad 1 \leqslant k \leqslant |\mathcal{N}|-1 \\
\dot{I}_{h,|\mathcal{N}|} &= Y_{h,|\mathcal{N}|}\,\dot{V}_{h,|\mathcal{N}|} = Y_{h,|\mathcal{N}|}\,\dot{E}_h
\end{aligned}$$

Ergo in sequenza:

$$\sum_{k=1}^{h-1} Y_{h,k}\,(\dot{E}_h - \dot{E}_k) + \sum_{k=h+1}^{|\mathcal{N}|-1} Y_{h,k}\,(\dot{E}_h - \dot{E}_k) + Y_{h,|\mathcal{N}|}\,\dot{E}_h + \sum_{p\in P_h} (\pm)\,\dot{I}_p = \sum_{q\in Q_h} (\pm)\,\dot{I}_q$$

$$-\sum_{k=1}^{h-1} Y_{h,k}\,\dot{E}_k + \left(\sum_{k=1}^{h-1} Y_{h,k} + \sum_{k=h+1}^{|\mathcal{N}|} Y_{h,k}\right)\dot{E}_h - \sum_{k=h+1}^{|\mathcal{N}|-1} Y_{h,k}\,\dot{E}_k + \sum_{p\in P_h}(\pm)\,\dot{I}_p = \sum_{q\in Q_h}(\pm)\,\dot{I}_q.$$

Pertanto, il sistema di tali equazioni è esprimibile come

$$\boldsymbol{Y}_{\mathrm{n}}\,\dot{\boldsymbol{E}} + \dot{\boldsymbol{I}}_{\mathrm{P}} = \dot{\boldsymbol{I}}_{\mathrm{J}}$$

ove

- $\boldsymbol{Y}_{\mathrm{n}}$ è una matrice quadrata simmetrica di dimensione $(|\mathcal{N}|-1)\times(|\mathcal{N}|-1)$, il cui elemento di indice (h, h) è la somma aritmetica delle ammettenze dei bipoli composti che insistono tra il nodo di indice h e tutti gli altri nodi (nodo di riferimento incluso), e il cui elemento fuori diagonale di indice (h, k) è l'opposto dell'ammettenza del bipolo composto che insiste tra il nodo di indice h e il nodo di indice k (nodo di riferimento escluso);
- $\dot{\boldsymbol{E}}$ è un vettore di dimensione $|\mathcal{N}|-1$ il cui elemento di indice h è la tensione fasoriale nodale $\dot{E}_h$;
- $\dot{\boldsymbol{I}}_{\mathrm{J}}$ è un vettore di dimensione $|\mathcal{N}|-1$, il cui elemento di indice h è la somma algebrica (con segno positivo se il verso della freccia del simbolo converge verso il nodo, negativo se ne diverge) delle correnti delle sorgenti ideali di corrente che afferiscono al nodo di indice h;
- $\dot{\boldsymbol{I}}_{\mathrm{P}}$ è un vettore di dimensione $|\mathcal{N}|-1$, il cui elemento di indice h è la somma algebrica (con segno positivo se il verso della freccia diverge dal nodo, negativo se vi converge) delle correnti dei terminali non-standard che sono intersecati dalla sezione nodale di indice h.

Si osservi anche che, in base a tali proprietà:

- ogni corrente di sorgente ideale di corrente compare in $\dot{\boldsymbol{I}}_{\mathrm{J}}$ o solo una volta, se la sorgente è connessa al nodo di riferimento, o solo due volte e con segno opposto, in caso contrario;
- ogni corrente di terminale non-standard compare in $\dot{\boldsymbol{I}}_{\mathrm{P}}$ o solo una volta, se il terminale è connesso al nodo di riferimento, o solo due volte e con segno opposto, in caso contrario.

A questo sistema vanno associate le equazioni costitutive fasoriali dei componenti sin qui non utilizzate, dopo aver fatto uso in esse della LKT. Posto per la tensione dei bipoli

$$\dot{V}_{(.)} = \dot{E}_a - \dot{E}_b$$

e per le tensioni dei doppi bipoli

$$\dot{V}_{1\,(.)} = \dot{E}_a - \dot{E}_b, \qquad \dot{V}_{2\,(.)} = \dot{E}_c - \dot{E}_d$$

ove a, b, c, d sono gli indici dei nodi coinvolti, risulta quanto segue.

- Sorgente indipendente di tensione.
  Da
  $$\dot{V}_{\mathrm{E}} = \dot{V}_{\mathrm{s}}$$
  segue
  $$\dot{E}_a - \dot{E}_b = \dot{V}_{\mathrm{s}}.$$
- Trasformatore ideale.
  Da
  $$\frac{\dot{V}_{1\,\mathrm{T}}}{N_1} = \frac{\dot{V}_{2\,\mathrm{T}}}{N_2}, \qquad N_1\,\dot{I}_{1\,\mathrm{T}} = -N_2\,\dot{I}_{2\,\mathrm{T}}$$
  segue
  $$\frac{\dot{E}_a - \dot{E}_b}{N_1} = \frac{\dot{E}_c - \dot{E}_d}{N_2}, \qquad N_1\,\dot{I}_{1\,\mathrm{T}} = -\dot{N}_2\,I_{2\,\mathrm{T}}.$$

- Sorgente di tensione controllata in tensione.
  Da
  $$\dot{I}_{1\,\alpha} = 0, \qquad \dot{V}_{2\,\alpha} = \alpha\,\dot{V}_{1\,\alpha}$$
  segue
  $$\dot{I}_{1\,\alpha} = 0, \qquad (\dot{E}_c - \dot{E}_d) = \alpha\,(\dot{E}_a - \dot{E}_b).$$
- Sorgente di tensione controllata in corrente.
  Da
  $$\dot{V}_{1\,\varrho} = 0, \qquad \dot{V}_{2\,\varrho} = \varrho\,\dot{I}_{1\,\varrho}$$
  segue
  $$\dot{E}_a - \dot{E}_b = 0, \qquad (\dot{E}_c - \dot{E}_d) = \varrho\,\dot{I}_{1\,\varrho}.$$
- Sorgente di corrente controllata in corrente.
  Da
  $$\dot{V}_{1\,\beta} = 0, \qquad \dot{I}_{2\,\beta} = \beta\,\dot{I}_{1\,\beta}$$
  segue
  $$\dot{E}_a - \dot{E}_b = 0, \qquad \dot{I}_{2\,\beta} = \beta\,\dot{I}_{1\,\beta}.$$
- Sorgente di corrente controllata in tensione.
  Da
  $$\dot{I}_{1\,\gamma} = 0, \qquad \dot{I}_{2\,\gamma} = \gamma\,\dot{V}_{1\,\gamma}$$
  segue
  $$\dot{I}_{1\,\gamma} = 0, \qquad \dot{I}_{2\,\gamma} = \gamma\,(\dot{E}_a - \dot{E}_b).$$
- Amplificatore operazionale (nullore).
  Da
  $$\dot{I}_{+\,\mathrm{AO}} = 0, \qquad \dot{I}_{-\,\mathrm{AO}} = 0, \qquad \dot{V}_{+\,\mathrm{AO}} - \dot{V}_{-\,\mathrm{AO}} = 0$$
  segue
  $$\dot{I}_{+\,\mathrm{AO}} = 0, \qquad \dot{I}_{-\,\mathrm{AO}} = 0, \qquad (\dot{E}_a - \dot{E}_d) - (\dot{E}_b - \dot{E}_d) = 0.$$
  Interpretato come doppio bipolo, da
  $$\dot{I}_{\mathrm{d\,AO}} = 0, \qquad \dot{V}_{\mathrm{d\,AO}} = 0$$
  segue
  $$\dot{I}_{\mathrm{d\,AO}} = 0, \qquad \dot{E}_a - \dot{E}_b = 0.$$
- Induttori accoppiati.
  Da
  $$\dot{V}_{1\,\mathrm{M}} = \mathrm{j}\,\omega L_1\,\dot{I}_{1\,\mathrm{M}} + \mathrm{j}\,\omega M\,\dot{I}_{2\,\mathrm{M}}, \qquad \dot{V}_{2\,\mathrm{M}} = \mathrm{j}\,\omega M\,\dot{I}_{1\,\mathrm{M}} + \mathrm{j}\,\omega L_2\,\dot{I}_{2\,\mathrm{M}}$$
  segue
  $$\dot{E}_a - \dot{E}_b = \mathrm{j}\,\omega L_1\,\dot{I}_{1\,\mathrm{M}} + \mathrm{j}\,\omega M\,\dot{I}_{2\,\mathrm{M}}, \qquad \dot{E}_c - \dot{E}_d = \mathrm{j}\,\omega M\,\dot{I}_{1\,\mathrm{M}} + \mathrm{j}\,\omega L_2\,\dot{I}_{2\,\mathrm{M}}$$
  oppure, se gli induttori non sono strettamente accoppiati, da
  $$\dot{I}_{1\,\mathrm{M}} = \frac{\Gamma_1}{\mathrm{j}\,\omega}\,\dot{V}_{1\,\mathrm{M}} + \frac{\Gamma_\mathrm{m}}{\mathrm{j}\,\omega}\,\dot{V}_{2\,\mathrm{M}}, \qquad \dot{I}_{2\,\mathrm{M}} = \frac{\Gamma_\mathrm{m}}{\mathrm{j}\,\omega}\,\dot{V}_{1\,\mathrm{M}} + \frac{\Gamma_2}{\mathrm{j}\,\omega}\,\dot{V}_{2\,\mathrm{M}}$$
  segue
  $$\dot{I}_{1\,\mathrm{M}} = \frac{\Gamma_1}{\mathrm{j}\,\omega}\,(\dot{E}_a - \dot{E}_b) + \frac{\Gamma_\mathrm{m}}{\mathrm{j}\,\omega}\,(\dot{E}_c - \dot{E}_d), \qquad \dot{I}_{2\,\mathrm{M}} = \frac{\Gamma_\mathrm{m}}{\mathrm{j}\,\omega}\,(\dot{E}_a - \dot{E}_b) + \frac{\Gamma_2}{\mathrm{j}\,\omega}\,(\dot{E}_c - \dot{E}_d).$$

Al fine di ridurre il numero delle variabili di risoluzione, il metodo descritto può essere applicato anche a partire da un sottoinsieme dell'insieme dei nodi del circuito e in versioni semplificate, a patto di identificare correttamente gli enti coinvolti (bipoli composti e terminali non-standard, in primo luogo).

Infine, il metodo si estende facilmente al caso dei circuiti in DC o anche dei circuiti adinamici con sorgenti ideali di segnale qualsiasi.

5.8.2 Teoremi di esistenza e di sovrapposizione

Il sistema risolutivo fasoriale a frequenza indefinita di un circuito formato da componenti lineari e sorgenti ideali può porsi nella forma:

$$\boldsymbol{K}(\mathrm{j}\,\omega)\,\dot{\boldsymbol{X}} = \sum_{p=1}^{P} \boldsymbol{k}_{\mathrm{E}_p}(\mathrm{j}\,\omega)\,\dot{V}_{\mathrm{E}_p} + \sum_{q=1}^{Q} \boldsymbol{k}_{\mathrm{J}_q}(\mathrm{j}\,\omega)\,\dot{I}_{\mathrm{J}_q}$$

con:

- $\boldsymbol{K}(\mathrm{j}\,\omega)$ matrice a coefficienti reali dipendenti dai parametri;
- $\boldsymbol{k}_{\mathrm{E}_p}(\mathrm{j}\,\omega)$ e $\boldsymbol{k}_{\mathrm{J}_q}(\mathrm{j}\,\omega)$ vettori a coefficienti reali dipendenti dai parametri;
- $\dot{\boldsymbol{X}}$ vettore delle variabili fasoriali incognite;
- $\dot{V}_{\mathrm{E}_p}$, $\dot{I}_{\mathrm{J}_q}$ variabili fasoriali impressive delle sorgenti ideali di tensione e di corrente, rispettivamente pari a $\dot{V}_{s_p}$, $\dot{I}_{s_q}$.

Grazie a questa struttura valgono i teoremi seguenti.

Teorema di esistenza della soluzione in AC
Un circuito simbolico in AC formato da componenti lineari e sorgenti ideali è risolubile alla frequenza $\bar{\omega}$ sse ivi il rango della matrice di rete e il rango della matrice aumentata sono uguali, ie

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{K}(\mathrm{j}\,\bar{\omega}) = \operatorname{rank}\left[\boldsymbol{K}(\mathrm{j}\,\bar{\omega}) \quad \sum_{p=1}^{P} \boldsymbol{k}_{\mathrm{E}_p}(\mathrm{j}\,\bar{\omega})\,\dot{V}_{s_p} + \sum_{q=1}^{Q} \boldsymbol{k}_{\mathrm{J}_q}(\mathrm{j}\,\bar{\omega})\,\dot{I}_{s_q}\right]$$

ed è univocamente risolubile a tale frequenza sse ivi il rango della matrice di rete è pieno, ovvero sse la matrice di rete è non singolare, ie

$$\det\boldsymbol{K}(\mathrm{j}\,\bar{\omega}) \neq 0.$$

□

Nel caso di univoca risolubilità la soluzione è data da:

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{K}^{-1}(\mathrm{j}\,\bar{\omega})\left(\sum_{p=1}^{P} \boldsymbol{k}_{\mathrm{E}_p}(\mathrm{j}\,\bar{\omega})\,\dot{V}_{\mathrm{E}_p} + \sum_{q=1}^{Q} \boldsymbol{k}_{\mathrm{J}_q}(\mathrm{j}\,\bar{\omega})\,\dot{I}_{\mathrm{J}_q}\right).$$

Teorema di sovrapposizione delle sorgenti isofrequenziali in AC
Sia dato un circuito simbolico in AC a frequenza fissa $\bar{\omega}$ formato da componenti lineari e sorgenti ideali. Allora, esso è univocamente risolubile quando le sorgenti operano congiuntamente se e solo se lo è quando una sorgente (o un gruppo di sorgenti) a scelta opera singolarmente, e, in ipotesi di univoca risolubilità, per ogni variabile, la somma delle risposte alle sorgenti operanti singolarmente (o per gruppi disgiunti complementari) è la risposta alle sorgenti operanti congiuntamente. □

Tutti i risultati ottenuti si estendono facilmente al caso dei circuiti in DC o anche dei circuiti adinamici con sorgenti ideali di segnale qualsiasi.

5.9 Funzioni di rete

Sia dato un circuito in AC a frequenza indefinita formato da componenti lineari e da una sola sorgente ideale (di tensione o di corrente) con variabile impressiva (detta di ingresso) $\dot{X}_{\mathrm{in}}$ (e quindi con variabile x_{in} nel dominio del tempo). Per quanto visto, il sistema risolutivo fasoriale può porsi nella forma:

$$\boldsymbol{K}(\mathrm{j}\,\omega)\,\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{k}(\mathrm{j}\,\omega)\,\dot{X}_{\mathrm{in}}$$

con

- $\boldsymbol{K}(\mathrm{j}\,\omega)$ matrice a coefficienti reali dipendenti dai parametri;
- $\boldsymbol{k}(\mathrm{j}\,\omega)$ vettore a coefficienti reali dipendenti dai parametri;
- $\dot{\boldsymbol{X}}$ vettore delle variabili fasoriali ($\dot{X}_k$) incognite;
- $\dot{X}_{\mathrm{in}}$ variabile fasoriale impressiva della sorgente (di tensione o di corrente).

Il sistema di equazioni nel vettore $\dot{\boldsymbol{X}}/\dot{X}_{\mathrm{in}}$ delle variabili rapporto $\dot{X}_k/\dot{X}_{\mathrm{in}}$ è quindi:

$$\boldsymbol{K}(\mathrm{j}\,\omega)\,\frac{\dot{\boldsymbol{X}}}{\dot{X}_{\mathrm{in}}} = \boldsymbol{k}(\mathrm{j}\,\omega).$$

Questa equazione mostra che se il circuito è univocamente risolubile alla frequenza $\bar{\omega}$, ie se $\det \boldsymbol{K}(\mathrm{j}\,\bar{\omega}) \neq 0$, quale che sia il segnale $s \in S_{\bar{\omega}}$ (non-nullo) assegnato alla variabile impressiva x_{in} e quindi il valore in $K(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ assunto dalla variabile fasoriale $\dot{X}_{\mathrm{in}}$, il valore assunto dalla variabile rapporto $\dot{X}_k/\dot{X}_{\mathrm{in}}$ non cambia, ossia non cambia il rapporto tra il valore in $K(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ assunto dalla variabile fasoriale $\dot{X}_k$ e il valore in $K(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ assunto dalla variabile fasoriale $\dot{X}_{\mathrm{in}}$.

Se U è l'insieme dei valori di frequenza per i quali $\det \boldsymbol{K}(\mathrm{j}\,\omega) \neq 0$, ie

$$U := \{\,\omega \mid \det \boldsymbol{K}(\mathrm{j}\,\omega) \neq 0\,\}$$

allora si può definire una funzione vettoriale della frequenza, denotata, con lieve abuso di notazione, ancora con $\dot{\boldsymbol{X}}/\dot{X}_{\mathrm{in}}$, tramite la formula:

$$\frac{\dot{\boldsymbol{X}}}{\dot{X}_{\mathrm{in}}} : \mathrm{j}\,U \to \mathbf{C}^{\dim \dot{\boldsymbol{X}}}, \qquad \frac{\dot{\boldsymbol{X}}}{\dot{X}_{\mathrm{in}}}(\mathrm{j}\,\omega) = [\boldsymbol{K}(\mathrm{j}\,\omega)]^{-1}\,\boldsymbol{k}(\mathrm{j}\,\omega).$$

La componente di indice k di questo vettore, denotata con $\dot{X}_k/\dot{X}_{\mathrm{in}}$, si dice la funzione di rete relativa alla variabile $\dot{X}_k$. Siccome le equazioni fasoriali di Kirchhoff sono a coefficienti reali costanti, mentre le equazioni costitutive fasoriali dipendono in modo reale da $\mathrm{j}\,\omega$, ogni funzione di rete risulta una funzione reale razionale fratta in $\mathrm{j}\,\omega$, ie un rapporto di polinomi in $\mathrm{j}\,\omega$ a coefficienti reali.

Le proprietà di una specifica funzione di rete vengono studiate mediante i diagrammi della parte reale e immaginaria o del modulo e della fase in funzione della frequenza, o anche mediante il diagramma, detto di Nyquist, relativo alla sua rappresentazione nel piano complesso, con parametro la frequenza.

Molto spesso solo una tensione o una corrente riveste interesse, e, in tal caso, essa viene detta la variabile di uscita e denotata con $\dot{X}_{\mathrm{out}}$ (x_{out} nel dominio del tempo). Spesso, le funzioni di rete vengono indicate con il generico simbolo H, mentre per classi specifiche si usano i seguenti nomi e simboli:

- Trans-impedenza Z_{m} per funzioni di rete del tipo $\dot{V}_{\mathrm{K}}/\dot{I}_{\mathrm{J}}$ con $\dot{V}_{\mathrm{K}} \neq \dot{V}_{\mathrm{J}}$;
- Trans-ammettenza Y_{m} per funzioni di rete del tipo $\dot{I}_{\mathrm{K}}/\dot{V}_{\mathrm{E}}$ con $\dot{I}_{\mathrm{K}} \neq \dot{I}_{\mathrm{E}}$;
- Auto-impedenza o impedenza d'ingresso Z_{in} per funzioni di rete del tipo $\dot{V}_{\mathrm{K}}/\dot{I}_{\mathrm{J}}$ con $\dot{V}_{\mathrm{K}} = \dot{V}_{\mathrm{J}}$, $\dot{I}_{\mathrm{K}} = \dot{I}_{\mathrm{J}}$, essendo $\dot{V}_{\mathrm{J}}$, $\dot{I}_{\mathrm{J}}$ le variabili non associate di una sorgente ideale di corrente e $\dot{V}_{\mathrm{K}}$, $\dot{I}_{\mathrm{K}}$ le variabili associate del bipolo composto K ai suoi capi;
- Auto-ammettenza o ammettenza d'ingresso Y_{in} per funzioni di rete del tipo $\dot{I}_{\mathrm{K}}/\dot{V}_{\mathrm{E}}$ con $\dot{V}_{\mathrm{K}} = \dot{V}_{\mathrm{E}}$, $\dot{I}_{\mathrm{K}} = \dot{I}_{\mathrm{E}}$, essendo $\dot{V}_{\mathrm{E}}$, $\dot{I}_{\mathrm{E}}$ le variabili non associate di una sorgente ideale di tensione e $\dot{V}_{\mathrm{K}}$, $\dot{I}_{\mathrm{K}}$ le variabili associate del bipolo composto K ai suoi capi;
- Rapporto di tensione H_{v} per funzioni di rete del tipo $\dot{V}_{\mathrm{K}}/\dot{V}_{\mathrm{E}}$ con $\dot{V}_{\mathrm{K}} \neq \dot{V}_{\mathrm{E}}$; un caso notevole di rapporto di tensione è quello del partitore di tensione (schema: sorgente di tensione e bipoli H e K in serie con $\dot{V}_{\mathrm{E}} = \dot{V}_{\mathrm{H}} + \dot{V}_{\mathrm{K}}$):

$$H_{\mathrm{v}} := \frac{\dot{V}_{\mathrm{K}}}{\dot{V}_{\mathrm{E}}} = \frac{Z_{\mathrm{K}}}{Z_{\mathrm{H}} + Z_{\mathrm{K}}} = \frac{Y_{\mathrm{H}}}{Y_{\mathrm{H}} + Y_{\mathrm{K}}}.$$

- Rapporto di corrente H_{i} per funzioni di rete del tipo $\dot{I}_{\mathrm{K}}/\dot{I}_{\mathrm{J}}$ con $\dot{I}_{\mathrm{K}} \neq \dot{I}_{\mathrm{J}}$; un caso notevole di rapporto di corrente è quello del partitore di corrente (schema: sorgente di corrente e bipoli H e K in parallelo con $\dot{I}_{\mathrm{J}} = \dot{I}_{\mathrm{H}} + \dot{I}_{\mathrm{K}}$):

$$H_{\mathrm{i}} := \frac{\dot{I}_{\mathrm{K}}}{\dot{I}_{\mathrm{J}}} = \frac{Y_{\mathrm{K}}}{Y_{\mathrm{H}} + Y_{\mathrm{K}}} = \frac{Z_{\mathrm{H}}}{Z_{\mathrm{H}} + Z_{\mathrm{K}}}.$$

Trans-impedenza e trans-ammettenza vengono globalmente indicate col termine trans-immettenze, mentre auto-impedenza e auto-ammettenza vengono globalmente indicate col termine auto-immettenze. Trans-immettenze e auto-immettenze vengono globalmente indicate col termine immettenze.

In ogni caso, evidentemente, se H è la funzione di rete in gioco, da:

$$\dot{X}_{\mathrm{out}} = H\,\dot{X}_{\mathrm{in}}$$

seguono in particolare le relazioni

$$|\,\dot{X}_{\mathrm{out}}\,| = |\,H\,|\,|\,\dot{X}_{\mathrm{in}}\,|, \qquad \angle\dot{X}_{\mathrm{out}} = \angle\dot{X}_{\mathrm{in}} + \angle H.$$

La definizione delle auto-immettenze consente tra l'altro di calcolare l'impedenza o l'ammettenza di un bipolo composto che ne sia dotato, semplicemente alimentandolo con l'opportuna sorgente. Infatti si ha:

$$Z = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} = \frac{\dot{V}}{\dot{I}_{\mathrm{J}}} =: Z_{\mathrm{in}}, \qquad Y = \frac{\dot{I}}{\dot{V}} = \frac{\dot{I}}{\dot{V}_{\mathrm{E}}} =: Y_{\mathrm{in}}.$$

Infine, un'importante definizione correlata al concetto di funzione di rete.

Definizione di risonanza
La variabile fasoriale di uscita $\dot{X}_{\mathrm{out}}$ si dice in risonanza con la variabile fasoriale di ingresso $\dot{X}_{\mathrm{in}}$ sse alla frequenza di lavoro (non nulla) esse sono collineari ed equiorientate. □

Evidentemente, se la funzione di rete in gioco è H, da

$$\dot{X}_{\mathrm{out}} = H\,\dot{X}_{\mathrm{in}}$$

seguono le condizioni:

$$\operatorname{Im} H = 0, \qquad \operatorname{Re} H > 0$$

o

$$\angle H = 0, \qquad |\,H\,| \neq 0$$

che forniscono la frequenza o le frequenze ω_{r} alle quali la risonanza ha luogo. Il caso più frequente è quello in cui le variabili fasoriali coinvolte sono la tensione e la corrente di uno stesso bipolo (risonanza di impedenza o di ammettenza).

5.10 Filtri

Sono circuiti la cui funzione di rete fa sì che ampiezza e fase della variabile fasoriale di uscita siano alterate in un modo voluto rispetto ad ampiezza e fase della variabile fasoriale di ingresso. Un filtro si dice ideale sse il segnale in uscita è un'esatta replica del segnale in ingresso (a meno di un fattore di scala e di un ritardo), se la pulsazione di lavoro ricade in un certo intervallo (o unione di intervalli) di frequenze, detto banda passante e denotato B_{p} con ampiezza $B_{\angle}$, ed è nullo se tale frequenza ricade nell'intervallo (o unione di intervalli) di frequenze complementare, detto banda interdetta e denotato B_{c} con ampiezza $B_{\angle}$. Gli estremi del k-esimo intervallo della banda passante o della banda interdetta sono detti frequenza di taglio inferiore e superiore e denotati $\omega_{\mathrm{t}_k^-}$ e $\omega_{\mathrm{t}_k^+}$, rispettivamente. Se $0 < \omega_{\mathrm{t}_k^-} < \omega_{\mathrm{t}_k^+} < \infty$, allora la media aritmetica delle frequenze di taglio è detta frequenza centrale e denotata ω_{c_k}, ie

$$\omega_{\mathrm{c}_k} := \frac{\omega_{\mathrm{t}_k^-} + \omega_{\mathrm{t}_k^+}}{2}.$$

Un filtro ideale si dice:

- passa-basso sse la banda passante consta di un solo intervallo con

$$0 = \omega_{t^-} < \omega_{t^+} < \infty$$

- passa-alto sse la banda passante consta di un solo intervallo con

$$0 < \omega_{t^-} < \omega_{t^+} = \infty$$

- passa-banda sse la banda passante consta di un solo intervallo con

$$0 < \omega_{t^-} < \omega_{t^+} < \infty$$

- taglia-banda sse la banda interdetta consta di un solo intervallo con

$$0 < \omega_{t^-} < \omega_{t^+} < \infty.$$

Queste condizioni implicano che la funzione di rete dei filtri ideali debba avere modulo costante non nullo entro la banda passante e nullo entro la banda interdetta, e fase lineare con la frequenza entro la banda passante. Si può dimostrare che funzioni di rete cosiffatte non sono fisicamente realizzabili, anche se sono approssimabili tanto strettamente quanto desiderato. Quindi è necessario rilassare le condizioni poste. I filtri cosiddetti reali dei quattro tipi suddetti hanno funzioni di rete che realizzano approssimativamente lgli andamenti di modulo e fase ideali. La banda passante di questi filtri è definita allora come l'intervallo di frequenze entro cui il rapporto tra il modulo e l'estremo superiore del modulo stesso (unitario nei filtri ideali) rimane al di sopra di un prefissato scostamento relativo. Tipicamente, per convenzione, il valore ammesso per tale scostamento relativo è pari a $1/\sqrt{2} = 0,707$ (ma altri valori sono pure usati), e la banda in questione si chiama la banda di mezza potenza o a tre decibel (scritto anche db e pronunciato dibì).

5.10.1 Filtro passa-basso in tensione - RC serie

Il filtro in esame qui è il più semplice schema che realizzi un comportamento di tipo passa-basso. La sua funzione di rete è data da:

$$H_v := \frac{\dot{V}_C}{\dot{V}_E}, \qquad H_v(j\,\omega) = \frac{\dfrac{1}{j\,\omega C}}{R + \dfrac{1}{j\,\omega C}} = \frac{1}{1 + j\,\omega RC}$$

per cui:

$$|H_v(j\,\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}, \qquad \angle H_v(j\,\omega) = -\arctan(\omega RC).$$

Diagrammi di modulo e fase.

Per ricavare il diagramma di Nyquist di H_v, si consideri l'inverso della funzione di rete e si razionalizzi l'espressione ottenuta. Risulta in sequenza:

$$\frac{\mathrm{Re}\,H_v - j\ \mathrm{Im}\,H_v}{\mathrm{Re}^2\,H_v + \mathrm{Im}^2\,H_v} = 1 + j\,\omega RC$$

$$\frac{\mathrm{Re}\,H_v}{\mathrm{Re}^2\,H_v + \mathrm{Im}^2\,H_v} = 1, \qquad \frac{-\,\mathrm{Im}\,H_v}{\mathrm{Re}^2\,H_v + \mathrm{Im}^2\,H_v} = \omega RC$$

$$\mathrm{Re}^2\,H_v + \mathrm{Im}^2\,H_v = \mathrm{Re}\,H_v, \qquad \mathrm{Im}\,H_v \leqslant 0$$

ossia:

$$\left(\mathrm{Re}\,H_v - \frac{1}{2}\right)^2 + \mathrm{Im}^2\,H_v = \frac{1}{4}, \qquad \mathrm{Im}\,H_v \leqslant 0$$

che è l'equazione della parte inferiore della circonferenza di raggio 1/2 e centro in (1/2, 0), tarata in senso orario.

La banda passante è definita dall'equazione:

$$|H_\mathrm{v}(\mathrm{j}\,\omega)| = \frac{\sup_\omega |H_\mathrm{v}(\mathrm{j}\,\omega)|}{\sqrt{2}} \qquad \text{ossia} \qquad \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

da cui

$$\omega_{\mathrm{t}^+} = \frac{1}{R\,C}, \qquad B_\angle = \frac{1}{R\,C}.$$

Considerazioni sul segnale di uscita.

Filtro passa-basso in corrente - RL parallelo

La funzione di rete è data da:

$$H_\mathrm{i} := \frac{\dot I_\mathrm{L}}{\dot I_\mathrm{J}}, \qquad H_\mathrm{i}(\mathrm{j}\,\omega) = \frac{\dfrac{1}{\mathrm{j}\,\omega L}}{G + \dfrac{1}{\mathrm{j}\,\omega L}} = \frac{1}{1+\mathrm{j}\,\omega G L}$$

per cui l'analisi prosegue in modo similare.

5.10.2 Filtro passa-alto in tensione - RC serie

Il filtro in esame qui è il più semplice schema che realizzi un comportamento di tipo passa-alto. La sua funzione di rete è data da:

$$H_\mathrm{v} := \frac{\dot V_\mathrm{R}}{\dot V_\mathrm{E}}, \qquad H_\mathrm{v}(\mathrm{j}\,\omega) = \frac{R}{R + \dfrac{1}{\mathrm{j}\,\omega C}} = \frac{\mathrm{j}\,\omega RC}{1+\mathrm{j}\,\omega RC}.$$

Risulta:

$$|H_\mathrm{v}(\mathrm{j}\,\omega)| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}, \qquad \angle H_\mathrm{v}(\mathrm{j}\,\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\omega RC).$$

Diagrammi di modulo e fase.

Per ricavare il diagramma di Nyquist di H_v, si consideri l'inverso della funzione di rete e si razionalizzi l'espressione ottenuta. Risulta in sequenza:

$$\frac{\mathrm{Re}\,H_\mathrm{v} - \mathrm{j}\ \mathrm{Im}\,H_\mathrm{v}}{\mathrm{Re}^2\,H_\mathrm{v} + \mathrm{Im}^2\,H_\mathrm{v}} = 1 + \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega RC}$$

$$\frac{\mathrm{Re}\,H_\mathrm{v}}{\mathrm{Re}^2\,H_\mathrm{v} + \mathrm{Im}^2\,H_\mathrm{v}} = 1, \qquad \frac{\mathrm{Im}\,H_\mathrm{v}}{\mathrm{Re}^2\,H_\mathrm{v} + \mathrm{Im}^2\,H_\mathrm{v}} = \frac{1}{\omega RC}$$

$$\mathrm{Re}^2\,H_\mathrm{v} + \mathrm{Im}^2\,H_\mathrm{v} = \mathrm{Re}\,H_\mathrm{v}, \qquad \mathrm{Im}\,H_\mathrm{v} \geqslant 0$$

ossia

$$\left(\mathrm{Re}\,H_v - \frac{1}{2}\right)^2 + \mathrm{Im}^2\,H_v = \frac{1}{4}, \qquad \mathrm{Im}\,H_v \geqslant 0$$

che è l'equazione della parte superiore della circonferenza di raggio 1/2 e centro in (1/2, 0), tarata in senso orario.

La banda passante è definita dall'equazione:

$$|H_\mathrm{v}(\mathrm{j}\,\omega)| = \frac{\sup_\omega |H_\mathrm{v}(\mathrm{j}\,\omega)|}{\sqrt{2}} \qquad \text{ossia} \qquad \frac{\omega RC}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

da cui

$$\omega_{\mathrm{t}^-} = \frac{1}{R\,C}, \qquad B_\angle = \frac{1}{R\,C}.$$

Considerazioni sul segnale di uscita.

Filtro passa-alto in corrente - RL parallelo

La funzione di rete è data da:

$$H_{\mathrm{i}} := \frac{\dot{I}_{\mathrm{R}}}{\dot{I}_{\mathrm{J}}}, \qquad H_{\mathrm{i}}(\mathrm{j}\,\omega) = \frac{G}{G + \dfrac{1}{\mathrm{j}\,\omega L}} = \frac{\mathrm{j}\,\omega GL}{1 + \mathrm{j}\,\omega GL}$$

per cui l'analisi prosegue in modo similare.

5.10.3 Filtro passa-banda in tensione - RLC serie

Il filtro in esame qui è il più semplice schema che realizzi un comportamento di tipo passa-banda. La sua funzione di rete è data da:

$$H_{\mathrm{v}} := \frac{\dot{V}_{\mathrm{R}}}{\dot{V}_{\mathrm{E}}}, \qquad H_{\mathrm{v}}(\mathrm{j}\,\omega) = \frac{R}{R + \mathrm{j}\,\omega L + \dfrac{1}{\mathrm{j}\,\omega C}}.$$

Usando come parametri di normalizzazione la frequenza che annulla la parte immaginaria del denominatore e il fattore di qualità, ie

$$\omega_{\mathrm{n}} := \frac{1}{\sqrt{LC}}, \qquad Q := \frac{\omega_{\mathrm{n}} L}{R}$$

si ha:

$$H_{\mathrm{v}}(\mathrm{j}\,\omega) = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\,Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_{\mathrm{n}}} - \dfrac{\omega_{\mathrm{n}}}{\omega}\right)}$$

$$|H_{\mathrm{v}}(\mathrm{j}\,\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_{\mathrm{n}}} - \dfrac{\omega_{\mathrm{n}}}{\omega}\right)^2}}, \qquad \angle H_{\mathrm{v}}(\mathrm{j}\,\omega) = -\arctan Q\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{n}}} - \frac{\omega_{\mathrm{n}}}{\omega}\right).$$

Diagrammi di modulo e fase.
È interessante a questo punto considerare anche le funzioni di rete

$$H_{\mathrm{L}} := \frac{\dot{V}_{\mathrm{L}}}{\dot{V}_{\mathrm{E}}}, \qquad H_{\mathrm{L}} := \frac{\dot{V}_{\mathrm{C}}}{\dot{V}_{\mathrm{E}}}$$

che in forma normalizzata sono date da

$$H_{\mathrm{L}}(\mathrm{j}\,\omega) = \frac{\mathrm{j}\,Q\,\dfrac{\omega}{\omega_{\mathrm{n}}}}{1 + \mathrm{j}\,Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_{\mathrm{n}}} - \dfrac{\omega_{\mathrm{n}}}{\omega}\right)}, \qquad H_{\mathrm{C}}(\mathrm{j}\,\omega) = \frac{-\mathrm{j}\,Q\,\dfrac{\omega_{\mathrm{n}}}{\omega}}{1 + \mathrm{j}\,Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_{\mathrm{n}}} - \dfrac{\omega_{\mathrm{n}}}{\omega}\right)}$$

e osservare che per $\omega = \omega_{\mathrm{n}}$ si ha

$$H_{\mathrm{v}}(\mathrm{j}\,\omega_{\mathrm{n}}) = 1, \qquad H_{\mathrm{L}}(\mathrm{j}\,\omega_{\mathrm{n}}) = \mathrm{j}\,Q, \qquad H_{\mathrm{C}}(\mathrm{j}\,\omega_{\mathrm{n}}) = -\mathrm{j}\,Q$$

e quindi

$$\dot{V}_{\mathrm{R}} = \dot{V}_{\mathrm{E}}, \qquad \dot{V}_{\mathrm{L}} = \mathrm{j}\,Q\,\dot{V}_{\mathrm{E}}, \qquad \dot{V}_{\mathrm{C}} = -\mathrm{j}\,Q\,\dot{V}_{\mathrm{E}}.$$

Questo significa che alla pulsazione ω_n la tensione della sorgente si ritrova tutta sul resistore, mentre sul condensatore e sull'induttore insistono tensioni opposte di ampiezza molto elevata se il Q è grande (pericolo).

Per ricavare il diagramma di Nyquist di H_{v}, si consideri l'inverso della funzione di rete e si razionalizzi l'espressione ottenuta. Risulta in sequenza:

$$\frac{\mathrm{Re}\,H_{\mathrm{v}} - \mathrm{j}\,\mathrm{Im}\,H_{\mathrm{v}}}{\mathrm{Re}^2\,H_{\mathrm{v}} + \mathrm{Im}^2\,H_{\mathrm{v}}} = 1 + \mathrm{j}\,Q\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{n}}} - \frac{\omega_{\mathrm{n}}}{\omega}\right)$$

$$\frac{\operatorname{Re} H_v}{\operatorname{Re}^2 H_v + \operatorname{Im}^2 H_v} = 1, \qquad \frac{-\operatorname{Im} H_v}{\operatorname{Re}^2 H_v + \operatorname{Im}^2 H_v} = Q\left(\frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega_n}{\omega}\right)$$

$$\operatorname{Re}^2 H_v + \operatorname{Im}^2 H_v = \operatorname{Re} H_v$$

ossia:

$$\left(\operatorname{Re} H_v - \frac{1}{2}\right)^2 + \operatorname{Im}^2 H_v = \frac{1}{4}$$

che è l'equazione della circonferenza di raggio 1/2 e centro in (1/2, 0), tarata da (0, 0) a (0, 0) in senso orario.

La banda passante è definita dall'equazione:

$$|H_v(\mathrm{j}\,\omega)| = \frac{\sup_\omega |H_v(\mathrm{j}\,\omega)|}{\sqrt{2}} \qquad \text{ossia} \qquad \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega_n}{\omega}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Da questa segue:

$$Q\left(\frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega_n}{\omega}\right) = \pm 1, \qquad \omega^2 \pm \frac{\omega_n}{Q}\,\omega - \omega_n^2 = 0$$

$$\omega_{t^\pm} = \left(\sqrt{1 + \frac{1}{Q^2}} \pm \frac{1}{2Q}\right)\omega_n \approx \left(1 \pm \frac{1}{2Q}\right)\omega_n$$

$$\omega_c = \sqrt{1 + \frac{1}{Q^2}}\;\omega_n \approx \left(1 + \frac{1}{2Q^2}\right)\omega_n \approx \omega_n$$

$$B_\angle = \frac{\omega_n}{Q}.$$

Considerazioni sul segnale di uscita.

Filtro passa-banda in corrente - RLC parallelo

La funzione di rete è data da:

$$H_i := \frac{\dot{I}_R}{\dot{I}_J}, \qquad H_i(\mathrm{j}\,\omega) = \frac{G}{G + \mathrm{j}\,\omega C + \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega L}}.$$

Usando come parametri di normalizzazione la frequenza di risonanza (che annulla la parte immaginaria del denominatore) e il fattore di qualità, ie

$$\omega_n := \frac{1}{\sqrt{LC}}, \qquad Q := \frac{\omega_n C}{G}$$

si ha:

$$H_i(\mathrm{j}\,\omega) = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\,Q\left(\frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega_n}{\omega}\right)}$$

per cui l'analisi prosegue in modo similare.

5.10.4 Filtro taglia-banda in tensione - LC parallelo, R serie

Il filtro in esame qui è il più semplice schema che realizzi un comportamento di tipo taglia-banda. La sua funzione di rete è data da:

$$H_{\mathrm{v}} := \frac{\dot{V}_{\mathrm{R}}}{\dot{V}_{\mathrm{E}}}, \qquad H_{\mathrm{v}}(\mathrm{j}\,\omega) = \frac{\mathrm{j}\,\omega C + \dfrac{1}{\mathrm{j}\,\omega L}}{G + \mathrm{j}\,\omega C + \dfrac{1}{\mathrm{j}\,\omega L}}.$$

Usando come parametri di normalizzazione la frequenza che annulla la parte immaginaria del numeratore e del denominatore e il fattore di qualità, ie

$$\omega_{\mathrm{n}} := \frac{1}{\sqrt{LC}}, \qquad Q := \frac{\omega_{\mathrm{n}} C}{G}$$

si ha:

$$H_{\mathrm{v}}(\mathrm{j}\,\omega) = \frac{\mathrm{j}\,Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_{\mathrm{n}}} - \dfrac{\omega_{\mathrm{n}}}{\omega}\right)}{1 + \mathrm{j}\,Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_{\mathrm{n}}} - \dfrac{\omega_{\mathrm{n}}}{\omega}\right)}$$

$$|H_{\mathrm{v}}(\mathrm{j}\,\omega)| = \frac{Q\left|\dfrac{\omega}{\omega_{\mathrm{n}}} - \dfrac{\omega_{\mathrm{n}}}{\omega}\right|}{\sqrt{1 + Q^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_{\mathrm{n}}} - \dfrac{\omega_{\mathrm{n}}}{\omega}\right)^2}}$$

$$\angle H_{\mathrm{v}}(\mathrm{j}\,\omega) = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{n}}} - \frac{\omega_{\mathrm{n}}}{\omega}\right) - \arctan Q\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{n}}} - \frac{\omega_{\mathrm{n}}}{\omega}\right).$$

Diagrammi di modulo e fase.
Per ricavare il diagramma di Nyquist di H_{v}, si consideri l'inverso della funzione di rete e si razionalizzi l'espressione ottenuta. Risulta in sequenza:

$$\frac{\mathrm{Re}\,H_{\mathrm{v}} - \mathrm{j}\ \mathrm{Im}\,H_{\mathrm{v}}}{\mathrm{Re}^2\ H_{\mathrm{v}} + \mathrm{Im}^2\ H_{\mathrm{v}}} = 1 + \frac{1}{\mathrm{j}\,Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_{\mathrm{n}}} - \dfrac{\omega_{\mathrm{n}}}{\omega}\right)}$$

$$\frac{\mathrm{Re}\,H_{\mathrm{v}}}{\mathrm{Re}^2\ H_{\mathrm{v}} + \mathrm{Im}^2\ H_{\mathrm{v}}} = 1, \qquad \frac{\mathrm{Im}\,H_{\mathrm{v}}}{\mathrm{Re}^2\ H_{\mathrm{v}} + \mathrm{Im}^2\ H_{\mathrm{v}}} = \frac{1}{Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_{\mathrm{n}}} - \dfrac{\omega_{\mathrm{n}}}{\omega}\right)}$$

$$\mathrm{Re}^2\,H_{\mathrm{v}} + \mathrm{Im}^2\,H_{\mathrm{v}} = \mathrm{Re}\,H_{\mathrm{v}}$$

ossia:

$$\left(\mathrm{Re}\,H_{\mathrm{v}} - \frac{1}{2}\right)^2 + \mathrm{Im}^2\,H_{\mathrm{v}} = \frac{1}{4}$$

che è l'equazione della circonferenza di raggio 1/2 e centro in (1/2, 0), tarata da (1, 0) a (1, 0) in senso orario.

La banda interdetta è definita dall'equazione:

$$|H_{\mathrm{v}}(\mathrm{j}\,\omega)| = \frac{\sup_{\omega} |H_{\mathrm{v}}(\mathrm{j}\,\omega)|}{\sqrt{2}} \qquad \text{ossia} \qquad \frac{Q\left|\dfrac{\omega}{\omega_{\mathrm{n}}} - \dfrac{\omega_{\mathrm{n}}}{\omega}\right|}{\sqrt{1 + Q^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_{\mathrm{n}}} - \dfrac{\omega_{\mathrm{n}}}{\omega}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Da questa segue:

$$Q\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{n}}} - \frac{\omega_{\mathrm{n}}}{\omega}\right) = \pm 1, \qquad \omega^2 \pm \frac{\omega_{\mathrm{n}}}{Q}\,\omega - \omega_{\mathrm{n}}^2 = 0$$

$$\omega_{\mathrm{t}^{\pm}} = \left(\sqrt{1 + \frac{1}{Q^2}} \pm \frac{1}{2Q} \right) \omega_{\mathrm{n}} \approx \left(1 \pm \frac{1}{2Q} \right) \omega_{\mathrm{n}}$$

$$\omega_{\mathrm{c}} = \sqrt{1 + \frac{1}{Q^2}} \; \omega_{\mathrm{n}} \approx \left(1 + \frac{1}{2Q^2} \right) \omega_{\mathrm{n}} \approx \omega_{\mathrm{n}}$$

$$B_{\angle} = \frac{\omega_{\mathrm{n}}}{Q}.$$

Considerazioni sul segnale di uscita.

Filtro taglia-banda in corrente - LC serie, G parallelo

La sua funzione di rete è data da:

$$H_{\mathrm{i}} := \frac{\dot{I}_{\mathrm{G}}}{\dot{I}_{\mathrm{J}}}, \qquad H_{\mathrm{i}}(\mathrm{j}\,\omega) = \frac{\mathrm{j}\,\omega L + \dfrac{1}{\mathrm{j}\,\omega C}}{R + \mathrm{j}\,\omega L + \dfrac{1}{\mathrm{j}\,\omega C}}.$$

Usando come parametri di normalizzazione la frequenza che annulla la parte immaginaria del numeratore e del denominatore e il fattore di qualità, ie

$$\omega_{\mathrm{n}} := \frac{1}{\sqrt{LC}}, \qquad Q := \frac{\omega_{\mathrm{n}} L}{R}$$

si ha:

$$H_{\mathrm{i}}(\mathrm{j}\,\omega) = \frac{\mathrm{j}\;Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_{\mathrm{n}}} - \dfrac{\omega_{\mathrm{n}}}{\omega}\right)}{1 + \mathrm{j}\;Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_{\mathrm{n}}} - \dfrac{\omega_{\mathrm{n}}}{\omega}\right)}$$

per cui l'analisi prosegue in modo similare.

5.11 Funzionamento multifrequenziale

Un circuito soggetto a sorgenti ideali con segnale multi-sinusoidale (periodico o meno) alle frequenze $\bar{\omega}_1, \ldots, \bar{\omega}_N$ si dice:

- risolubile in modo multifrequenziale se e solo se è dotato di soluzione multisinusoidale alle frequenze $\bar{\omega}_1, \ldots, \bar{\omega}_N$;
- risolubile nel modo monofrequenziale a frequenza $\bar{\omega}_n$ se e solo se è dotato di soluzione sinusoidale a frequenza $\bar{\omega}_n$ quando le sorgenti operano erogando solo le componenti a frequenza $\bar{\omega}_n$ dei loro segnali.

Detto H il numero di incognite del sistema di equazioni del circuito, se

$$\sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{s}^{\bar{\omega}_n}, \qquad \boldsymbol{s}^{\bar{\omega}_n} \in (S_{\bar{\omega}_n})^H$$

è una soluzione in modo multifrequenziale, allora i vettori

$$\boldsymbol{s}^{\bar{\omega}_n} \qquad n = 1, \ldots, N$$

si dicono le componenti di tale soluzione. Viceversa, se

$$\boldsymbol{s}^{\bar{\omega}_n}, \qquad \boldsymbol{s}^{\bar{\omega}_n} \in (S_{\bar{\omega}_n})^H \qquad n = 1, \ldots, N$$

sono soluzioni nei modi monofrequenziali, allora il vettore

$$\sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{s}^{\bar{\omega}_n}$$

si dice la somma di tali soluzioni.

Sussiste in proposito il seguente teorema.

Teorema di sovrapposizione delle sorgenti multifrequenziali
Sia dato un circuito formato da componenti lineari tempo-invarianti e da sorgenti ideali con segnale multi-sinusoidale (periodico o meno) alle frequenze $\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_N$. Allora, il circuito è univocamente risolubile in modo multifrequenziale se e solo se lo è in tutti i modi monofrequenziali, e, in tali ipotesi, le componenti della soluzione in modo multifrequenziale sono le soluzioni nei modi monofrequenziali e la somma delle soluzioni nei modi monofrequenziali è la soluzione in modo multifrequenziale. □

Una soluzione in modo multifrequenziale e l'insieme delle N soluzioni nei modi monofrequenziali originate dalle sue componenti, ovvero l'insieme di N soluzioni nei modi monofrequenziali e la soluzione in modo multifrequenziale originata dalla loro somma si dicono associati.

Ovviamente, le soluzioni monofrequenziali citate nel teorema possono essere calcolate mediante gli N circuiti simbolici in AC a frequenza fissa. Basta costruire i vettori dei fasori associati ai vettori $\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}^{\bar{\omega}_n}$ e $\boldsymbol{i}_{\mathrm{s}}^{\bar{\omega}_n}$:

$$\dot{\boldsymbol{V}}_{\mathrm{s}}^{\bar{\omega}_n} := \begin{bmatrix} \dot{V}_{\mathrm{s}_1}^{\bar{\omega}_n} \\ \vdots \\ \dot{V}_{\mathrm{s}_H}^{\bar{\omega}_n} \end{bmatrix}, \qquad \dot{\boldsymbol{I}}_{\mathrm{s}}^{\bar{\omega}_n} := \begin{bmatrix} \dot{I}_{\mathrm{s}_1}^{\bar{\omega}_n} \\ \vdots \\ \dot{I}_{\mathrm{s}_K}^{\bar{\omega}_n} \end{bmatrix} \qquad n = 1, \dots, N$$

e risolvere gli N sistemi:

$$\boldsymbol{P}(\mathrm{j}\,\bar{\omega}_n)\,\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{P}_{\mathrm{E}}(\mathrm{j}\,\bar{\omega}_n)\,\dot{\boldsymbol{V}}_{\mathrm{s}}^{\bar{\omega}_n} + \boldsymbol{P}_{\mathrm{J}}(\mathrm{j}\,\bar{\omega}_n)\,\dot{\boldsymbol{I}}_{\mathrm{s}}^{\bar{\omega}_n} \qquad n = 1, \dots, N.$$

Relazione con i filtri: spettri di ampiezza e di fase in ingresso e in uscita.

Teorema di addività della potenza media in funzionamento multi-sinusoidale
Sia dato un circuito formato da componenti lineari tempo-invarianti e da sorgenti ideali con segnale multi-sinusoidale periodico e una soluzione in modo multifrequenziale e un insieme di soluzioni nei modi monofrequenziali associate. Allora, la potenza media assorbita da un bipolo nell'ambito della soluzione in modo multifrequenziale e la somma delle potenze medie assorbite dal bipolo stesso nell'ambito delle soluzioni nei modi monofrequenziali sono uguali. □

Il teorema si estende facilmente al caso del funzionamento mono- o multi-sinusoidale con componente continua, periodico o quasi periodico.

Appendice A

Nozioni di Analisi

A.1 Insiemi di funzioni

Gli insiemi di funzioni considerati in questa Appendice sono, con un'unica eccezione (ossia $K(\mathbf{R},\mathbf{C})$, si veda oltre), sottoinsiemi dell'insieme delle funzioni reali definite quasi ovunque in $\mathbf{R}$, ossia di $\mathbf{R}^{\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}}$. Conviene ricordare che in quest'ultimo insieme sono definite operazioni di moltiplicazione per uno scalare e di somma in base alle regole seguenti valide per ogni $r \in \mathbf{R}$ e ogni $f, g \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}}$

$$\mathrm{dom}(r\,f) := \mathrm{dom}\, f, \qquad (r\,f)(x) := r\,f(x)$$

$$\mathrm{dom}(f+g) := \mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, g, \qquad (f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

e che $\mathbf{R}^{\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}}$ è chiuso rispetto a tali operazioni ma non è uno spazio vettoriale reale.

Per semplificare la notazione, nel seguito, si indicherà con:

- $\mathrm{dom}\, f$ il dominio di $f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}}$;
- $\mathrm{doc}\, f$ il complemento del dominio di $f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}}$, ossia $\mathrm{doc}\, f := \mathbf{R} \setminus \mathrm{dom}\, f$;
- $\mathrm{dom}_{\mathrm{c}}\, f$ il dominio di continuità di $f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}}$;
- $\mathrm{doc}_{\mathrm{c}}\, f$ il complemento del dominio di continuità di $f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}}$, ossia $\mathrm{doc}_{\mathrm{c}}\, f := \mathbf{R} \setminus \mathrm{dom}_{\mathrm{c}}\, f$;
- $f(x^-), f(x^+)$ il limite sinistro e destro di $f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}}$ in $x \in \mathbf{R}$;
- $\mathbb{S}$ l'insieme dei sottoinsiemi di $\mathbf{R}$ privi di punti di accumulazione.

Il lettore sicuramente conoscerà gli insiemi:

- $C_{\mathrm{pw}}(\mathbf{R},\mathbf{R})$, che consiste delle funzioni $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue a tratti di tipo lag≠lad (*limite à gauche* diverso da *limite à droite*), ovvero tali che:
  - $\mathrm{dom}\, f = \mathbf{R}$;
  - $\mathrm{doc}_{\mathrm{c}}\, f \in \mathbb{S}$;
  - $\forall x \in \mathrm{doc}_{\mathrm{c}}\, f \quad \mathbf{R} \ni f(x^-) \neq f(x^+) \in \mathbf{R}$;
- $C^n(\mathbf{R},\mathbf{R})$, che consiste delle funzioni $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ n volte differenziabili con continuità (ossia delle funzioni $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue con le loro derivate sino all'ordine n compreso);
- $K(\mathbf{R},\mathbf{R})$, che consiste delle funzioni $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ costanti;
- $K(\mathbf{R},\mathbf{C})$, che consiste delle funzioni $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ costanti.

Probabilmente, invece, non conoscerà questi altri insiemi:

- $C^{=}(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}},\mathbf{R})$, che consiste delle funzioni reali f definite a tratti quasi-regolari, ovvero tali che:
  - $\mathrm{doc}\, f \in \mathbb{S}$;

  - f è continua in dom f;
  - $\forall x \in \mathrm{doc}\, f \quad f(x^-), f(x^+) \in \mathbf{R}$;

- $C^-(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R})$, che consiste delle funzioni reali f definite a tratti regolari, ovvero tali che:
  - doc $f \in \mathbb{S}$;
  - f è continua in dom f;
  - $\forall x \in \mathrm{doc}\, f \quad \mathbf{R} \ni f(x^-) \neq f(x^+) \in \mathbf{R}$;
- $C^=_\infty(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R})$, che consiste di quelle funzioni di $C^=(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R})$ le cui derivate di ogni ordine appartengono a $C^=(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R})$;
- $C^-_\infty(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R})$, che consiste di quelle funzioni di $C^-(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R})$ le cui derivate di ogni ordine appartengono a $C^=(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R})$;
- $C^n_\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, che consiste di quelle funzioni di $C^n(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ le cui derivate di ogni ordine appartengono a $C^=(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R})$.

Evidentemente, in virtù delle definizioni, risulta:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
C^=(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R}) & \supset & C^-(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R}) & \supset & C^0(\mathbf{R}, \mathbf{R}) & \supset & C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}) & \supset & \cdots & \supset & C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \\
\supset & & \supset & & \supset & & \supset & & \cdots & & = \\
C^=_\infty(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R}) & \supset & C^-_\infty(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R}) & \supset & C^0_\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}) & \supset & C^1_\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}) & \supset & \cdots & \supset & C^\infty_\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}).
\end{array}
$$

Occorre distinguere bene gli insiemi citati, specialmente $C^=_\infty(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R})$, $C^-_\infty(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R})$ e $C_{\mathrm{pw}}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Un esempio importante di funzione appartenente a $C^=_\infty(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R})$ ma non a $C^-_\infty(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R})$ né a $C_{\mathrm{pw}}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ è la funzione 0_S, detta nulla ovunque fuor di S, con $S \in \mathbb{S}$, definita da:

$$0_S : \mathbf{R} \backslash S \to \mathbf{R}, \qquad 0_S(x) := 0.$$

Nel complesso le funzioni di questo tipo sono dette funzioni quasi nulle; tra loro meritano un cenno la funzione nulla ovunque fuor di $\{0\}$, $0_{\{0\}}$, e la funzione nulla ovunque fuor di o quasi nulla banale $0_\emptyset$, che coincide con la consueta funzione nulla 0.

Un esempio importante di funzione appartenente a $C^-_\infty(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R})$ ma non a $C_{\mathrm{pw}}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ è la funzione u, detta gradino unitario (o di Heavyside), definita da:

$$\mathrm{u} : \mathbf{R} \backslash \{0\} \to \mathbf{R}, \qquad \mathrm{u}(x) := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}.$$

Una funzione simile a u ma appartenente a $C_{\mathrm{pw}}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ e non a $C^-_\infty(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R})$ è invece la funzione $\mathrm{u_c}$, detta gradino unitario dei comunicazionisti, definita da:

$$\mathrm{u_c} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad \mathrm{u_c}(x) := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}.$$

Si usano a volte anche funzioni "gradino" definite nel punto $x = 0$ con valore pari a 0 o 1. Comunque, è evidente che nessuna di queste funzioni appartiene a $C^-_\infty(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R})$, ma tutte appartengono a $C_{\mathrm{pw}}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Per brevità di notazione, conviene definire anche un gradino ausiliario $\mathrm{u_a}$ che assume il significato di u o di u_c a seconda che la funzione $f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$, non meglio specificata, per cui il gradino stesso sia moltiplicato, abbia nel punto $x = 0$ valore nonnullo o nullo (ad esempio, $f\,\mathrm{u_a}$ varrà di fatto $f\,\mathrm{u}$ se $f = \cos$, mentre varrà $f\,\mathrm{u_c}$ se $f = \sin$).

Infine un esempio importante di funzione appartenente a $C^0_\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ è la funzione r, detta rampa lineare unitaria, definita da:

$$\mathrm{r} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad \mathrm{r}(x) := \begin{cases} 0 & x \leqslant 0 \\ x & x > 0. \end{cases}$$

Spesso, per comodità, il suo valore puntuale sarà espresso piuttosto come

$$\mathrm{r}(x) = x\,\mathrm{u_c}(x).$$

Infine, un'osservazione importante e sottile sulla notazione, che converrà introdurre tramite un semplice esempio. Si consideri la banalissima equazione tra le variabili x e y in $C^{-}_{\infty}(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R})$

$$x = y.$$

Le sue soluzioni sono ovviamente della forma $(x = f,\ y = f)$ per ogni $f \in C^{-}_{\infty}(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R})$. Si ponga il problema di determinarne la forma implicita equivalente. La congettura più ovvia

$$x - y = 0$$

si rivela subito errata. Infatti, la coppia $(x = \mathrm{u},\ y = \mathrm{u})$ è soluzione della prima equazione ma non della seconda, poiché la sostituzione fornisce rispettivamente le due equazioni tra funzioni:

$$\mathrm{u} = \mathrm{u}$$

certamente vera e

$$\mathrm{u} - \mathrm{u} = 0$$

certamente falsa poiché

$$\mathrm{u} - \mathrm{u} = 0_{\{0\}}.$$

D'altronde, la congettura successiva

$$x - y = 0_{\{0\}}$$

è ugualmente errata, poiché il suo insieme di soluzioni esclude tutte le coppie $(x = f,\ y = f)$ con $\operatorname{doc} f \neq \{0\}$ che pure sono soluzioni dell'equazione iniziale. Si comprende allora che la versione corretta è invece

$$x - y = 0_S \qquad \exists S \in \mathbb{S}$$

più spesso e più in generale scritta nella forma

$$x - y = 0 \qquad \text{q.o.}$$

ove "q.o." sta per "quasi ovunque", e significa che l'eguaglianza è sì verificata ma con l'eventuale eccezione di un insieme di punti, sottoinsieme di $\mathbf{R}$, di misura nulla.

Tuttavia, in questo come in tutti i casi consimili in cui ricorra la versione implicita di una equazione tra variabili in $C^{-}_{\infty}(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R})$, laddove il contesto non possa dare adito a dubbi, per chiarezza e semplicità, a fronte della corretta formulazione testuale "nullo quasi ovunque", si userà comunque la notazione convenzionale "= 0".

A.2 Calcolo integrodifferenziale in $C^{-}_{\infty}(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R})$

È necessario porre in evidenza alcune peculiarità del calcolo integrodifferenziale in $C^{-}_{\infty}(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R})$ rispetto a quello in $C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ e in $C_{\mathrm{pw}}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. A questo scopo, con riferimento a una generica funzione $f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}}$, si indichi con:

- Df la derivata classica di f;
- $\int_r f$ l'integrale di f con punto iniziale $r \in \mathbf{R}$;
- $D^{-1} f$ l'insieme delle primitive di f, ie

$$D^{-1} f := \{ F \mid DF = f \}$$

- $\int f$ l'integrale indefinito di f, ie

$$\int f := \{ \textstyle\int_r f + k \mid k \in \mathbf{R} \}.$$

Il lettore certamente sa che:

$$\forall f \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \qquad \textstyle\int_r f \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}), \qquad D \int_r f = f, \qquad D^{-1} f = \int f$$

mentre probabilmente ignora (e potrà ricorrere all'esempio dei gradini per capire) che:

$$\forall f \in C_{\text{pw}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \setminus C(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \qquad \textstyle\int_r f \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R}), \qquad D \int_r f \neq f, \qquad D^{-1} f = \emptyset$$

$$\forall f \in C_\infty^-(\mathbf{R}_{\text{qo}}, \mathbf{R}) \setminus C(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \qquad \textstyle\int_r f \in C_\infty^0(\mathbf{R}, \mathbf{R}), \qquad D \int_r f = f, \qquad D^{-1} f \supset \int f.$$

Per la precisione, se $f_1, f_2, \ldots$ sono le restrizioni di $f \in C_\infty^-(\mathbf{R}_{\text{qo}}, \mathbf{R}) \setminus C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ agli intervalli di definizione, allora $D^{-1} f$ risulta costituito da tutte le possibili concatenazioni di funzioni appartenenti a $D^{-1} f_1, D^{-1} f_2, \ldots$, ovvero, in queste ipotesi, appartenenti a $\int f_1, \int f_2, \ldots$.

Siano adesso z, y variabili, e si considerino l'equazione differenziale

$$a\, y = b\, Dz$$

e l'equazione integrale

$$a \textstyle\int_r y = b\, z - b\, z(r).$$

Ora, è facile verificare che se y e z sono libere di assumere valori in $C_{\text{pw}}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ gli insiemi delle soluzioni delle due equazioni non coincidono, e che il primo è un sottoinsieme del secondo, perché nel caso dell'equazione differenziale y può assumere valori in $C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ e z solo in $C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, mentre nel caso dell'equazione integrale y può assumere valori in $C^-(\mathbf{R}_{\text{qo}}, \mathbf{R})$ in senso nonbanale e z in $C^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

Invece, se y e z sono libere di assumere valori in $C_\infty^-(\mathbf{R}_{\text{qo}}, \mathbf{R})$ gli insiemi delle soluzioni delle due equazioni coincidono, perché in entrambi i casi y può assumere valori in $C_\infty^-(\mathbf{R}_{\text{qo}}, \mathbf{R})$ in senso nonbanale e z in $C_\infty^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

Per di più, in questa situazione, se si pone $y = Dw$, anche l'insieme delle soluzioni dell'equazione algebrica

$$w = z$$

con w e z libere di assumere valori in $C_\infty^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ coincide con i primi due, nel senso che, se $y = f$, $z = g$ è una soluzione dell'equazione differenziale (o integrale), allora $\exists h \in \int f$ tale che $w = h$, $z = g$ è una soluzione dell'equazione algebrica, e, viceversa, se $w = h$, $z = g$ è una soluzione dell'equazione algebrica, allora $y = Dh$, $z = g$ è una soluzione dell'equazione differenziale (o integrale). Spesso, le prime due equazioni sono dette dinamiche e la terza pseudo-statica.

A.3 Equazioni differenziali lineari con termine noto in $C_\infty^-(\mathbf{R}_{\text{qo}}, \mathbf{R})$

Si considerino i due problemi differenziali seguenti:

- risolvere in $C_\infty^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ l'equazione del I ordine:

$$Dy + a\, y = f, \qquad a \in \mathbf{R}, \qquad f \in C_\infty^-(\mathbf{R}_{\text{qo}}, \mathbf{R})$$

$$y(x_0) = y_0 \in \mathbf{R}$$

- risolvere in $C_\infty^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ l'equazione del II ordine:

$$D^2 y + b\, Dy + c\, y = f, \qquad b, c \in \mathbf{R}, \qquad f \in C_\infty^-(\mathbf{R}_{\text{qo}}, \mathbf{R})$$

$$y(x_0) = y_0 \in \mathbf{R}, \qquad Dy(x_0) = y_1 \in \mathbf{R}.$$

L'Analisi classica tratta questi due problemi solo quando $f \in C_\infty^-(\mathbf{R}_{\text{qo}}, \mathbf{R})$ in senso banale, ossia quando $f \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, ma non li tratta quando $f \in C_\infty^-(\mathbf{R}_{\text{qo}}, \mathbf{R})$ in senso non banale, ossia quando $f \in C_\infty^-(\mathbf{R}_{\text{qo}}, \mathbf{R}) \setminus C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, caso che invece è molto importante in Teoria dei Circuiti. Infatti, l'Analisi classica dimostra solo che, se $f \in C(I, \mathbf{R})$ con $I \subseteq \mathbf{R}$ avente come punto interno (o anche come estremo) il punto x_0, allora in $C^1(I, \mathbf{R})$ esiste una soluzione unica dell'equazione differenziale del I ordine, e in $C^2(I, \mathbf{R})$ esiste una soluzione unica dell'equazione differenziale del II ordine. Inoltre, l'integrale generale di ciascuna equazione in I è dato dalla somma dell'integrale generale y_{h} dell'equazione omogenea associata

- $Dy + a\,y = 0$
- $D^2 y + b\,Dy + c\,y = 0$

(appartenente a $C^\infty(I, \mathbf{R})$) e di un integrale particolare y_p (appartenente a $C^1(I, \mathbf{R})$ ovvero a $C^2(I, \mathbf{R})$, rispettivamente) dell'equazione completa in tale intervallo.

L'integrale generale dell'equazione omogenea associata si ottiene determinando intanto l'equazione caratteristica:

- $\lambda + a = 0$ e la relativa soluzione $\lambda_0 := -a$;
- $\lambda^2 + b\,\lambda + c = 0$ e le relative soluzioni $\lambda_\pm := -\dfrac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{b}{2}\right)^2 - c}$,

e quindi usando tali soluzioni in opportune espressioni esponenziali (reali).

L'integrale particolare dipende dalla specifica funzione a secondo membro e talora può essere scelto della stessa forma di tale funzione (costante, polinomio, esponenziale, sinusoide, cisoide). L'imposizione delle condizioni in x_0 determina infine la soluzione cercata.

Nel caso dei due problemi in esame, però, la funzione f può appartenere a $C^-_\infty(\mathbf{R}_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R})$ in senso non banale. L'Analisi classica mostra allora che non può esistere una soluzione g del primo in $C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, né del secondo in $C^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

Infatti, nel primo caso, se $\operatorname{doc} f \neq \emptyset$, allora $\operatorname{doc}(Dg + ag) \neq \emptyset$, e, se, per assurdo, la soluzione g appartenesse a $C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, allora $Dg + ag$ apparterrebbe a $C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ e quindi $\operatorname{doc}(Dg + ag) = \emptyset$, il che dimostra che g non può appartenere a $C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

Analogamente, nel secondo caso, se $\operatorname{doc} f \neq \emptyset$, allora $\operatorname{doc}(D^2 g + b\,Dy + a\,g) \neq \emptyset$, e se, per assurdo, la soluzione g appartenesse a $C^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, allora $D^2 g + b\,Dg + a\,g$ apparterrebbe a $C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ e quindi $\operatorname{doc}(D^2 g + b\,Dg + a\,g) = \emptyset$, il che dimostra che g non può appartenere a $C^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

Però, i problemi in esame non richiedono l'appartenenza di y a $C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ o a $C^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, rispettivamente, e ciò consente di trovarne la soluzione.

Per semplicità, si supporrà nel seguito che $x_0 = 0$ e $\operatorname{doc} f = \{0\}$, ma il lettore è invitato a considerare anche i casi $x_0 \neq 0$ e $\operatorname{doc} f \neq \{x_0\}$. Per cominciare, si definiscano due funzioni ausiliarie f_- ed f_+ nel modo seguente:

$$f_- : \mathbf{R}^- \to \mathbf{R}, \qquad f_-(x) := f(x)$$

$$f_+ : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}, \qquad f_+(x) := f(x)$$

che quindi soddisferanno

$$f_- \in C^-_\infty(\mathbf{R}^-_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R}), \qquad f_+ \in C^-_\infty(\mathbf{R}^+_{\mathrm{qo}}, \mathbf{R}).$$

Si considerino poi,

- in luogo del primo problema, i due problemi:

$$Dy + a\,y = f_-, \qquad y(0^-) = y_0$$

$$Dy + a\,y = f_+, \qquad y(0^+) = y_0$$

- in luogo del secondo problema, i due problemi:

$$D^2 y + b\,Dy + c\,y = f_-, \qquad y(0^-) = y_0, \qquad Dy(0^-) = y_1$$

$$D^2 y + b\,Dy + c\,y = f_+, \qquad y(0^+) = y_0, \qquad Dy(0^+) = y_1$$

e si denotino con y_- e y_+ le rispettive soluzioni (uniche), trovate con il metodo classico. Per quanto detto, nel primo caso, risulterà

$$y_- \in C^1_\infty(\mathbf{R}^-, \mathbf{R}), \qquad y_+ \in C^1_\infty(\mathbf{R}^+, \mathbf{R})$$

e, nel secondo caso,

$$y_- \in C^2_\infty(\mathbf{R}^-, \mathbf{R}), \qquad y_+ \in C^2_\infty(\mathbf{R}^+, \mathbf{R}).$$

Ne consegue che la funzione $y_\pm$, concatenazione di y_- e y_+, ie

$$y_\pm(x) := \begin{cases} y_-(x) & x < 0 \\ y_0 & x = 0 \\ y_+(x) & x > 0 \end{cases}$$

appartiene a $C^0_\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ nel primo caso e a $C^1_\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ nel secondo, ed è (l'unica) soluzione del rispettivo problema iniziale.

Infine, due osservazioni:

- la tecnica di separazione degli intervalli è utile anche in tutti quei problemi differenziali in cui la funzione f appartenga a $C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, ma non sia noto un integrale particolare continuo valido su tutto $\mathbf{R}$ (esempio: $f(x) = |x|$);
- i due problemi differenziali presi in esame, se si prescinde dalla condizione al contorno, ammettono soluzioni anche in $C^-_\infty(\mathbf{R}_{\text{qo}}, \mathbf{R})$, e ogni loro sottoinsieme è ottenibile come somma di un integrale particolare in $C^-_\infty(\mathbf{R}_{\text{qo}}, \mathbf{R})$ e dell'integrale generale dell'omogenea; tuttavia, in questa sede, esse non rivestono nessun interesse.