

# FISICA SPERIMENTALE C APPUNTI DELLE LEZIONI

*G. Faglia*

23 aprile 2006



# Indice

<b>1</b>	<b>La carica elettrica</b>	<b>1</b>
	Conduttori e isolanti . . . . .	2
	La legge di Coulomb . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Campo Elettrico</b>	<b>4</b>
	Campo Elettrico di cariche puntiformi . . . . .	5
	Linee di Forza . . . . .	5
	Campo Elettrico di distribuzioni continue di carica .	7
	Anello carico . . . . .	9
	Disco carico . . . . .	10
	Filo carico infinito . . . . .	11
	Misura della carica elementare . . . . .	12
	Dipolo elettrico . . . . .	13
	Dipolo in un campo elettrico esterno . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Legge di Gauss</b>	<b>16</b>
	Flusso di un campo vettoriale . . . . .	16
	Legge di Gauss . . . . .	18
	Linea carica infinita . . . . .	20
	Piano carico infinito . . . . .	21
	Guscio sferico cavo . . . . .	23
	Distribuzione di carica a simmetria sferica . . . . .	24

<b>4 Potenziale Elettrico</b>	<b>25</b>
Potenziale elettrico . . . . .	28
Potenziale di un dipolo . . . . .	31
Quadrupolo elettrico . . . . .	32
Distribuzione continua di carica . . . . .	33
Superfici equipotenziali . . . . .	34
Conduttore carico isolato . . . . .	36
Teorema di Coulomb . . . . .	38
Induzione elettrostatica . . . . .	39
Schermo elettrostatico . . . . .	40
Effetto delle punte . . . . .	41
Condensatori e dielettrici . . . . .	42
Condensatore a piatti paralleli . . . . .	43
Condensatore cilindrico . . . . .	44
Condensatore sferico . . . . .	44
Condensatori in parallelo . . . . .	45
Condensatori in serie . . . . .	46
Energia del Campo Elettrico . . . . .	46
Metodo delle cariche immagini . . . . .	47
Carica puntiforme esterna a un conduttore pia- no messo a terra . . . . .	48
Dielettrici . . . . .	49
Legge di Gauss per i dielettrici . . . . .	52

---

<b>5</b>	<b>Correnti elettriche</b>	<b>54</b>
	Densità di corrente . . . . .	55
	Resistenza . . . . .	56
	Resistenze in parallelo . . . . .	58
	Resistenze in serie . . . . .	59
	Modello a elettroni liberi . . . . .	60
	Effetto Joule . . . . .	61
	Circuiti elettrici . . . . .	62
	Carica di un condensatore . . . . .	63
<b>6</b>	<b>Il campo magnetico</b>	<b>65</b>
	Forza magnetica su una carica in moto . . . . .	66
	La forza di Lorentz . . . . .	67
	Cariche in moto circolare . . . . .	68
	Ciclotrone . . . . .	69
	Effetto Hall . . . . .	70
	Forza Magnetica agente su una corrente . . . . .	71
	Spira percorsa da corrente . . . . .	73
	Dipolo magnetico . . . . .	74
<b>7</b>	<b>Legge di Ampere</b>	<b>75</b>
	Legge di Biot-Savart . . . . .	75
	Filo rettilineo infinitamente lungo . . . . .	77
	Spira circolare percorsa da corrente . . . . .	78
	Linee di forza di B . . . . .	80

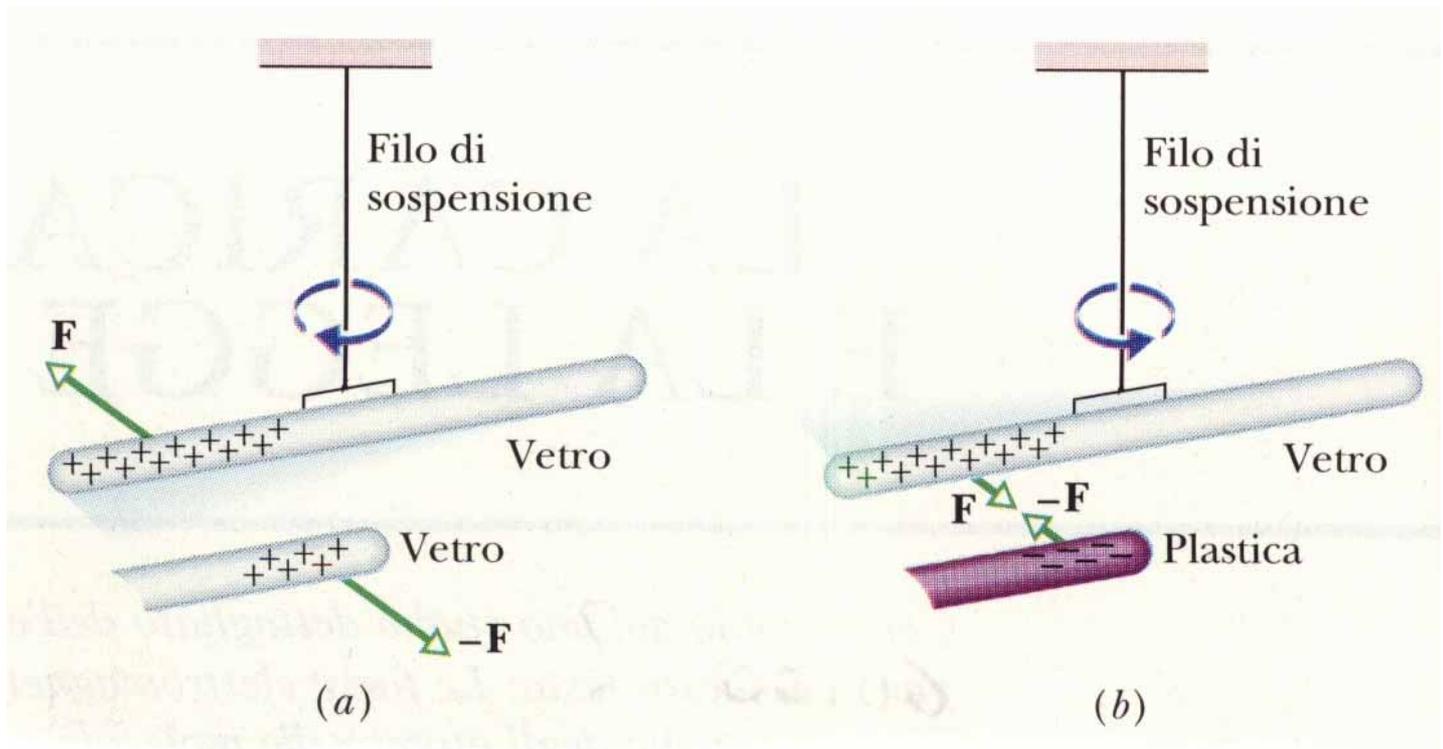
Conduttori Paralleli . . . . .	80
Legge di Ampere . . . . .	81
Solenoide . . . . .	83
Toroide . . . . .	86
<b>8 Legge dell'induzione di Faraday</b>	<b>87</b>
Legge di Lenz . . . . .	89
Correnti di Foucault . . . . .	91
Forze elettromotrici derivanti dal moto . . . . .	92
Campi elettrici indotti . . . . .	94
<b>9 Campo Magnetico nella Materia</b>	<b>95</b>
Magnetismo atomico e nucleare . . . . .	97
Momenti magnetici intrinseci . . . . .	98
Magnetizzazione . . . . .	99
Campo Magnetico $H$ . . . . .	102
Materiali Magnetici . . . . .	103
Diamagnetismo . . . . .	103
Paramagnetismo . . . . .	105
Ferromagnetismo . . . . .	107
<b>10 Induttanza</b>	<b>109</b>
Induttanza di un solenoide . . . . .	110
Induttanza di un toroide . . . . .	111
Induttori con materiali magnetici . . . . .	112

---

Circuiti RL . . . . .	112
Energia immagazzinata nel campo magnetico . . .	114
<b>11 Equazioni di Maxwell</b>	<b>116</b>
Corrente di Spostamento . . . . .	116
<b>12 Equazioni di Maxwell in forma differenziale</b>	<b>119</b>
Formulazione differenziale della Legge di Gauss per il campo elettrico . . . . .	120
Teorema della divergenza . . . . .	121
Formulazione differenziale della legge di Faraday . .	124
Gradiente di un campo scalare . . . . .	124
Teorema di Stokes . . . . .	127
Formulazione differenziale della Legge di Gauss per il campo magnetico . . . . .	130
Formulazione differenziale della Legge di Ampere .	131
Onde elettromagnetiche . . . . .	132

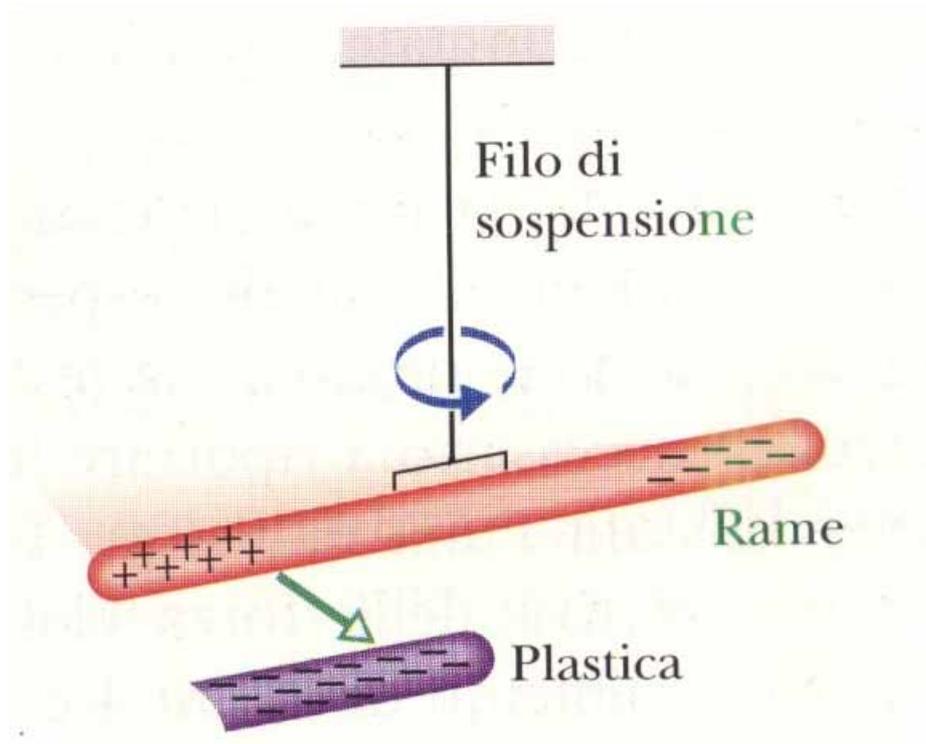


# 1 La carica elettrica

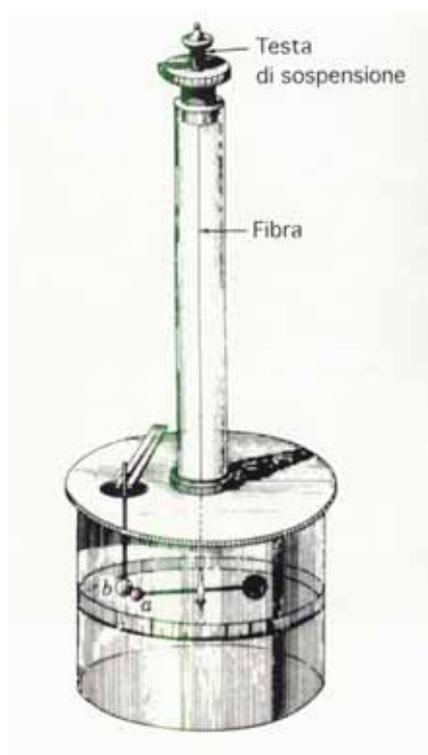


*Cariche dello stesso segno si respingono*  
*Cariche di segno opposto si attraggono*

## Conduttori e isolanti



## La legge di Coulomb



cariche puntiformi

$$F \propto \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (1.1)$$

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (1.2)$$

Simile a legge di Gravitazione Universale

L'unità di carica del SI è il coulomb (C): quantità di carica che fluisce in 1 secondo quando si ha corrente stazionaria di 1 ampere

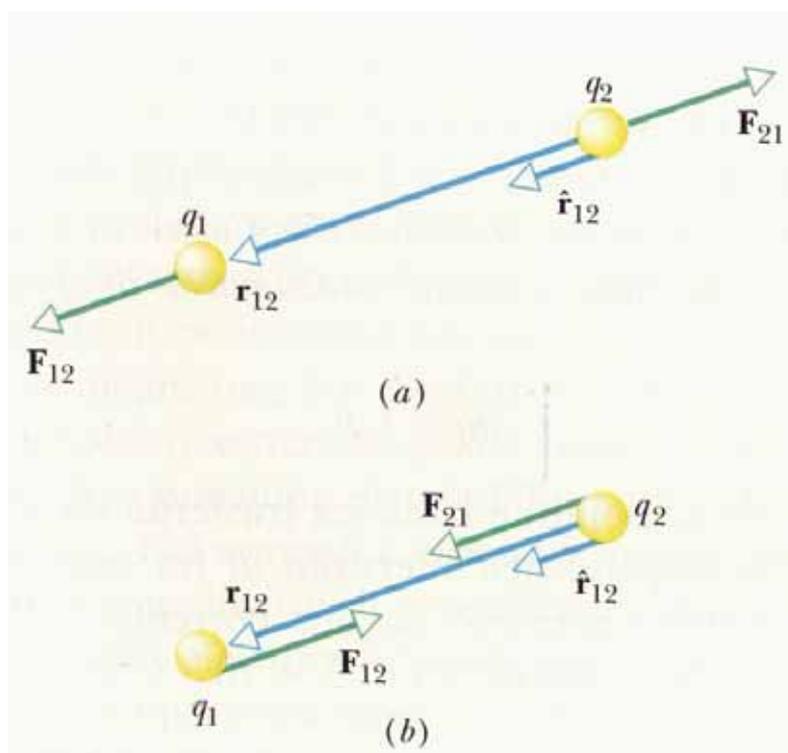
$$dq = i \, dt \quad (1.3)$$

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (1.4)$$

$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{C}^2/\text{Nm}^2 \quad (1.5)$$

*costante dielettrica del vuoto*

$$k = 8.99 \cdot 10^9 \text{Nm}^2/\text{C}^2 \quad (1.6)$$



$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \quad (1.7)$$

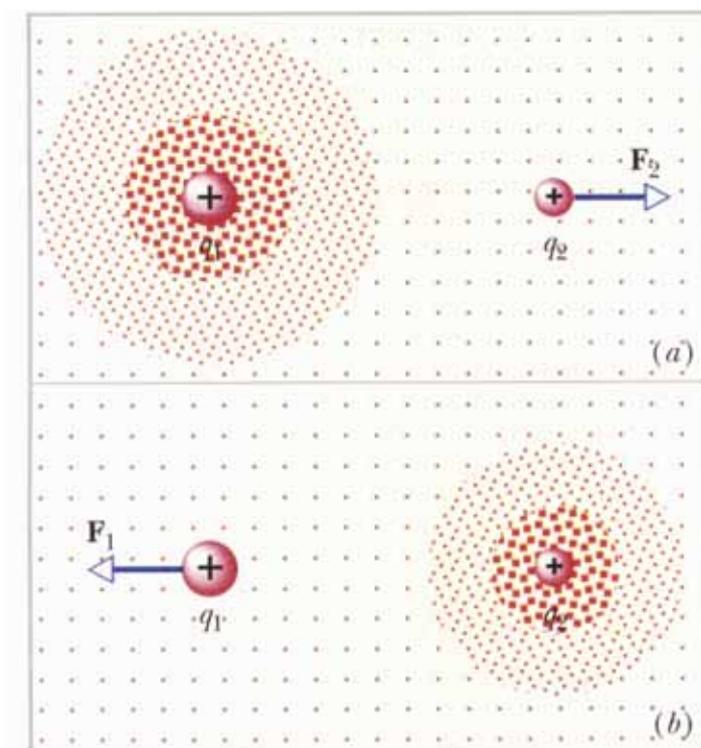
*Principio di sovrapposizione degli effetti*

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} \quad (1.8)$$

## 2 Campo Elettrico

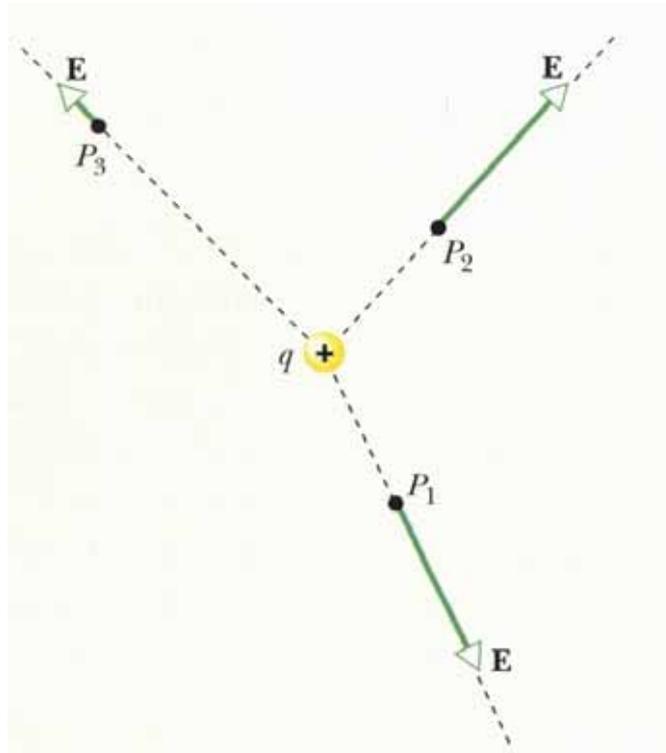
carica  $\leftrightarrow$  campo elettrico  $\leftrightarrow$  carica

$$\mathbf{E} = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{q_0} \quad (2.1)$$



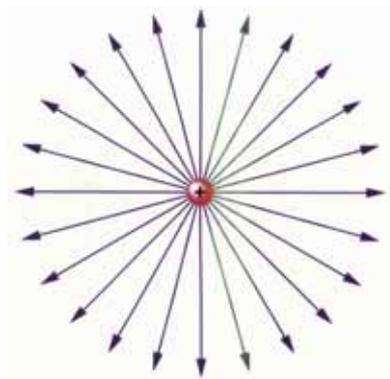
# Campo Elettrico di cariche puntiformi

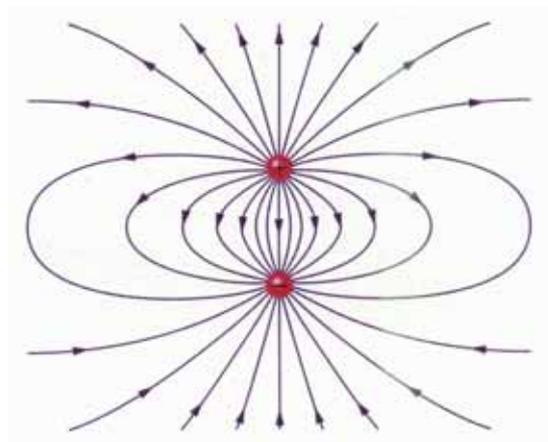
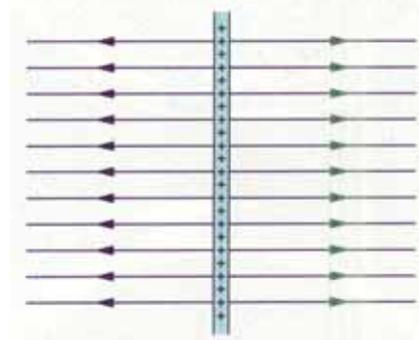
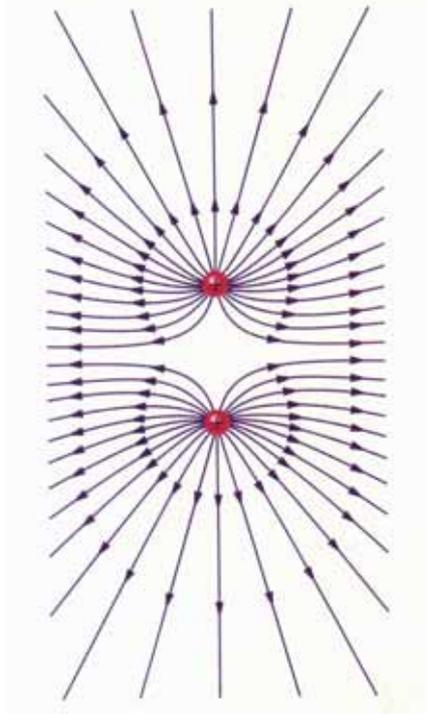
$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (2.2)$$



$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots = \sum \mathbf{E}_i \quad (2.3)$$

## Linee di Forza



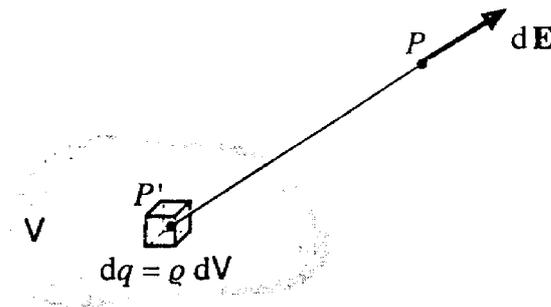


## Campo Elettrico di distribuzioni continue di carica

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E} \quad (2.4)$$

$$E_x = \int dE_x, \quad E_y = \int dE_y, \quad E_z = \int dE_z \quad (2.5)$$

- Cariche di volume



$$dq = \rho dV \quad (2.6)$$

$\rho$  densità di carica volumetrica

$$q = \int_V \rho dV = \int_V \rho(x, y, z) dx dy dz \quad (2.7)$$

$$d\mathbf{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(P')dV'}{\overline{P'P}^3} \mathbf{P}'\mathbf{P} \quad (2.8)$$

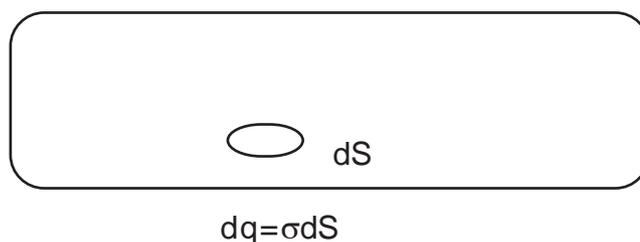
$$\mathbf{E}(P) = \int_V d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(P')}{\overline{P'P}^3} \mathbf{P}'\mathbf{P} dV' \quad (2.9)$$

$$E_x(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{(x - x')\rho(x', y', z') dx' dy' dz'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \quad (2.10)$$

Se  $\rho = \text{cost}$

$$dq = \frac{q}{V} dV \quad (2.11)$$

- Cariche distribuite su una superficie



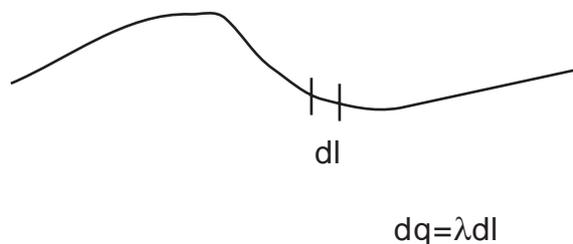
$$dq = \sigma dS \quad (2.12)$$

$\sigma$  densità di carica superficiale

Se  $\sigma = \text{cost}$

$$dq = \frac{q}{A} dA \quad (2.13)$$

- Cariche distribuite lungo una linea (curva)



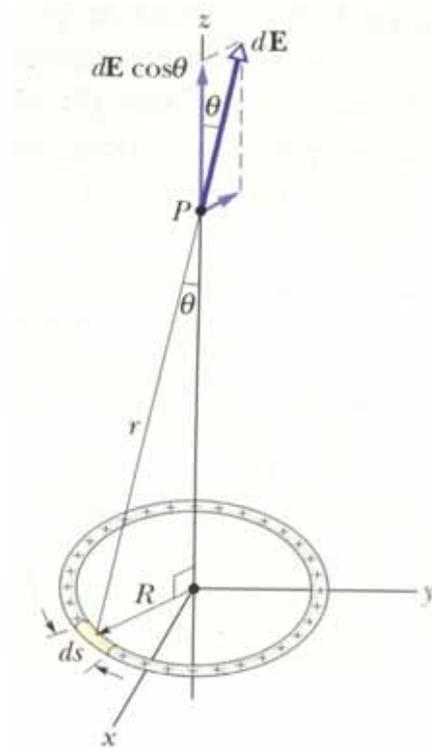
$$dq = \lambda dl \quad (2.14)$$

$\lambda$  densità di carica lineare

Se  $\lambda = \text{cost}$

$$dq = \frac{q}{L} ds \quad (2.15)$$

## Anello carico



$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda ds}{r^2} = \frac{\lambda ds}{4\pi\epsilon_0(z^2 + R^2)} \quad (2.16)$$

$$\cos \theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \quad (2.17)$$

$$dE_z = dE \cos \theta = \frac{z\lambda ds}{4\pi\epsilon_0(z^2 + R^2)^{3/2}} \quad (2.18)$$

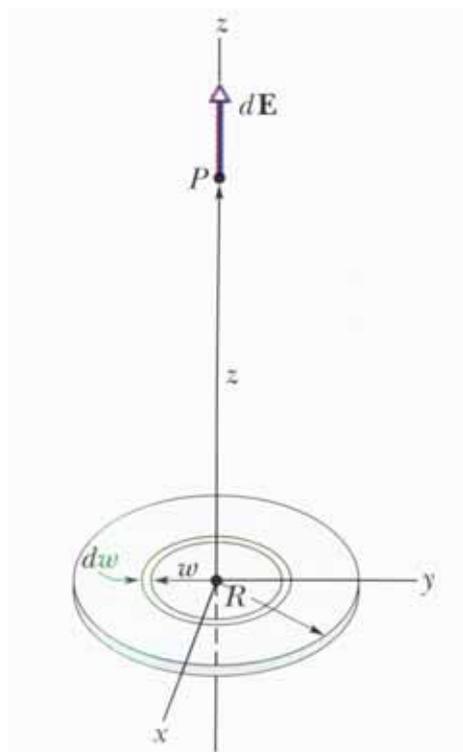
$$E_z = \int dE \cos \theta = \frac{z\lambda}{4\pi\epsilon_0(z^2 + R^2)^{3/2}} \int ds = \frac{z\lambda(2\pi R)}{4\pi\epsilon_0(z^2 + R^2)^{3/2}} \quad (2.19)$$

$$E_z = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0(z^2 + R^2)^{3/2}} \quad (2.20)$$

Se  $z \gg R$

$$E_z \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{z^2} \quad (2.21)$$

## Disco carico



$$dq = \sigma dA = \sigma(2\pi w)dw \quad (2.22)$$

$$dE_z = \frac{z\sigma(2\pi w)dw}{4\pi\epsilon_0(z^2 + w^2)^{3/2}} = \frac{z\sigma}{4\epsilon_0}(z^2 + w^2)^{-3/2}(2w)dw \quad (2.23)$$

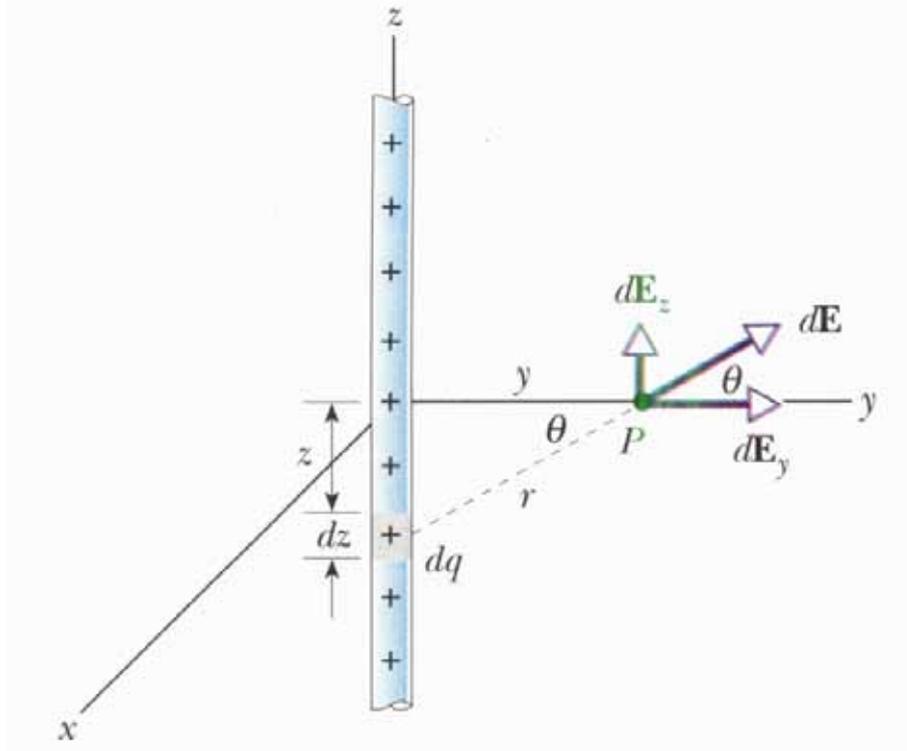
$$E_z = \int dE_z = \frac{z\sigma}{4\epsilon_0} \int_0^R (z^2 + w^2)^{-3/2}(2w)dw \quad (2.24)$$

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \quad (2.25)$$

se  $R \gg z$

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (2.26)$$

## Filo carico infinito



$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dz}{y^2 + z^2} \quad (2.27)$$

$$dE_y = dE \cos \theta \quad dE_z = dE \sin \theta$$

$$E_y = \int dE_y = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \theta dE \quad (2.28)$$

$$E_z = \int dE_z = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \theta dE \quad (2.29)$$

$$E = E_y = 2 \int_0^{+\infty} \cos \theta dE \quad (2.30)$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{+\infty} \cos \theta \frac{dz}{y^2 + z^2} \quad (2.31)$$

$$z = y \tan \theta \quad (2.32)$$

$$dz = y \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \quad (2.33)$$

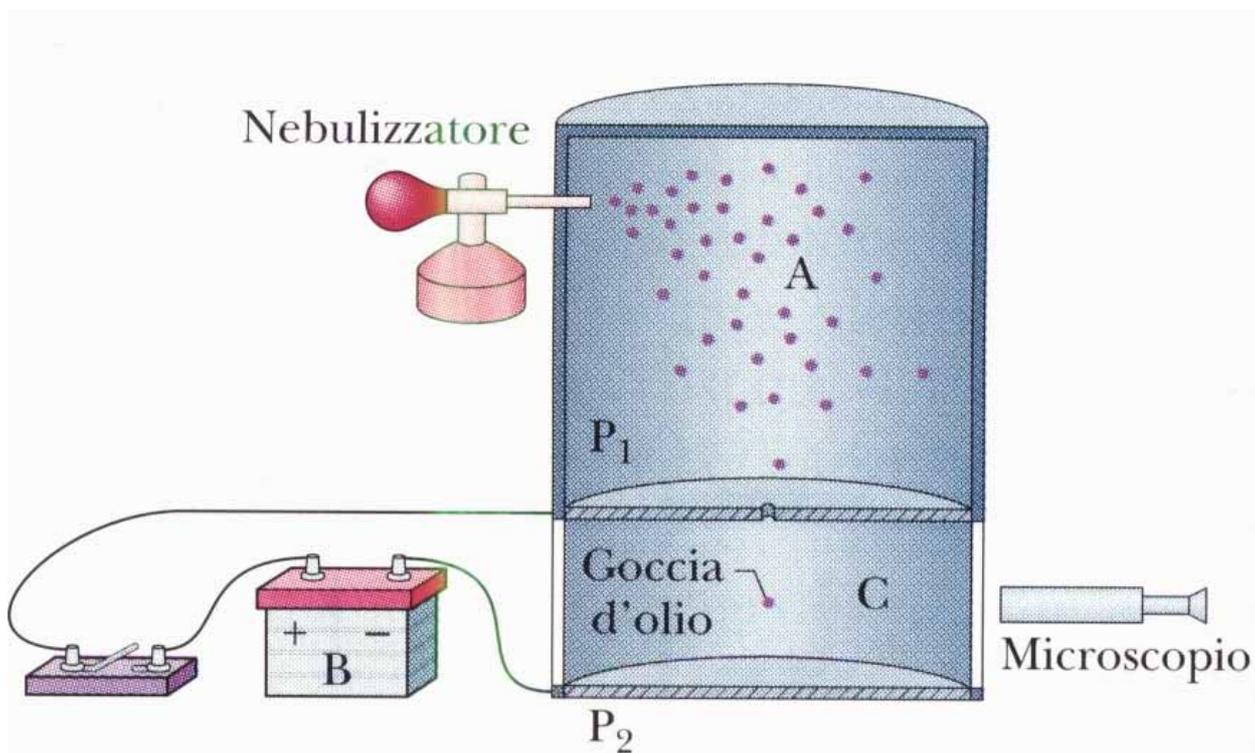
$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \cos \theta d\theta \quad (2.34)$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y} \quad (2.35)$$

Simmetria cilindrica rispetto all'asse  $z$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (2.36)$$

## Misura della carica elementare



$$mg = k\eta v_g \quad (2.37)$$

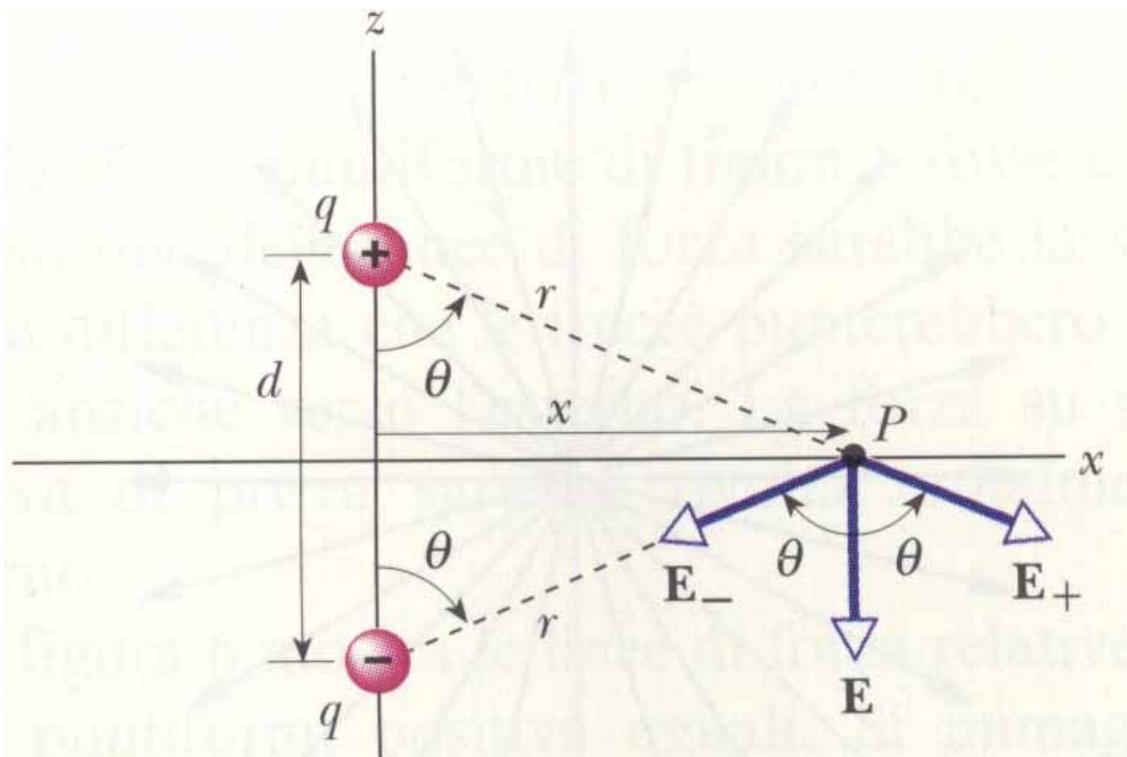
$$qE - mg = k\eta v_E \quad (2.38)$$

$$q = \frac{mg v_g + v_E}{E v_g} \quad (2.39)$$

Tutte le cariche  $q$  multipli della carica elementare *carica dell'elettrone*

$$e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad (2.40)$$

## Dipolo elettrico



$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- \quad (2.41)$$

$$E_+ = E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x^2 + (d/2)^2} \quad (2.42)$$

$$E = E_+ \cos \theta + E_- \cos \theta = 2E_+ \cos \theta \quad (2.43)$$

$$\cos \theta = \frac{d/2}{\sqrt{x^2 + (d/2)^2}} \quad (2.44)$$

$$E = 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x^2 + (d/2)^2} \frac{d/2}{\sqrt{x^2 + (d/2)^2}} \quad (2.45)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd}{[x^2 + (d/2)^2]^{3/2}} \quad (2.46)$$

momento di dipolo elettrico

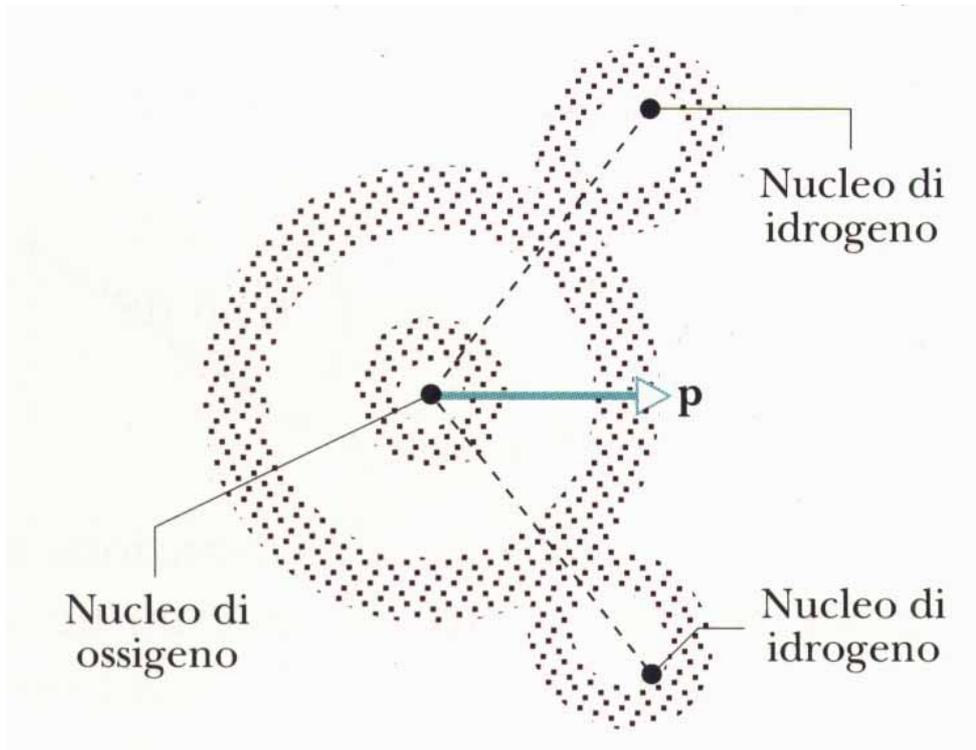
$$\mathbf{p} = q\mathbf{d} \quad (2.47)$$

a distanza  $x$  molto grande rispetto a  $d$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{x^3} \frac{1}{[1 + (d/2x)^2]^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{x^3} \left[ 1 + \left( \frac{d}{2x} \right)^2 \right]^{-3/2} \quad (2.48)$$

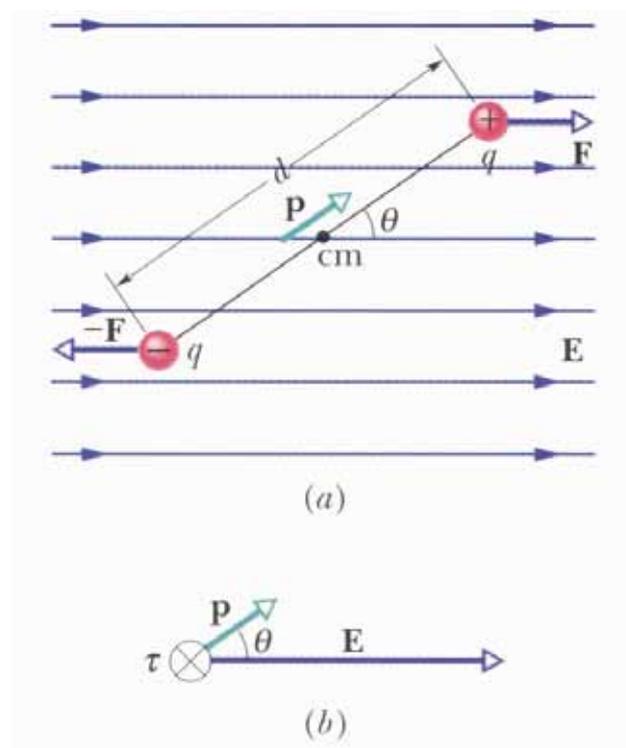
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{x^3} \left[ 1 + \left( -\frac{3}{2} \right) \left( \frac{d}{2x} \right)^2 + \dots \right] \quad (2.49)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{x^3} \quad (2.50)$$



Molecola  $H_2O$   $p = 6.2 \cdot 10^{-30} \text{ Cm}$

## Dipolo in un campo elettrico esterno



$$\tau = F \frac{d}{2} \sin \theta + F \frac{d}{2} \sin \theta = Fd \sin \theta = qEd \sin \theta = pE \sin \theta \quad (2.51)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad (2.52)$$

$$L = \int dL = \int_{\theta_0}^{\theta} \boldsymbol{\tau} \cdot d\boldsymbol{\theta} = \int_{\theta_0}^{\theta} -\tau d\theta \quad (2.53)$$

$$L = \int_{\theta_0}^{\theta} -pE \sin \theta d\theta = -pE \int_{\theta_0}^{\theta} \sin \theta d\theta = pE(\cos \theta - \cos \theta_0) \quad (2.54)$$

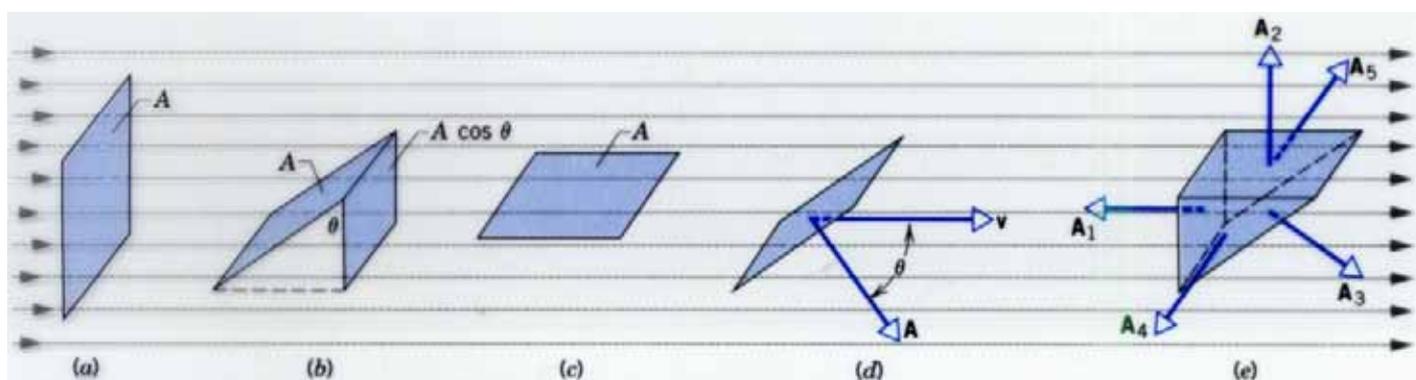
Il sistema è conservativo

$$\Delta U = U(\theta) - U(\theta_0) = -L = -pE(\cos \theta - \cos \theta_0) \quad (2.55)$$

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \quad (2.56)$$

### 3 Legge di Gauss

#### Flusso di un campo vettoriale

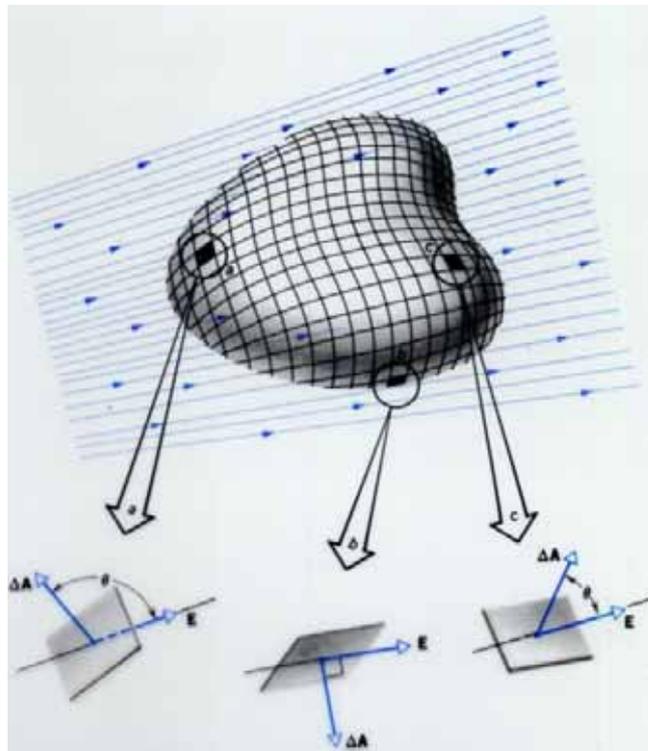


$$|\Phi| = vA \quad (3.1)$$

$$|\Phi| = vA \cos \theta \quad (3.2)$$

$$\Phi = \sum \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \quad (3.3)$$

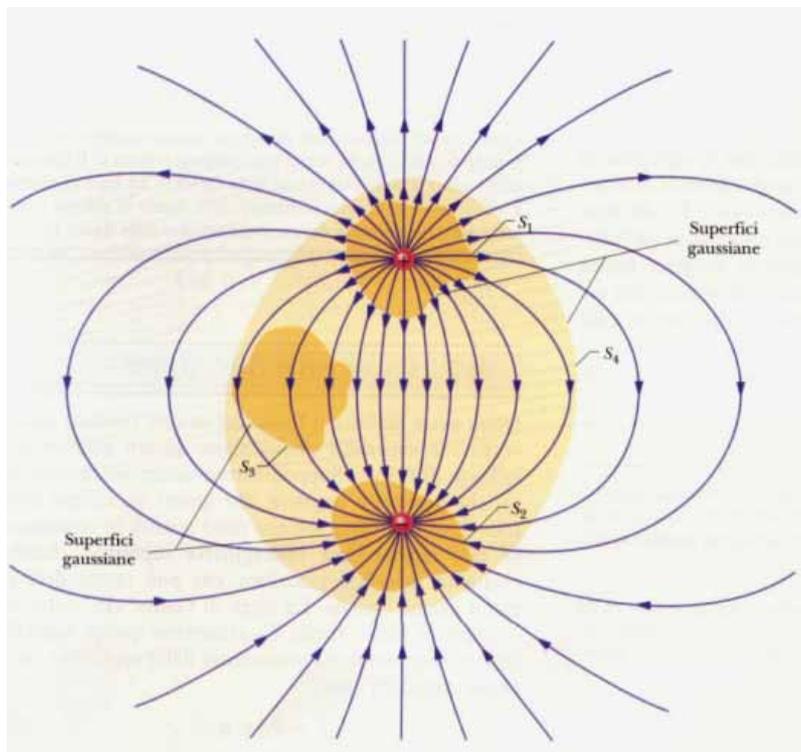
$$\Phi = \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} \quad (3.4)$$



$$\Phi_E = \sum \mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{A} = \sum \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \Delta A \quad (3.5)$$

$$\Phi_E = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \quad (3.6)$$

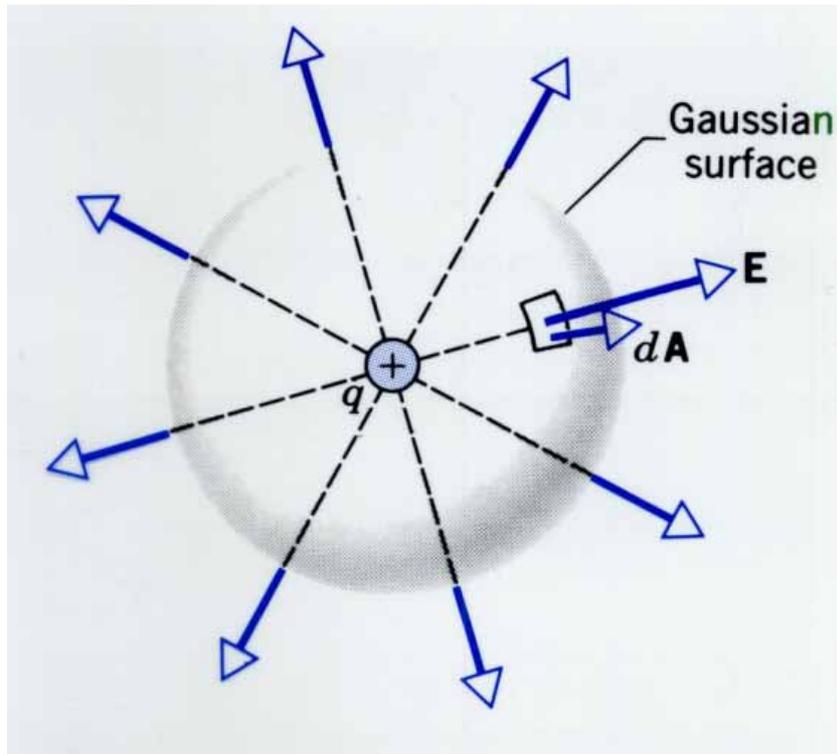
# Legge di Gauss



$S$  superficie chiusa contenente la carica  $q$

$$\epsilon_0 \Phi_E = q \quad (3.7)$$

$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = q \quad (3.8)$$

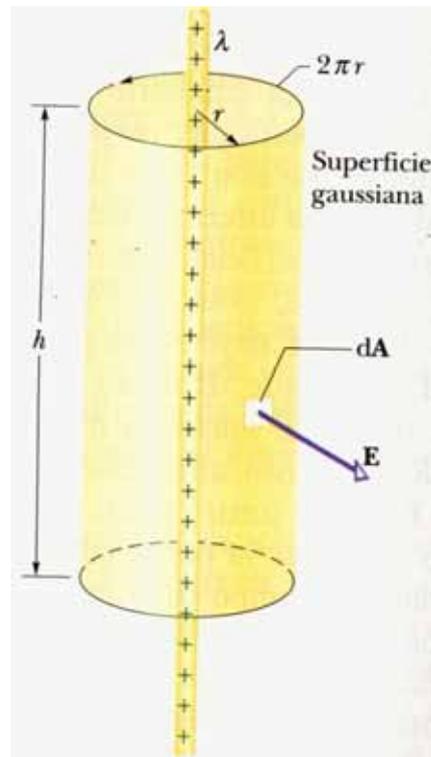


$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \epsilon_0 \oint E dA = \epsilon_0 E \oint dA = \epsilon_0 E (4\pi r^2) \quad (3.9)$$

$$\epsilon_0 E (4\pi r^2) = q \quad (3.10)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (3.11)$$

# Linea carica infinita

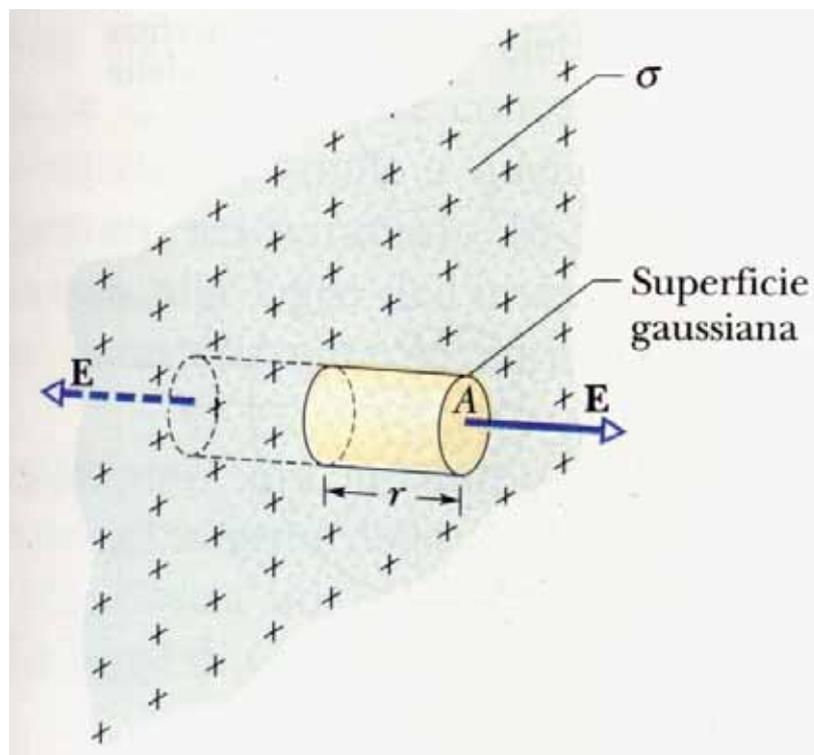


$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = q \quad (3.12)$$

$$\epsilon_0 E \oint dA = \epsilon_0 E (2\pi r h) = \lambda h \quad (3.13)$$

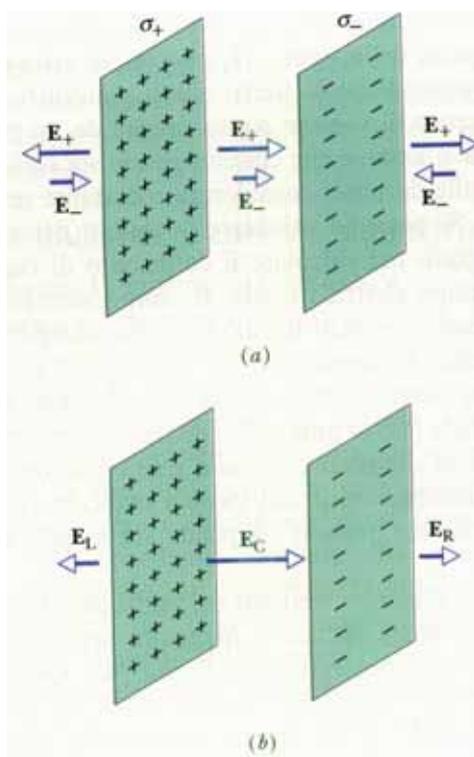
$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (3.14)$$

## Piano carico infinito



$$\epsilon_0(EA + EA) = \sigma A \quad (3.15)$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (3.16)$$

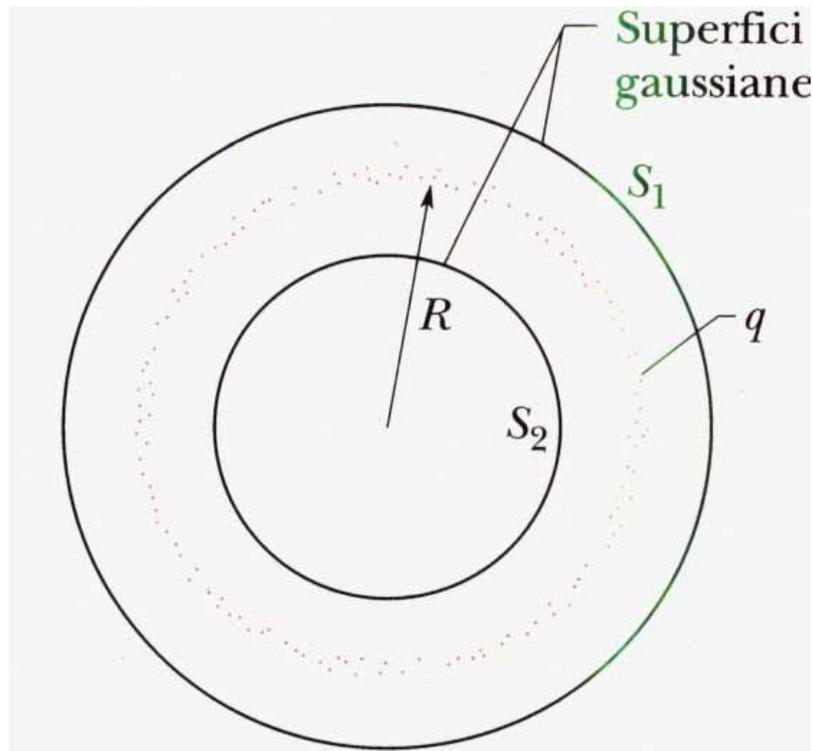


Se  $E_+ = E_-$

$$E_L = E_R = 0 \quad (3.17)$$

$$E_C = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (3.18)$$

## Guscio sferico cavo



Per  $S_1$

$$\epsilon_0 E (4\pi r^2) = q \quad (3.19)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad r > R \quad (3.20)$$

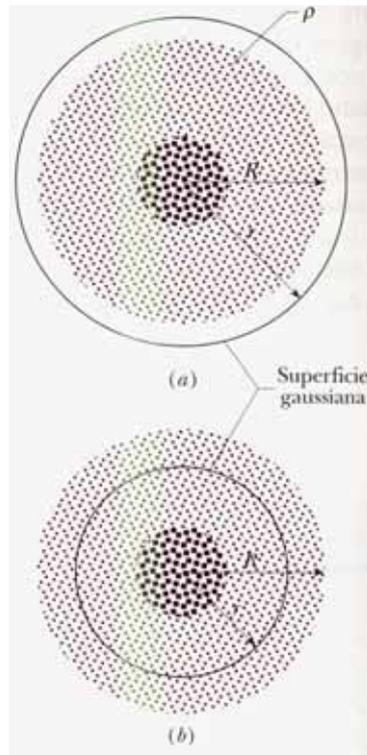
Un guscio sferico carico uniformemente si comporta, rispetto ai punti esterni, come se tutta la sua carica fosse concentrata nel suo centro

Per  $S_2$

$$E = 0 \quad r < R \quad (3.21)$$

Un guscio sferico carico uniformemente non esercita alcuna forza elettrostatica su una particella carica posta al suo interno

# Distribuzione di carica a simmetria sferica



Per  $r > R$

$$E = \int dE = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \quad (3.22)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (3.23)$$

Per  $r < R$

$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \epsilon_0 E (4\pi r^2) = q' \quad (3.24)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{r^2} \quad (3.25)$$

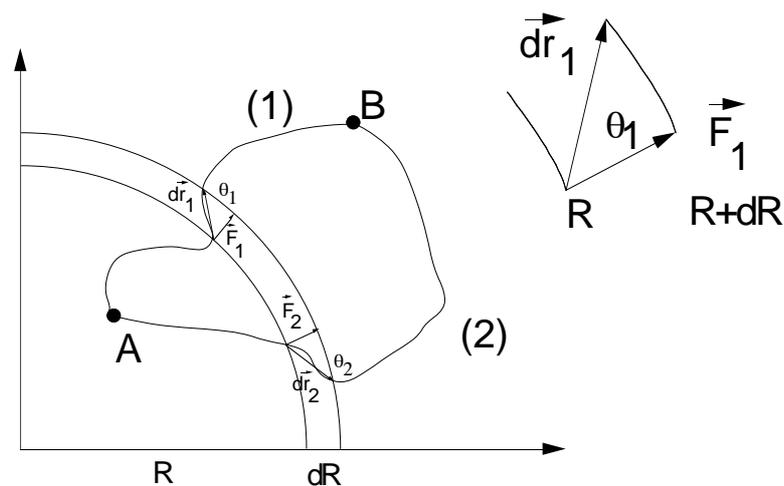
$$\frac{q'}{q} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad (3.26)$$

$$q' = q \left(\frac{r}{R}\right)^3 \quad (3.27)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qr}{R^3} \quad (3.28)$$

## 4 Potenziale Elettrico

*La forza elettrostatica è centrale (la direzione passa sempre per uno stesso punto e il suo modulo è funzione di  $r$ ) e quindi conservativa e può essere descritta da una energia potenziale*



Consideriamo due tratti di traiettoria compresi tra le due sfere di raggio  $R$  e  $R + dR$  e determiniamo

$$dW = (\vec{F} \cdot \vec{dr})_{R \Rightarrow R+dR} \quad (4.1)$$

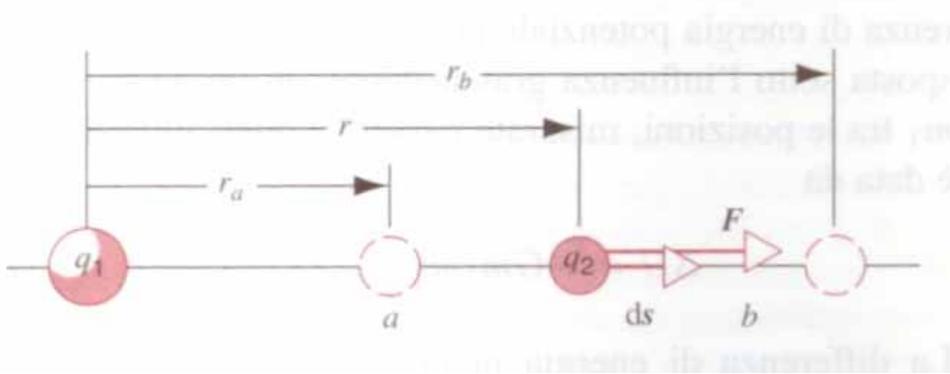
Lungo i due percorsi

$$1. \vec{F}_1 \cdot \vec{dr}_1 = F_1 dr_1 \cos \theta_1 = F dR$$

$$2. \vec{F}_2 \cdot \vec{dr}_2 = F_2 dr_2 \cos \theta_2 = F dR$$

$$\vec{F}_1 \cdot \vec{dr}_1 = \vec{F}_2 \cdot \vec{dr}_2 \quad (4.2)$$

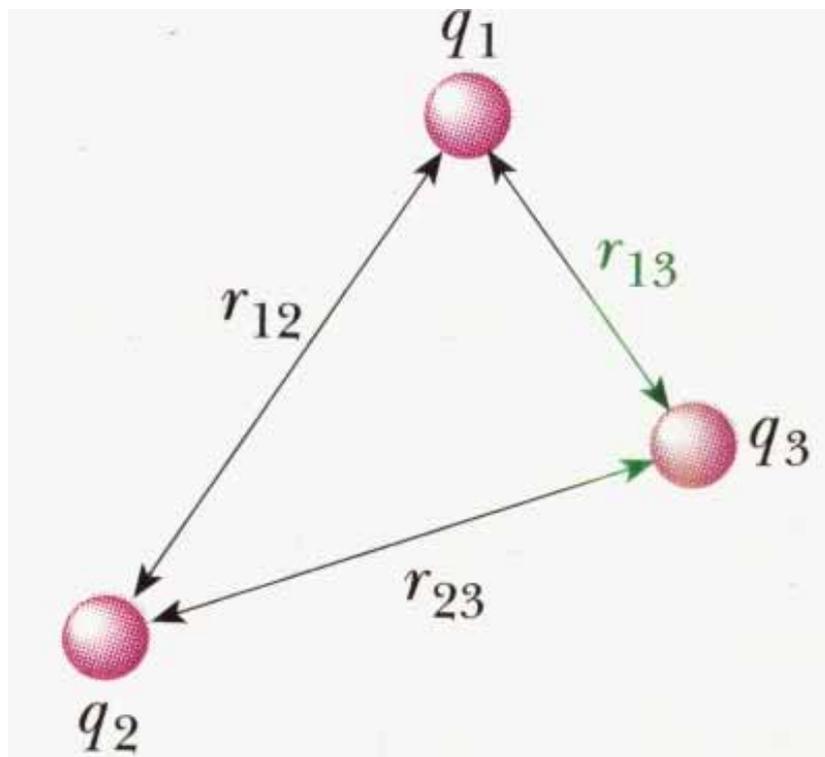
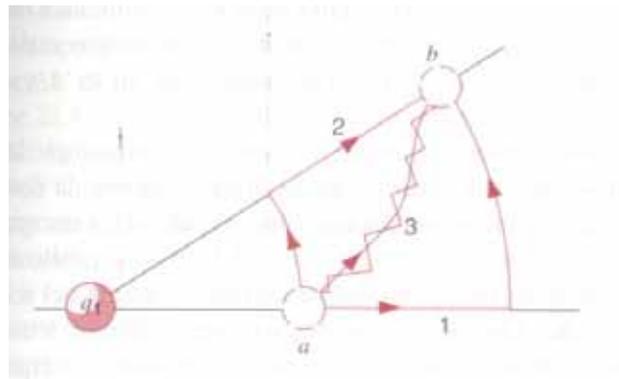
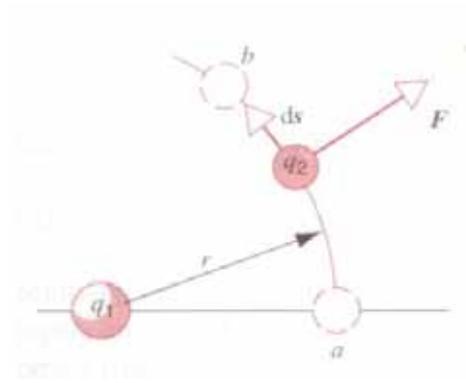
L'integrale non dipende dal percorso per qualsiasi percorso  $\rightarrow \vec{F}$  è una forza conservativa



$$U_b - U_a = - \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -q_2 \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -q_2 \int_{r_a}^{r_b} E_x dr =$$

$$- \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 \int_{r_a}^{r_b} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 \left( \frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right) \quad (4.3)$$

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} \quad (4.4)$$



$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \quad (4.5)$$

L'energia potenziale elettrica di un sistema di particelle puntiformi fisse è uguale al lavoro che un agente esterno deve fornire per aggregare il sistema stesso trasportando ogni carica nella posizione finale da distanza infinita

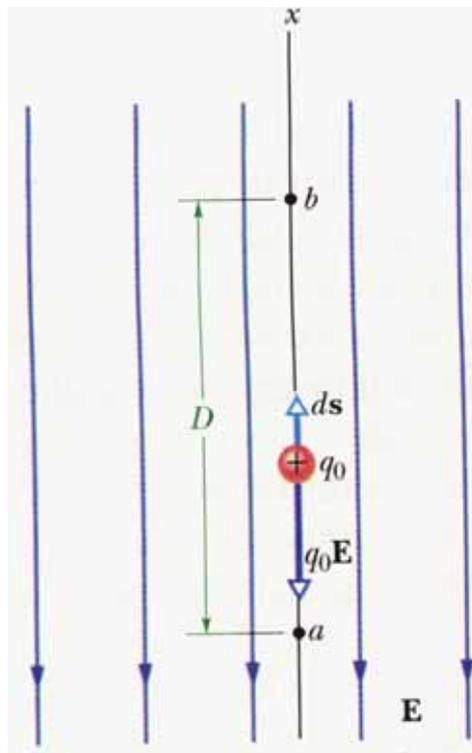
## Potenziale elettrico

$$V_P = \frac{U_P}{q_0} \quad (4.6)$$

$$\Delta V = V_b - V_a = \frac{U_b - U_a}{q_0} \quad (4.7)$$

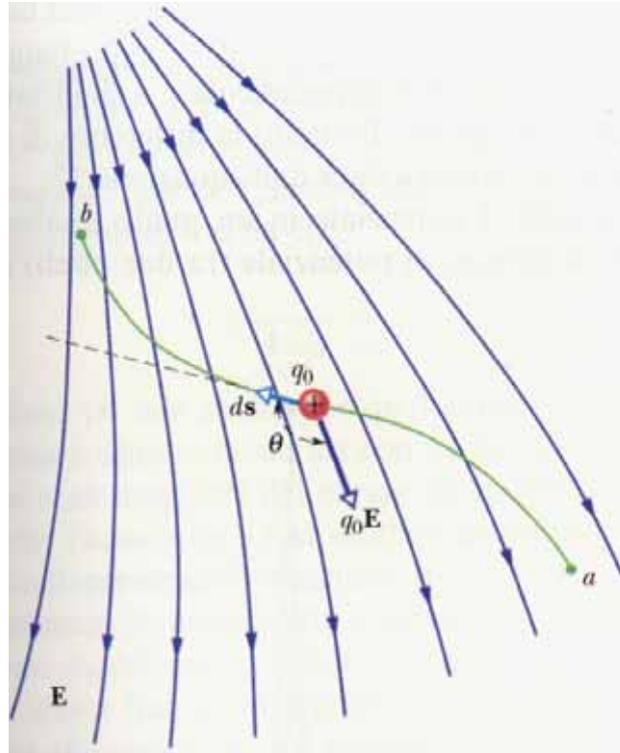
$$\Delta U = q_0 \Delta V \quad (4.8)$$

1 V=1 volt=1 joule/Coulomb



$$L_{ab} = F_x \Delta x = (-q_0 E)(D) = -q_0 E D \quad (4.9)$$

$$\Delta V = V_b - V_a = \frac{U_b - U_a}{q_0} = \frac{-L_{ab}}{q_0} = ED \quad (4.10)$$

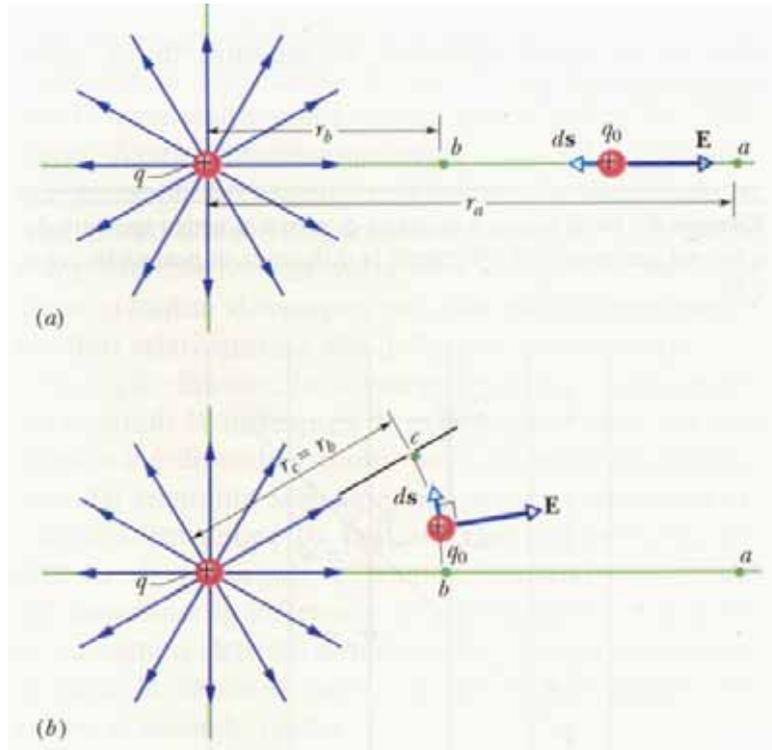


$$L_{ab} = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = q_0 \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (4.11)$$

$$V_b - V_a = \frac{U_b - U_a}{q_0} = -\frac{L_{ab}}{q_0} = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (4.12)$$

$V_a = 0$  se  $a$  punto di riferimento all'infinito

$$V_P = -\int_{\infty}^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (4.13)$$



$$\begin{aligned}
 V_b - V_a &= - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int_{r_a}^{r_b} E dr = \\
 &= - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_a}^{r_b} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right) \quad (4.14)
 \end{aligned}$$

ponendo  $V_a = 0$  per  $r_a \rightarrow \infty$  si ha

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (4.15)$$

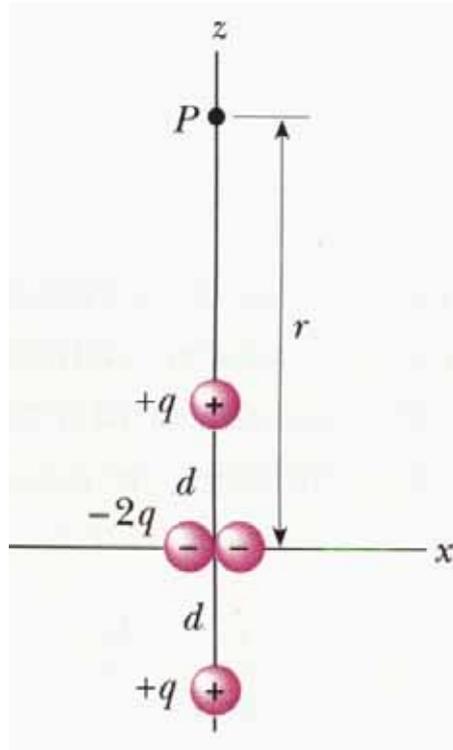
$N$  cariche puntiformi

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_N = \sum_{i=1}^N V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i} \quad (4.16)$$

Principio di sovrapposizione. Somma algebrica scalare



## Quadrupolo elettrico

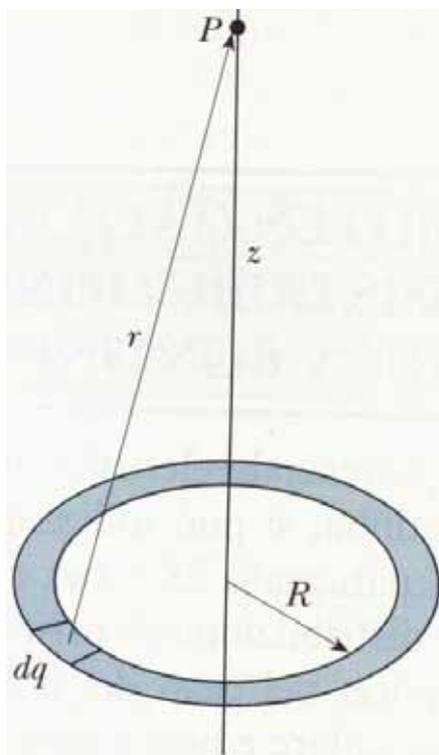


$$\begin{aligned}
 V &= \sum_i V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r-d} + \frac{-2q}{r} + \frac{q}{r+d} \right) = \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qd^2}{r(r^2-d^2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qd^2}{r^3(1-d^2/r^2)} \quad (4.20)
 \end{aligned}$$

posto  $Q = 2qd^2$  momento di quadrupolo elettrico

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3} \quad (4.21)$$

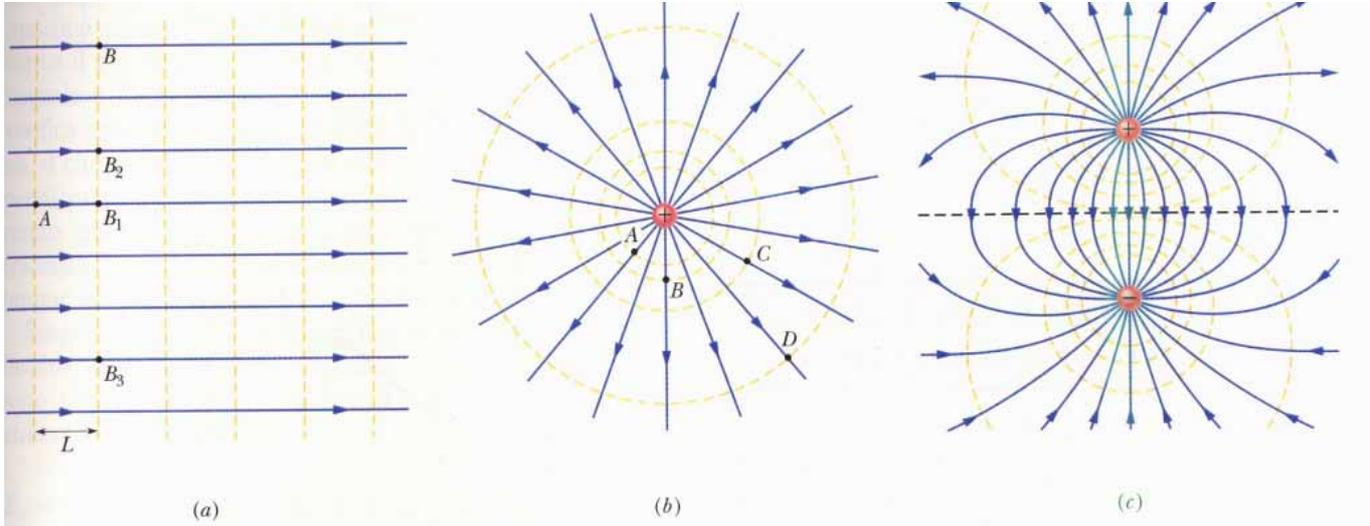
## Distribuzione continua di carica



$$V = \int dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} \quad (4.22)$$

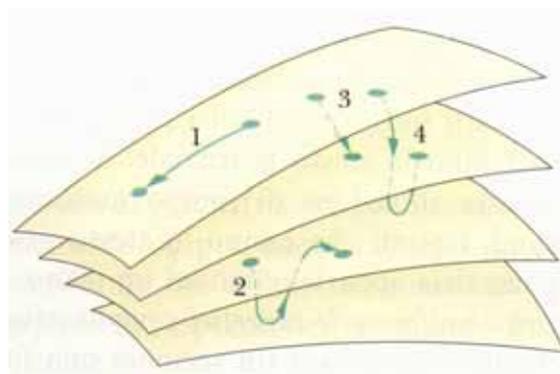
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{R^2 + z^2}} \quad (4.23)$$

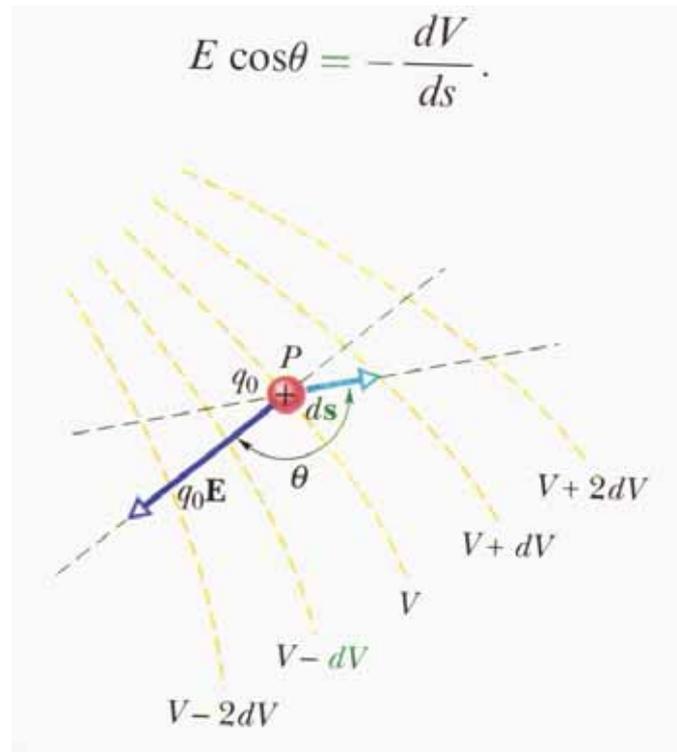
## Superfici equipotenziali



Per un campo elettrico uniforme le superfici equipotenziali sono piane

Le superfici equipotenziali di una carica puntiforme formano una famiglia di superfici sferiche concentriche





$$dL = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = q_0 E ds \cos \theta \quad (4.24)$$

$$-q_0 dV = q_0 E ds \cos \theta \quad (4.25)$$

$$E \cos \theta = -\frac{dV}{ds} \quad (4.26)$$

$$E_s = -\frac{dV}{ds} \quad (4.27)$$

La variazione infinitesimale di potenziale cambiata di segno e divisa per il corrispondente spostamento elementare in una direzione qualsiasi è la componente di  $\mathbf{E}$  in quella direzione

$$E = \left( -\frac{dV}{ds} \right)_{max} \quad (4.28)$$

gradiente del potenziale nel punto

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (4.29)$$

L'operatore vettoriale differenziale *nabla*  $\nabla$  è definito dalla seguente relazione

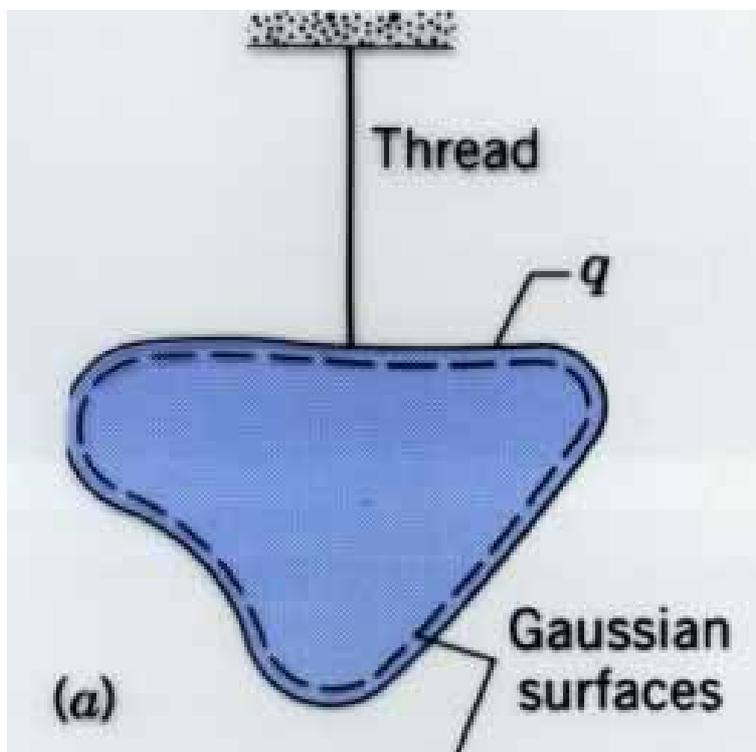
$$\nabla = \mathbf{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{u}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -grad V \quad (4.30)$$

## Conduttore carico isolato

*La carica in eccesso si sposta totalmente sulla superficie esterna del conduttore. Tutti i punti del conduttore assumono lo stesso potenziale*

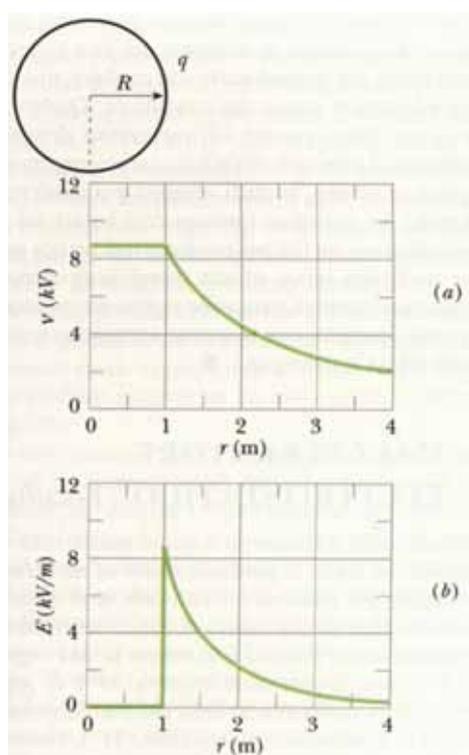
*Il campo elettrico è perpendicolare alla superficie esterna del conduttore*



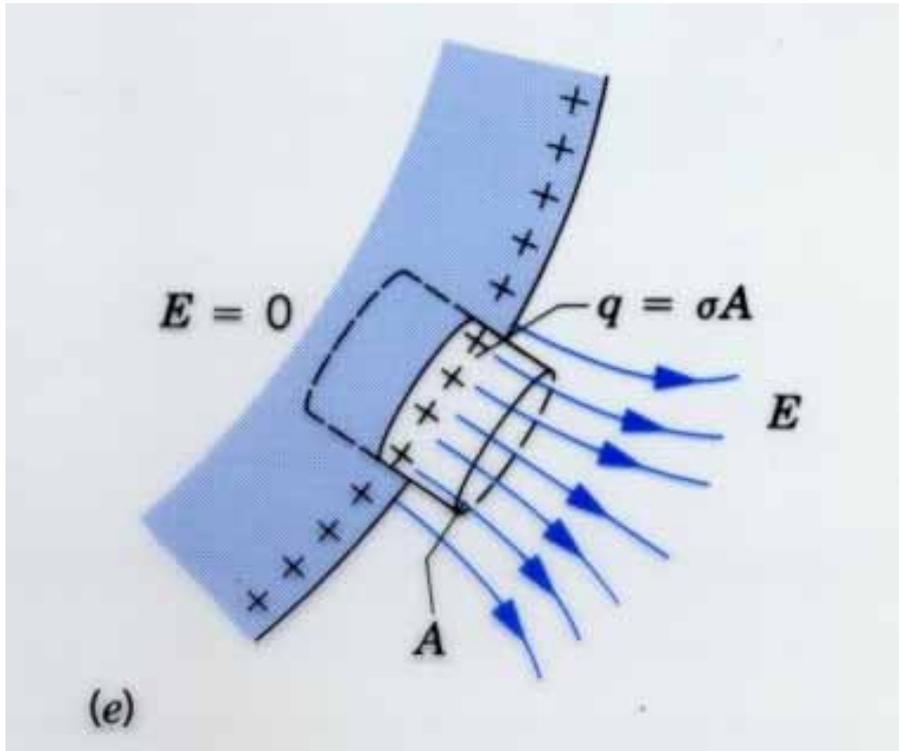
$$E = 0 \quad (4.31)$$

Per  $a$  e  $b$  interni

$$\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 \Rightarrow V_a = V_b \quad (4.32)$$



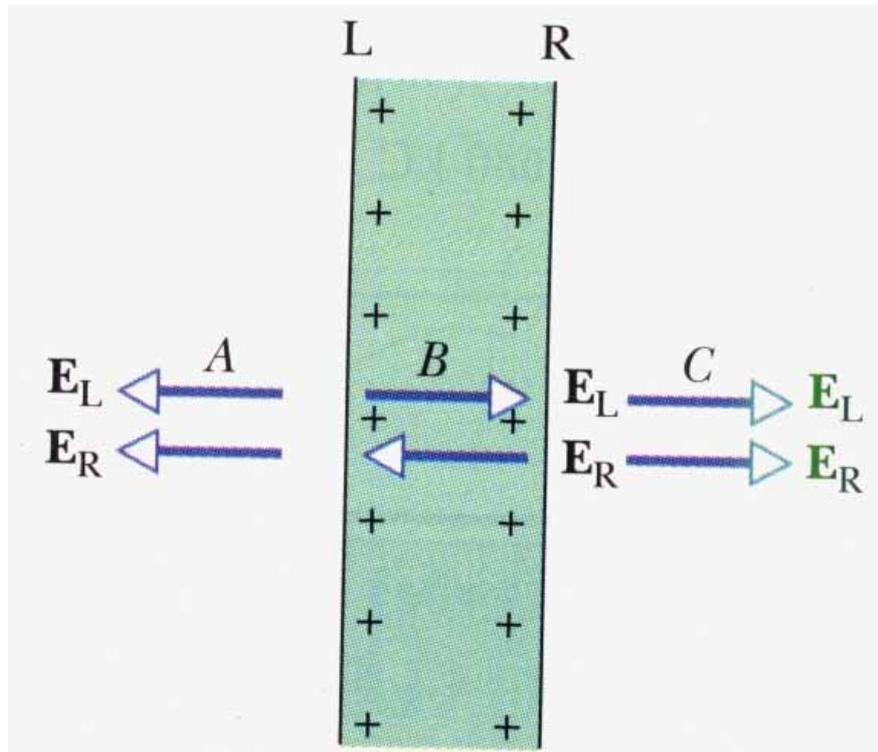
## Teorema di Coulomb



$$\begin{aligned}
 \Phi_E &= \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \\
 &= \int_{base\ ext} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} + \int_{base\ int} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} + \int_{sup\ lat} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = EA
 \end{aligned}
 \tag{4.33}$$

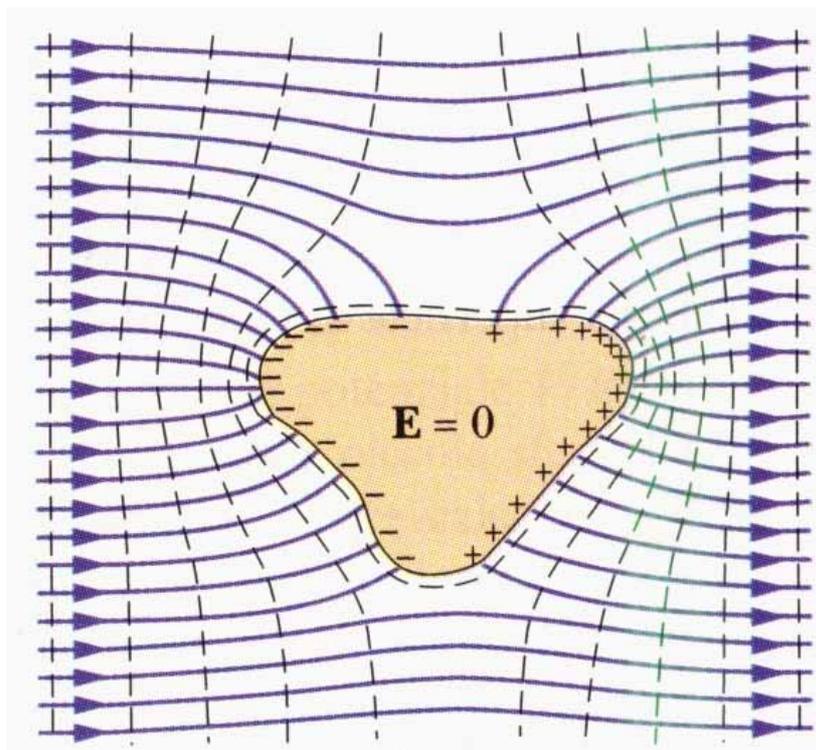
$$\epsilon_0 EA = \sigma A
 \tag{4.34}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}
 \tag{4.35}$$



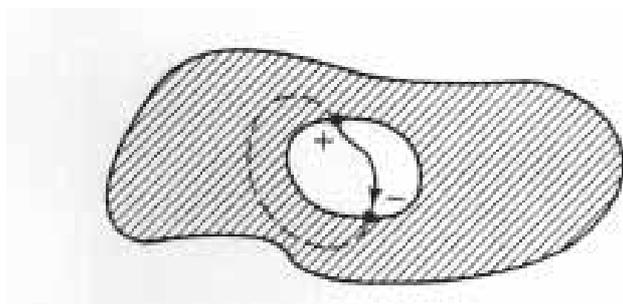
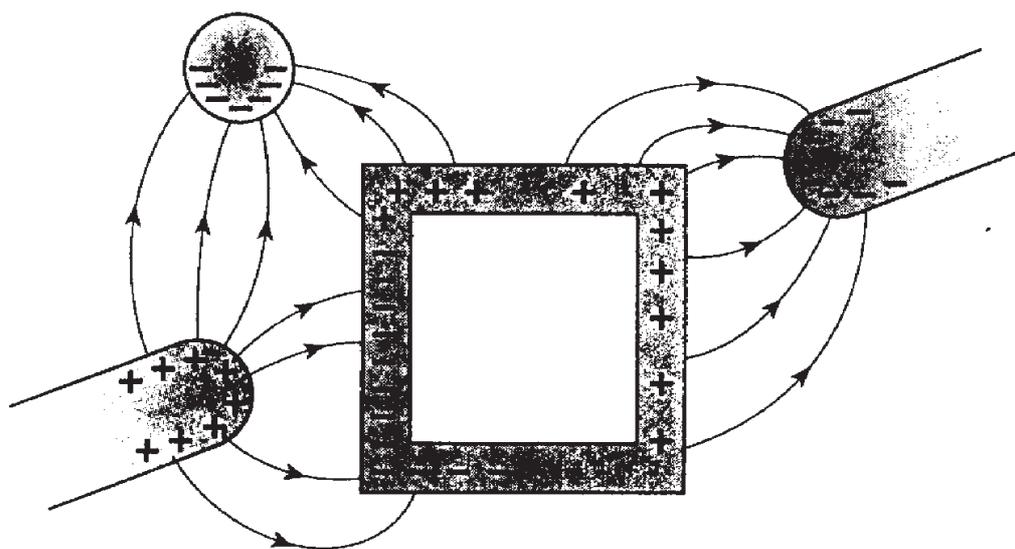
$$E_L = E_R = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (4.36)$$

## Induzione elettrostatica

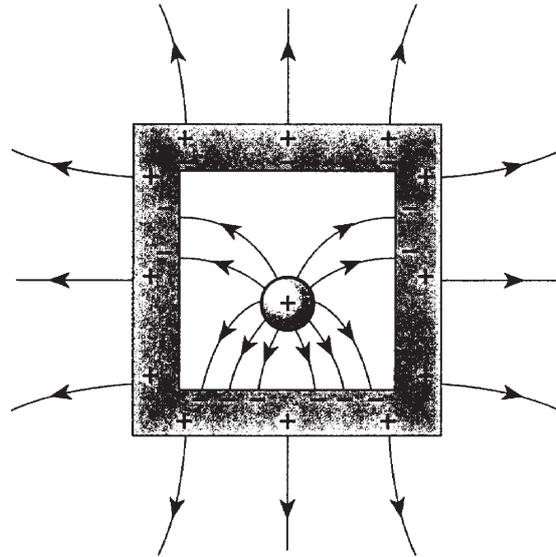


Conduttore scarico immerso in un campo elettrostatico uniforme

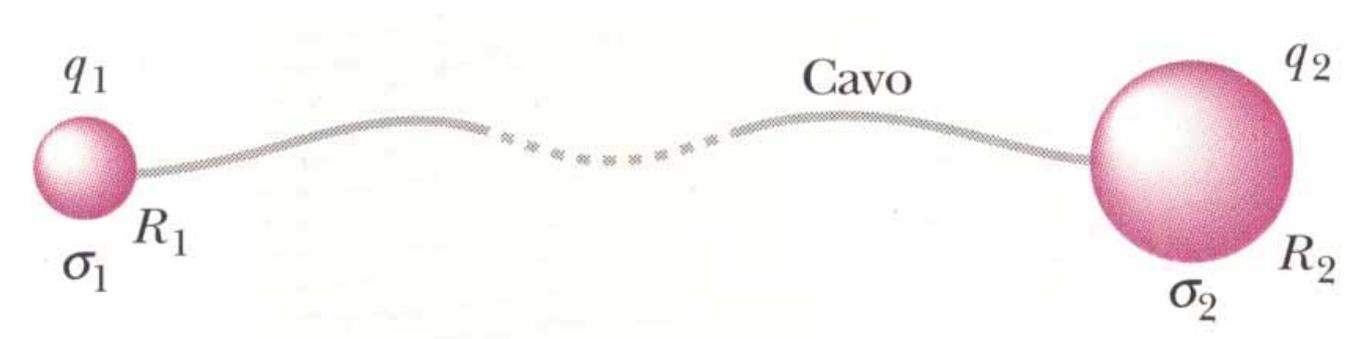
## Schermo elettrostatico



Il campo elettrico dentro la cavità è nullo. La circuitazione di  $\mathbf{E}$  lungo la linea sarebbe positiva, impossibile.



## Effetto delle punte



$$V_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} \quad (4.37)$$

$$V_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \quad (4.38)$$

$$V = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \quad (4.39)$$

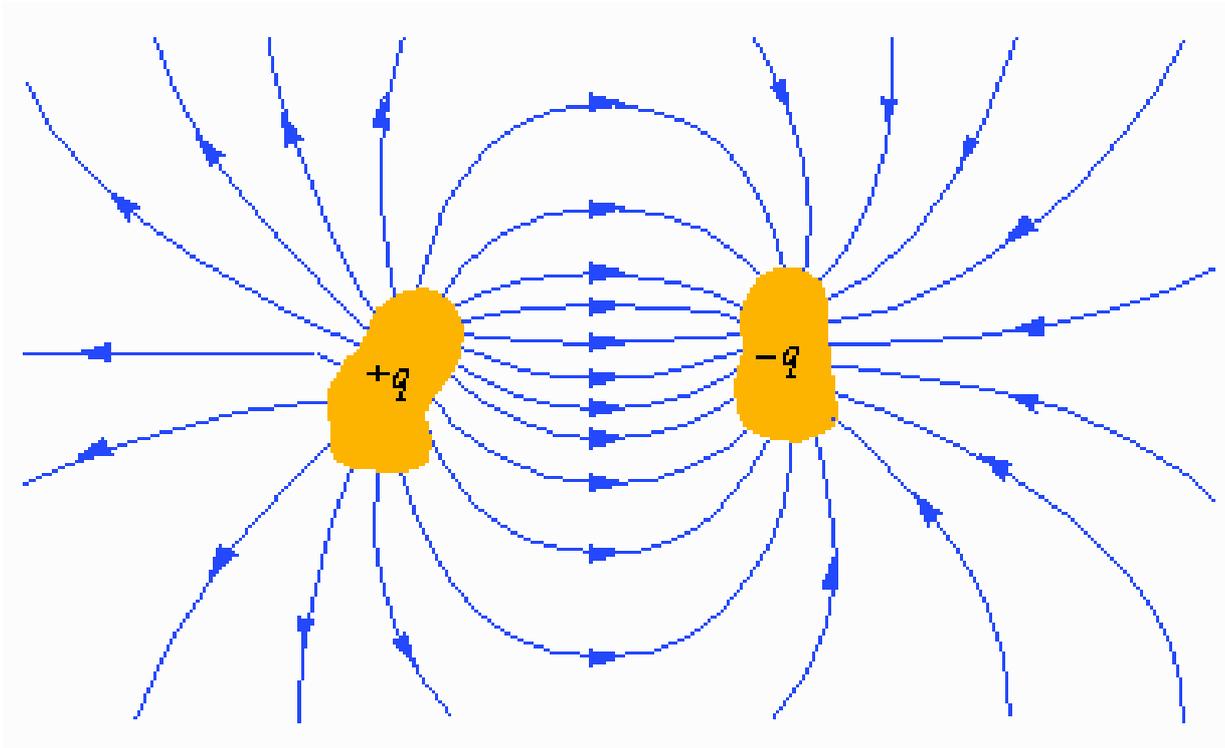
$$E_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} \quad (4.40)$$

$$E_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} \quad (4.41)$$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\epsilon_0 E_1}{\epsilon_0 E_2} = \frac{V/R_1}{V/R_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad (4.42)$$

*In un conduttore ad un dato potenziale il campo elettrostatico risulta maggiore nelle vicinanze dei punti della superficie in cui la curvatura è maggiore*

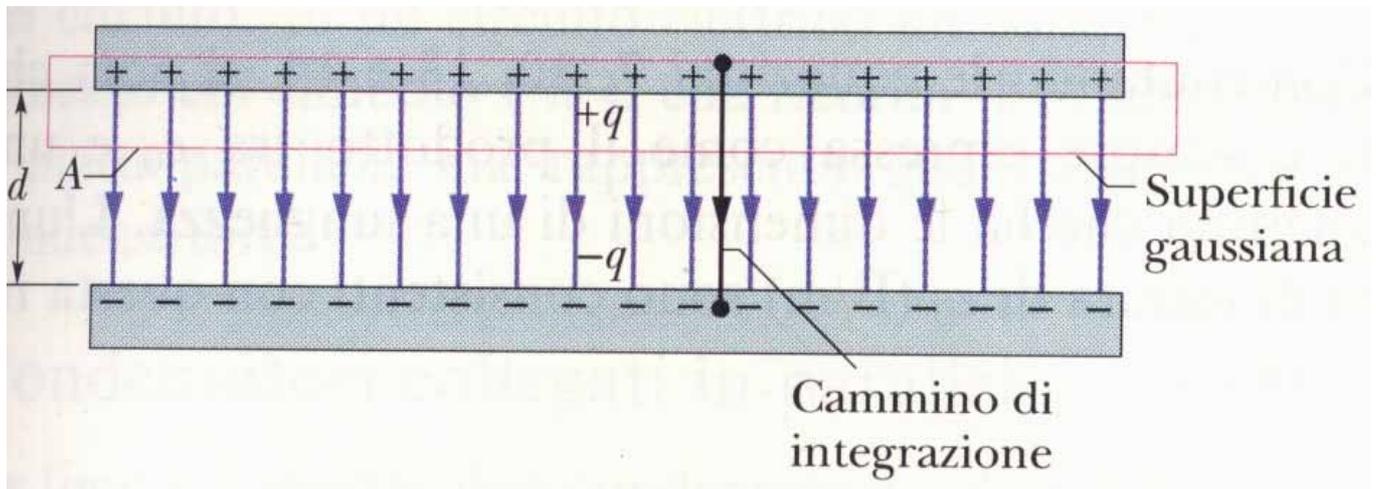
## Condensatori e dielettrici



$$q = CV \quad (4.43)$$

$$1 \text{ farad} = 1 \text{ coulomb/volt} \quad (4.44)$$

## Condensatore a piatti paralleli



$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = q \quad (4.45)$$

$$\epsilon_0 EA = q \quad (4.46)$$

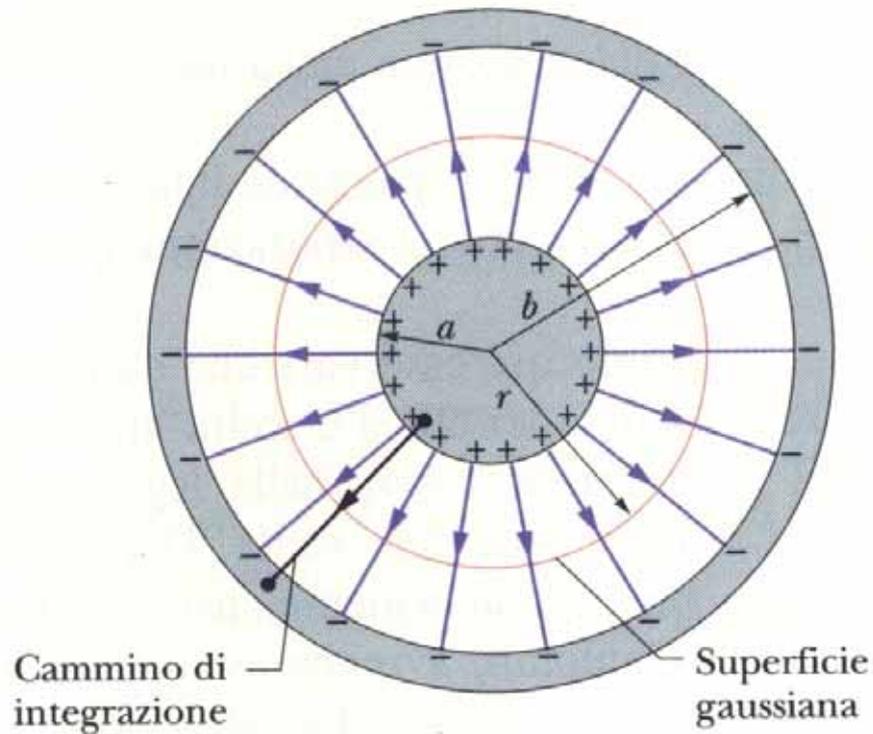
$$V_f - V_i = - \int_i^f \mathbf{E} \cdot ds \quad (4.47)$$

$$V = \int_-^+ E ds = \frac{q}{\epsilon_0 A} \int_0^d ds = \frac{qd}{\epsilon_0 A} \quad (4.48)$$

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad (4.49)$$

$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} F/m \quad (4.50)$$

## Condensatore cilindrico



$$q = \epsilon_0 E A = \epsilon_0 E (2\pi r L) \quad (4.51)$$

$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r L} \quad (4.52)$$

$$V = \int_{-}^{+} E ds = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \left( \frac{b}{a} \right) \quad (4.53)$$

$$C = 2\pi\epsilon_0 \frac{L}{\ln(b/a)} \quad (4.54)$$

## Condensatore sferico

$$q = \epsilon_0 E A = \epsilon_0 E (4\pi r^2) \quad (4.55)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (4.56)$$

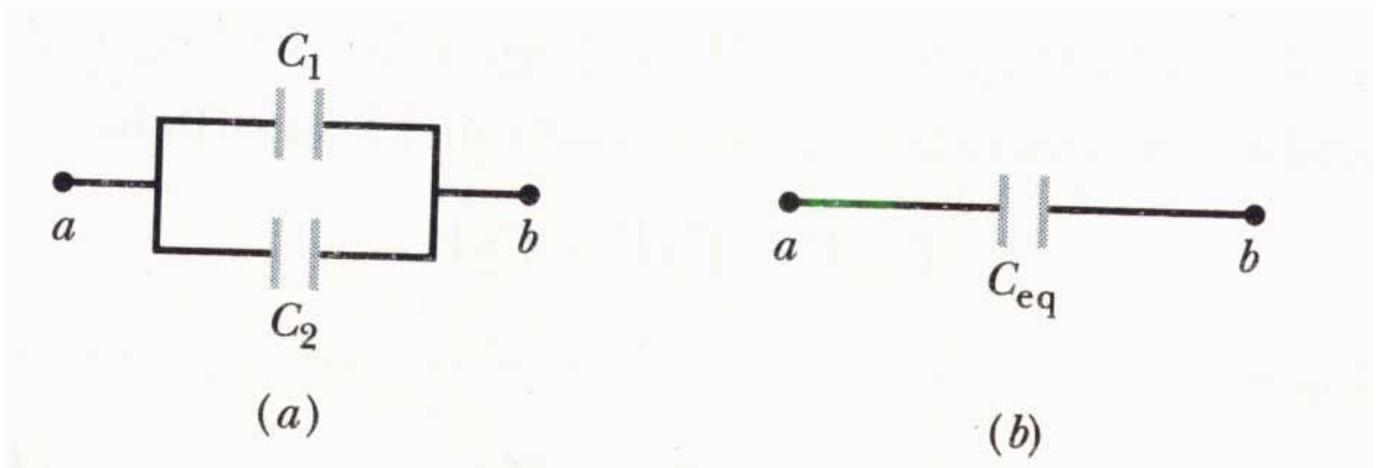
$$V = \int_{-}^{+} E ds = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{b-a}{ab} \quad (4.57)$$

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a} \quad (4.58)$$

Se  $b \rightarrow \infty$

$$C = 4\pi\epsilon_0 R \quad (4.59)$$

## Condensatori in parallelo



$$q_1 = C_1 V \quad q_2 = C_2 V \quad (4.60)$$

$$q = q_1 + q_2 \quad (4.61)$$

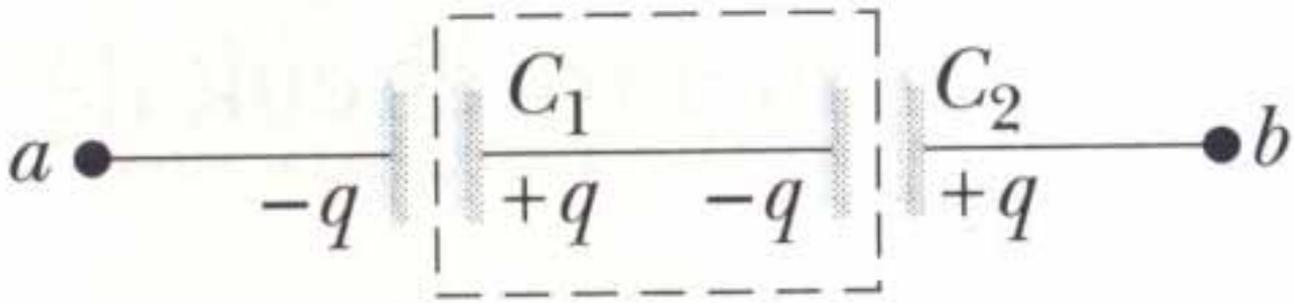
$$q = C_{eq} V \quad (4.62)$$

$$C_{eq} V = C_1 V + C_2 V \quad (4.63)$$

$$C_{eq} = C_1 + C_2 \quad (4.64)$$

$$C_{eq} = \sum_n C_n \quad (4.65)$$

## Condensatori in serie



$$V_1 = \frac{q}{C_1} \quad V_2 = \frac{q}{C_2} \quad (4.66)$$

$$V = V_1 + V_2 \quad (4.67)$$

$$V = \frac{q}{C_{eq}} \quad (4.68)$$

$$\frac{q}{C_{eq}} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} \quad (4.69)$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (4.70)$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_n \frac{1}{C_n} \quad (4.71)$$

## Energia del Campo Elettrico

$$dU = V' dq' = \frac{q'}{C} dq' \quad (4.72)$$

$$U = \int dU = \int_0^q \frac{q'}{C} dq' = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \quad (4.73)$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} qV = \frac{1}{2} CV^2 \quad (4.74)$$

Condensatore a facce piane parallele

$$U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{\epsilon_0 AV^2}{2d} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 Ad \quad (4.75)$$

$$u = \frac{U}{Sd} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (4.76)$$

A una regione dello spazio sede di un campo elettrico  $\mathbf{E}$  può essere associata una densità di energia  $\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$

## Metodo delle cariche immagini

Il problema generale dell'elettrostatica consiste nel determinare il campo elettrico in tutto lo spazio quando:

- $V$  è fissato per alcuni conduttori
- $Q$  totale è assegnata per i restanti conduttori
- Nel resto dello spazio è nota la distribuzione di eventuali cariche (puntiformi, di volume, ...)

La soluzione a tale problema *esiste ed è unica*

Consideriamo una carica puntiforme  $q$  esterna a un conduttore collegato a terra. Sulla superficie del conduttore si produce una distribuzione di carica tale da renderlo equipotenziale.

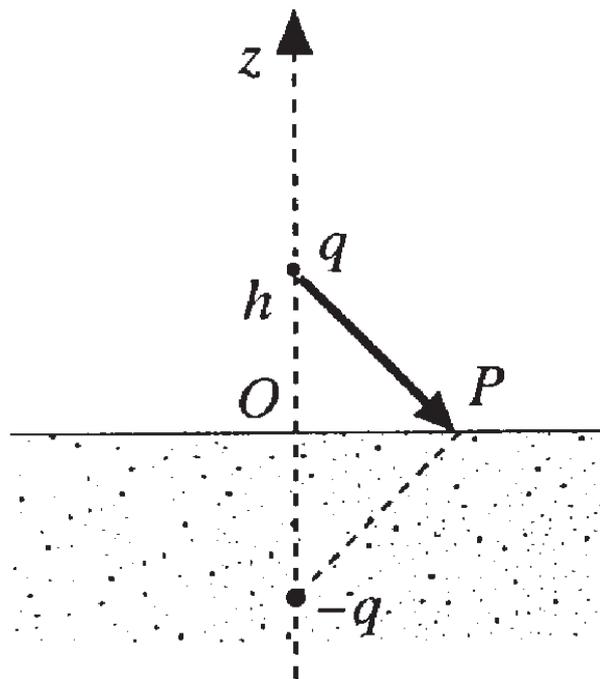
Per determinare tale distribuzione, con il metodo delle cariche

immagini, si individuano una o più cariche fittizie  $q'$  interne allo spazio occupato dal conduttore

Le posizioni delle cariche fittizie sono individuate in modo da generare nello spazio esterno al conduttore la stessa configurazione di potenziale prodotta dalla carica  $q$  e dalla distribuzione di carica  $\sigma$  sulla superficie del conduttore

Le due configurazioni reale e fittizia (per l'unicità della soluzione) coincidono nella zona di spazio esterna al conduttore

### Carica puntiforme esterna a un conduttore piano messo a terra



La carica immagine vale  $q' = -q$  ed è situata sull'asse  $z$  nel punto di coordinata  $z = -h$

Infatti la somma dei potenziali indotti dalle due cariche  $q$  e  $q'$  è nullo in tutto i punti della superficie  $S$  del conduttore

In un punto  $P(x, y, 0)$  della superficie l'intensità del campo

elettrico è

$$\mathbf{E} = -\frac{2qh}{4\pi\epsilon_0(h^2 + x^2 + y^2)^{3/2}}\mathbf{u}_z \quad (4.77)$$

Per il teorema di Coulomb, la densità superficiale di cariche risulta

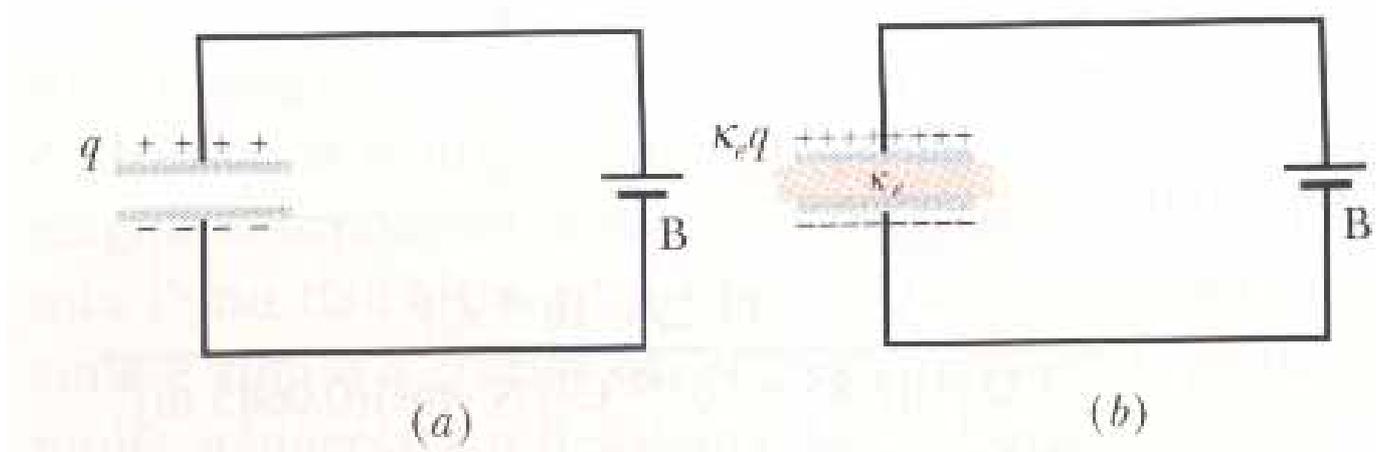
$$\sigma(x, y) = \epsilon_0 E = -\frac{qh}{2\pi(h^2 + x^2 + y^2)^{3/2}} \quad (4.78)$$

Integrando  $\sigma(x, y)$  su tutta la superficie del conduttore, si ottiene la carica totale indotta su  $S$ , che risulta uguale a  $-q$

La forza agente sulla carica  $q$  risulta

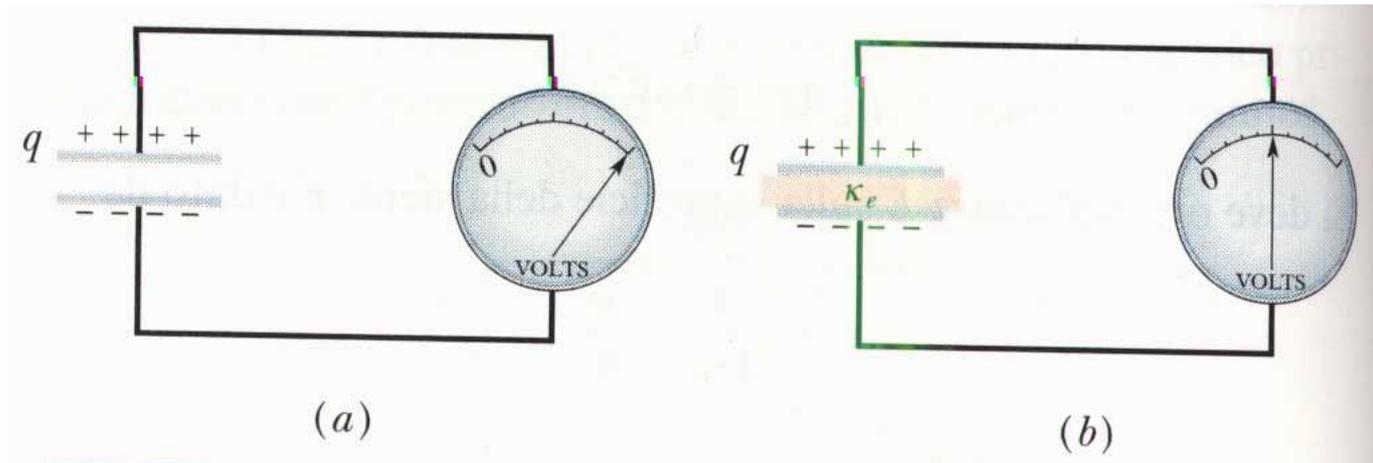
$$\mathbf{F} = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 h^2}\mathbf{u}_z \quad (4.79)$$

## Dielettrici



La carica sul condensatore riempito di dielettrico è maggiore

$$\epsilon_r = C/C_0 \quad (4.80)$$



La ddp sulle armature del condensatore si riduce di un fattore  $\epsilon_r$

$$U_f = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2C_0\epsilon_r} = \frac{U_i}{\epsilon_r} \quad (4.81)$$

$$L = U_i - U_f > 0 \quad (4.82)$$

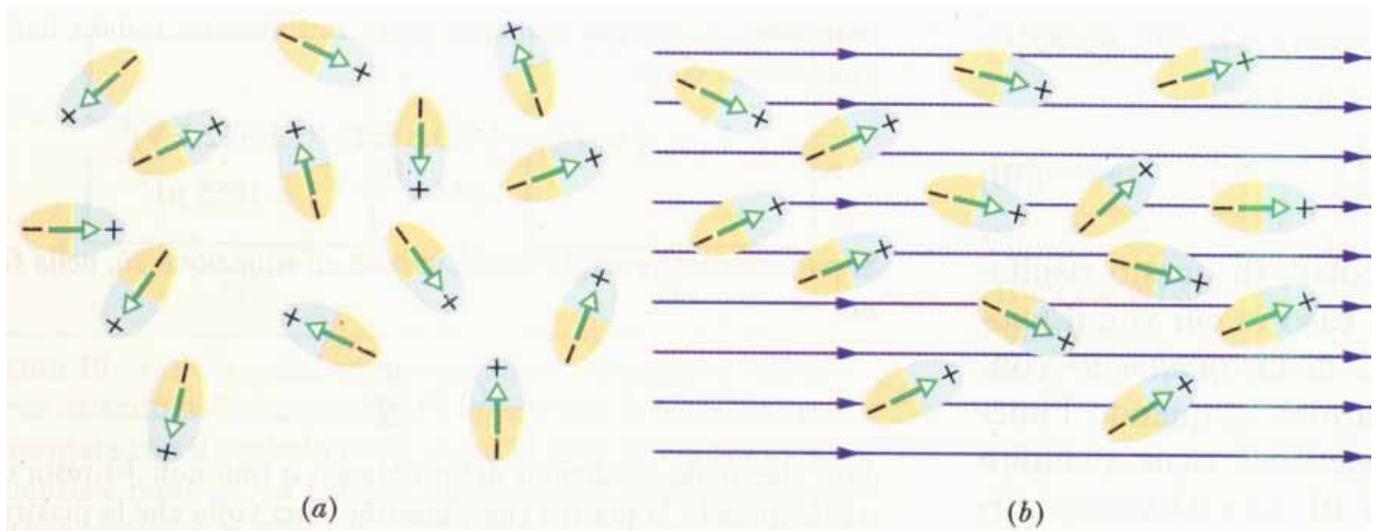
Condensatore a facce piane e parallele riempito con dielettrico

$$C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad (4.83)$$

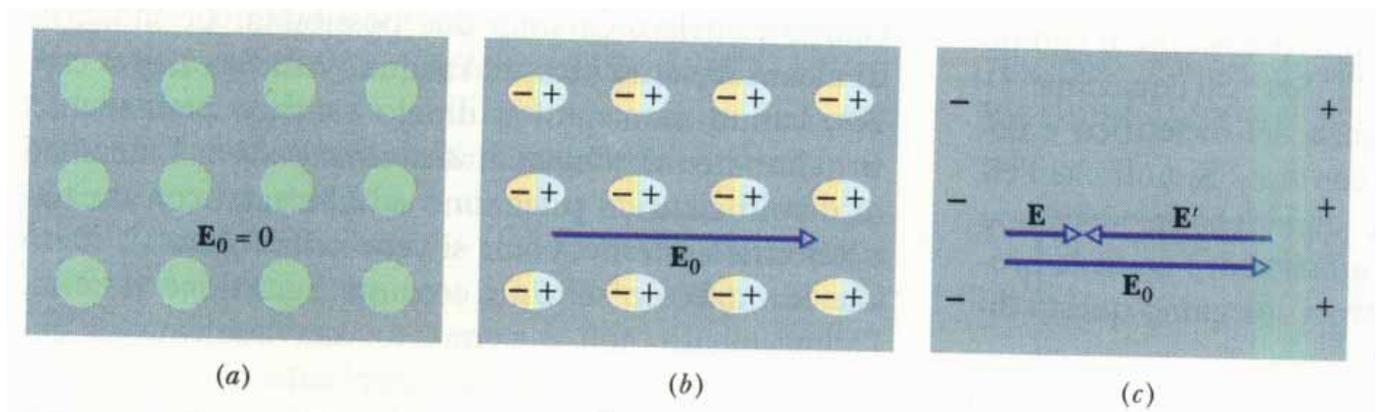
Campo elettrico di una carica  $q$  immersa in un dielettrico

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (4.84)$$

dielettrici polari

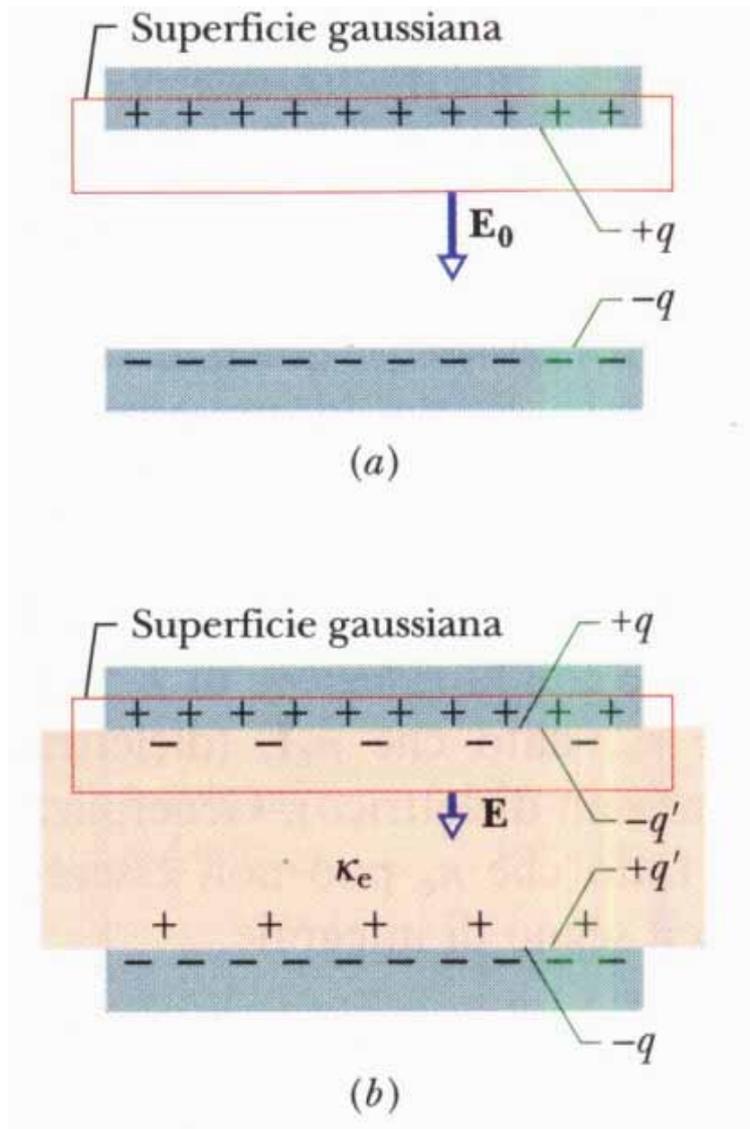


dielettrici non polari



*Quando si pone un dielettrico in un campo elettrico appaiono cariche superficiali indotte che tendono a indebolire il campo all'interno del dielettrico*

## Legge di Gauss per i dielettrici



$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \epsilon_0 E_0 A = q \quad (4.85)$$

$$E_0 = \frac{q}{\epsilon_0 A} \quad (4.86)$$

$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \epsilon_0 E A = q - q' \quad (4.87)$$

$$E = \frac{q}{\epsilon_0 A} - \frac{q'}{\epsilon_0 A} \quad (4.88)$$

$$E = \frac{E_0}{\epsilon_r} = \frac{q}{\epsilon_r \epsilon_0 A} \quad (4.89)$$

$$\frac{q}{\epsilon_r \epsilon_0 A} = \frac{q}{\epsilon_0 A} - \frac{q'}{\epsilon_0 A} \quad (4.90)$$

$$q' = q \left( 1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) \quad (4.91)$$

$$\epsilon_0 \oint \epsilon_r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = q \quad (4.92)$$

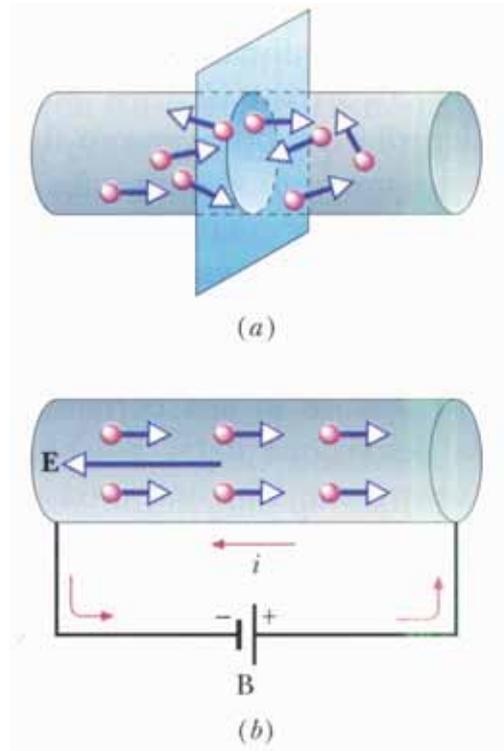
Si definisce *induzione elettrica*

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \quad (4.93)$$

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = q \quad (4.94)$$

*Il flusso del campo  $\mathbf{D}$  attraverso una superficie chiusa è pari alla sola carica libera contenuta*

## 5 Correnti elettriche



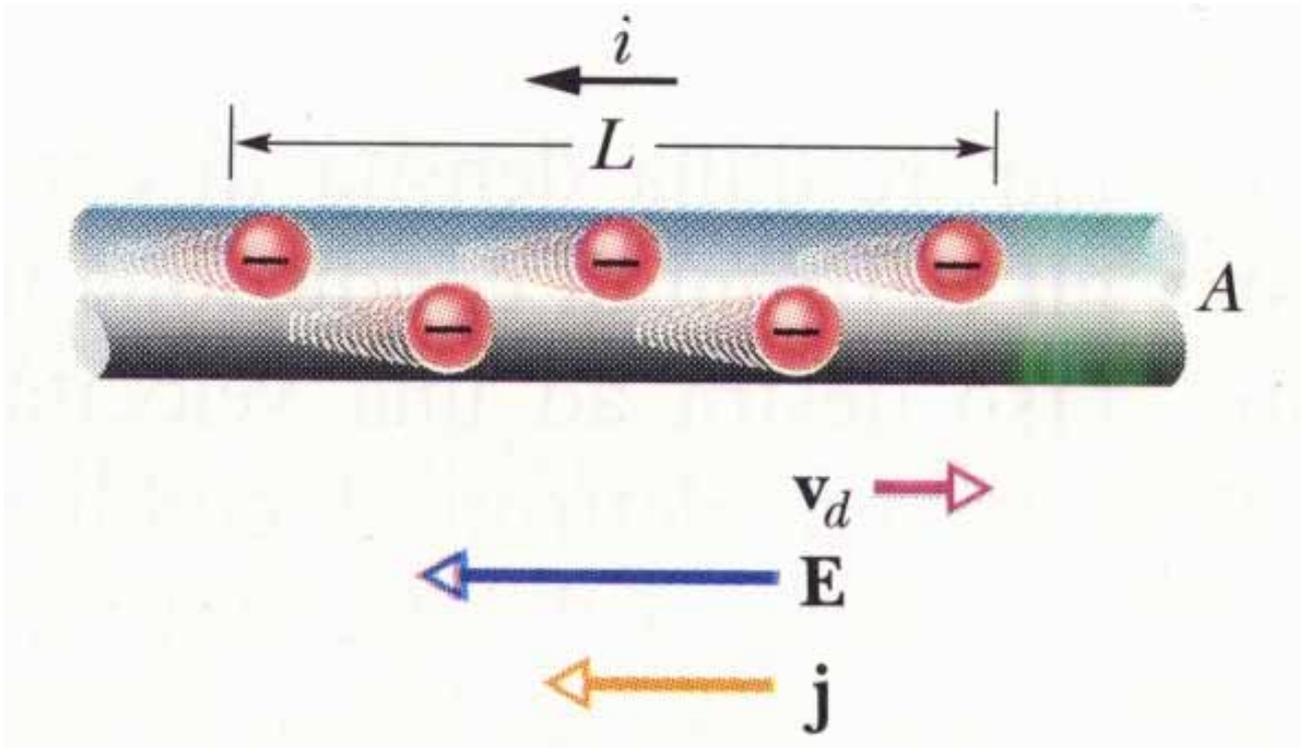
$$i = \frac{dq}{dt} \quad (5.1)$$

$$1 \text{ Ampere} = 1 \text{ Coulomb/secondo} \quad (5.2)$$

$$q = \int i dt \quad (5.3)$$

*Il verso della corrente è quello nel quale si muoverebbero le cariche positive, anche se gli effettivi portatori di carica sono negativi*

## Densità di corrente



$$i = \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} \quad (5.4)$$

$\mathbf{j}$  densità di corrente

$$q = (nAL)e \quad (5.5)$$

$$t = \frac{L}{v_d} \quad (5.6)$$

$$i = \frac{q}{t} = \frac{nALe}{L/v_d} = nAev_d \quad (5.7)$$

$$v_d = \frac{i}{nAe} = \frac{j}{ne} \quad (5.8)$$

$v_d$  velocità di deriva

$$\mathbf{j} = -nev_d \quad (5.9)$$

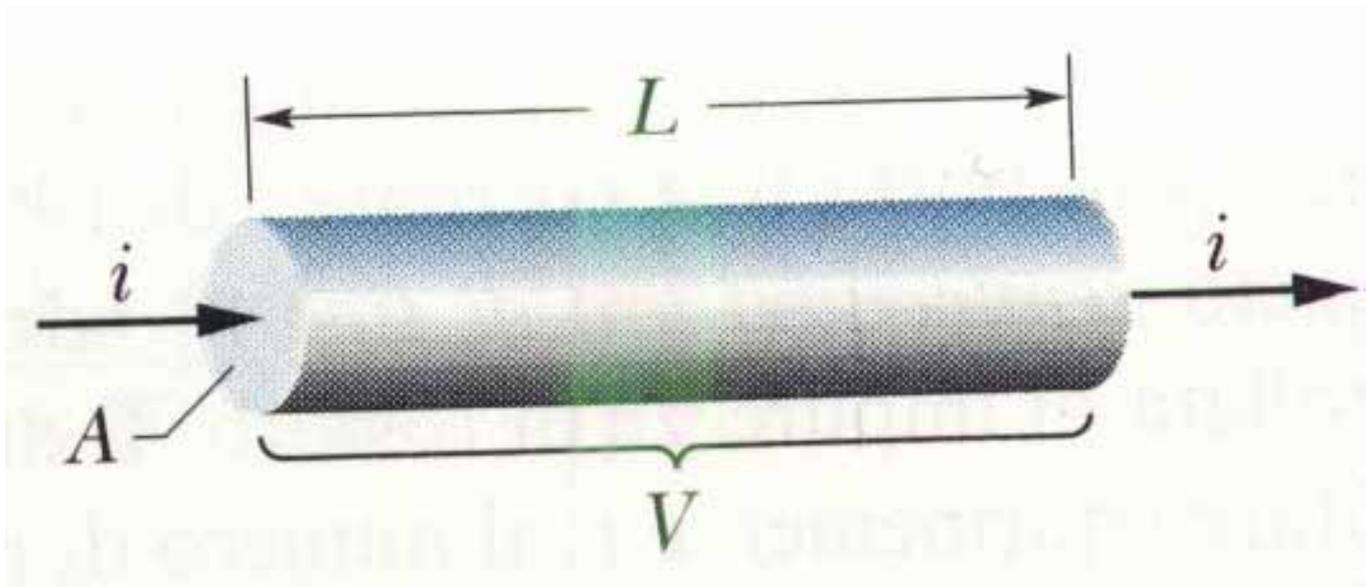
## Resistenza

$$R = V/i \quad (5.10)$$

*resistenza*

$$1 \text{ ohm} = 1 \text{ volt/ampere} \quad (5.11)$$

*Un oggetto conduttore obbedisce alla legge di Ohm se la resistenza tra due punti qualsiasi è indipendente dal valore e dalla polarità della differenza di potenziale applicata*



$$R = \frac{\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}}{\int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A}} \quad (5.12)$$

$$R = \frac{EL}{Aj} \quad (5.13)$$

$$E = \frac{AR}{L}j = \rho j \quad (5.14)$$

$\rho$  resistività

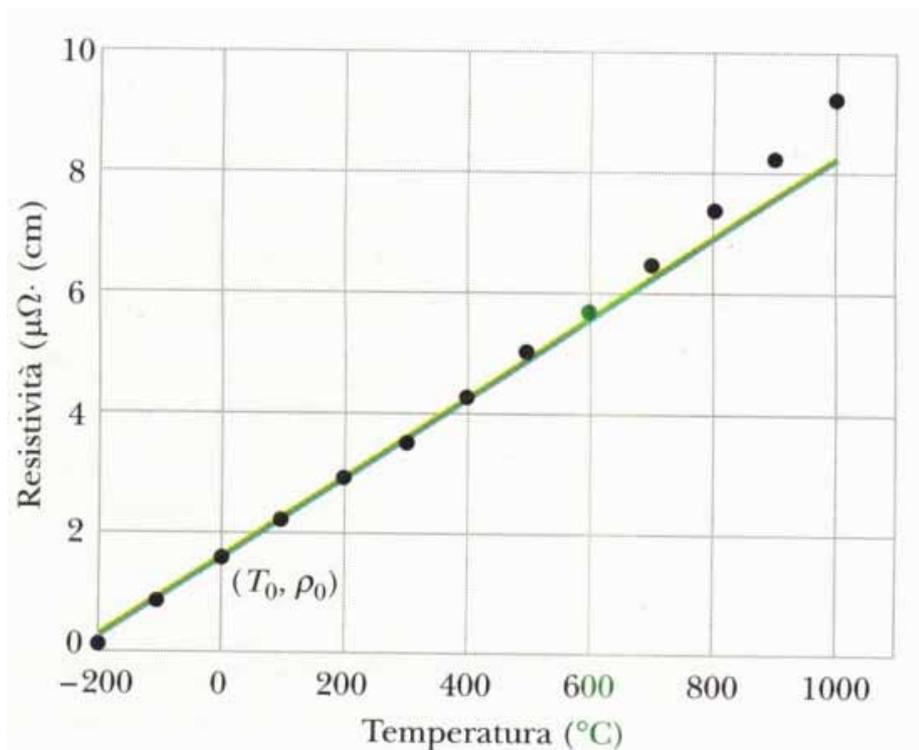
$$R = \rho \frac{L}{A} \quad (5.15)$$

$$\mathbf{E} = \rho \mathbf{j} \quad (5.16)$$

$\sigma$  conducibilità

$$\sigma = 1/\rho \quad (5.17)$$

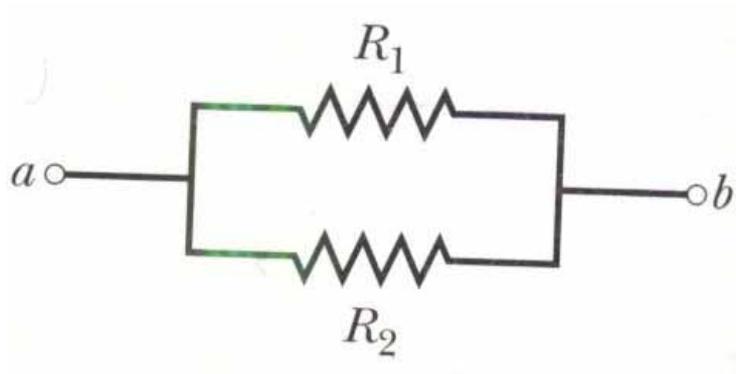
$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (5.18)$$



$\alpha$  coefficiente termico medio

$$\rho - \rho_0 = \rho_0 \bar{\alpha} (T - T_0) \quad (5.19)$$

## Resistenze in parallelo



$$i_1 = \frac{V}{R_1} \quad i_2 = \frac{V}{R_2} \quad (5.20)$$

$$i = i_1 + i_2 \quad (5.21)$$

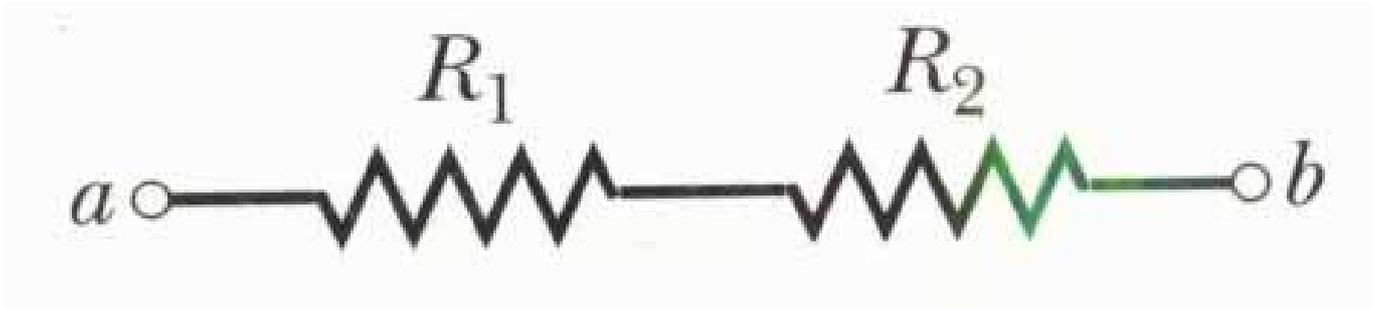
$$i = \frac{V}{R_{eq}} \quad (5.22)$$

$$\frac{V}{R_{eq}} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} \quad (5.23)$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (5.24)$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_n \frac{1}{R_n} \quad (5.25)$$

## Resistenze in serie



$$V_1 = R_1 i \quad V_2 = R_2 i \quad (5.26)$$

$$V = V_1 + V_2 \quad (5.27)$$

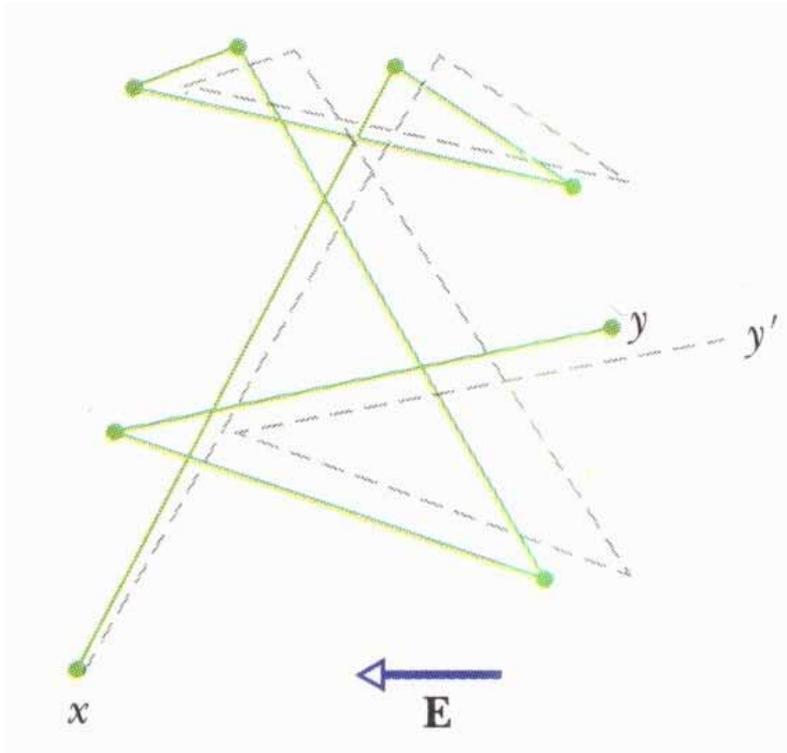
$$V = R_{eq} i \quad (5.28)$$

$$R_{eq} i = R_1 i + R_2 i \quad (5.29)$$

$$R_{eq} = R_1 + R_2 \quad (5.30)$$

$$R_{eq} = \sum_n R_n \quad (5.31)$$

## Modello a elettroni liberi



gas elettronico  $\bar{v} = 1.6 \cdot 10^6 \text{ m/s} \gg v_d \approx 10^{-4} \text{ m/s}$

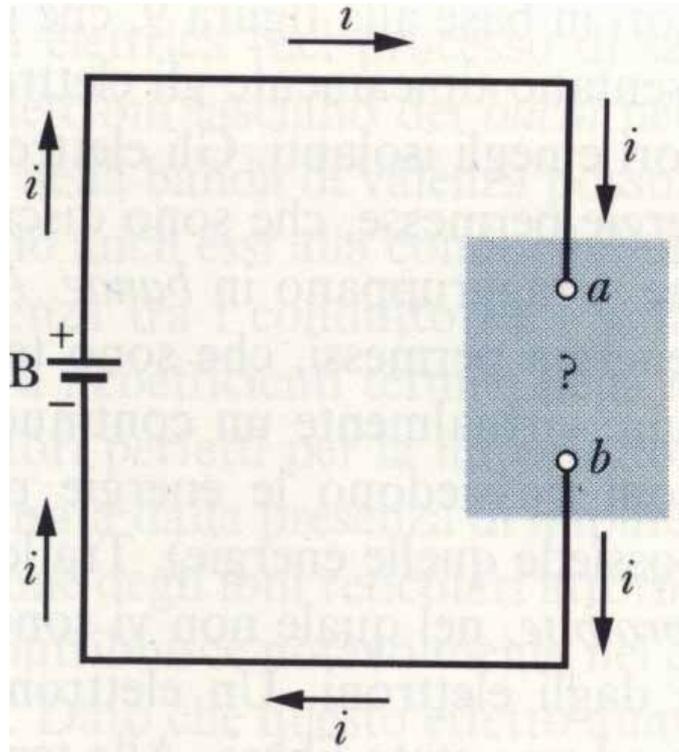
$$a = \frac{eE}{m} \quad (5.32)$$

$$v_d = a\tau = \frac{eE\tau}{m} \quad (5.33)$$

$$v_d = \frac{j}{ne} = \frac{eE\tau}{m} \quad (5.34)$$

$$\rho = \frac{m}{ne^2\tau} \quad (5.35)$$

## Effetto Joule



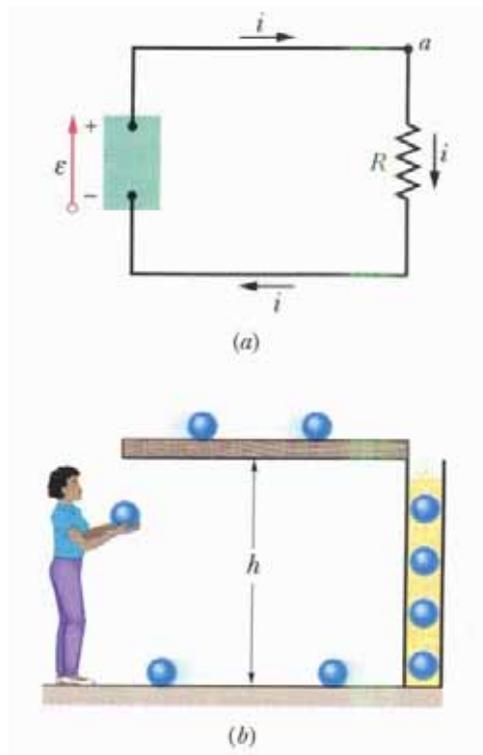
$$-dU = dL = dq V_{ab} = i dt V_{ab} \quad (5.36)$$

$$P = \frac{dU}{dt} = i V_{ab} \quad (5.37)$$

*Effetto Joule*

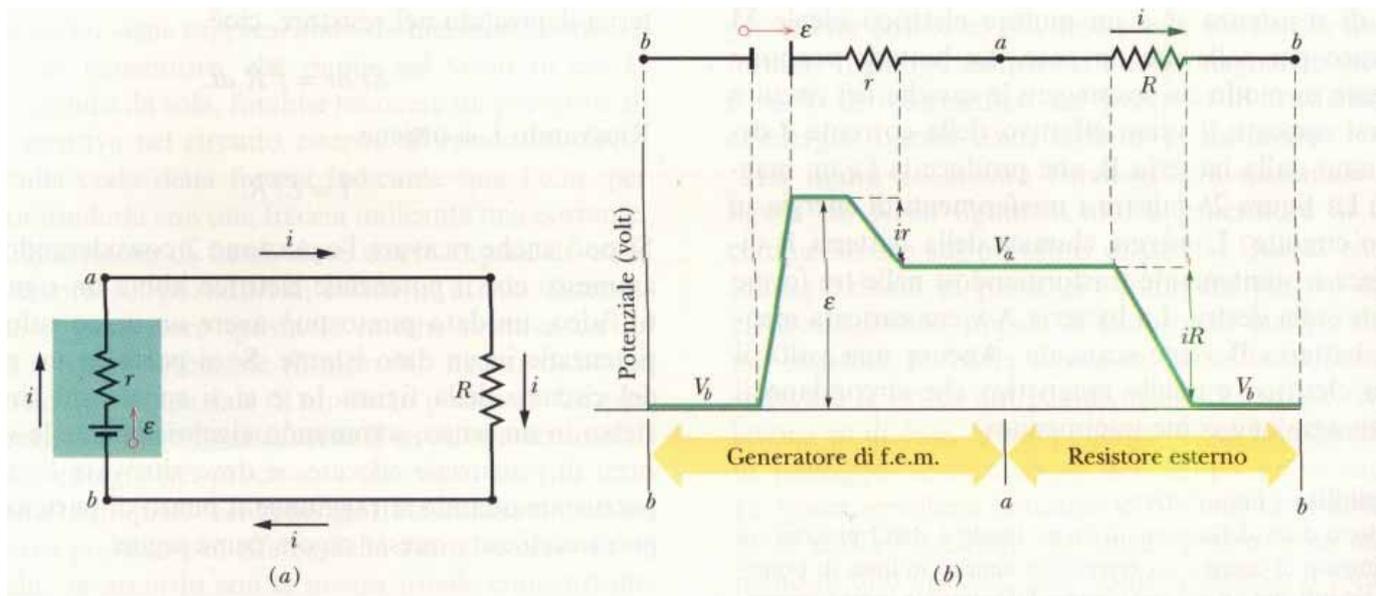
$$P = i^2 R = \frac{V^2}{R} \quad (5.38)$$

# Circuiti elettrici



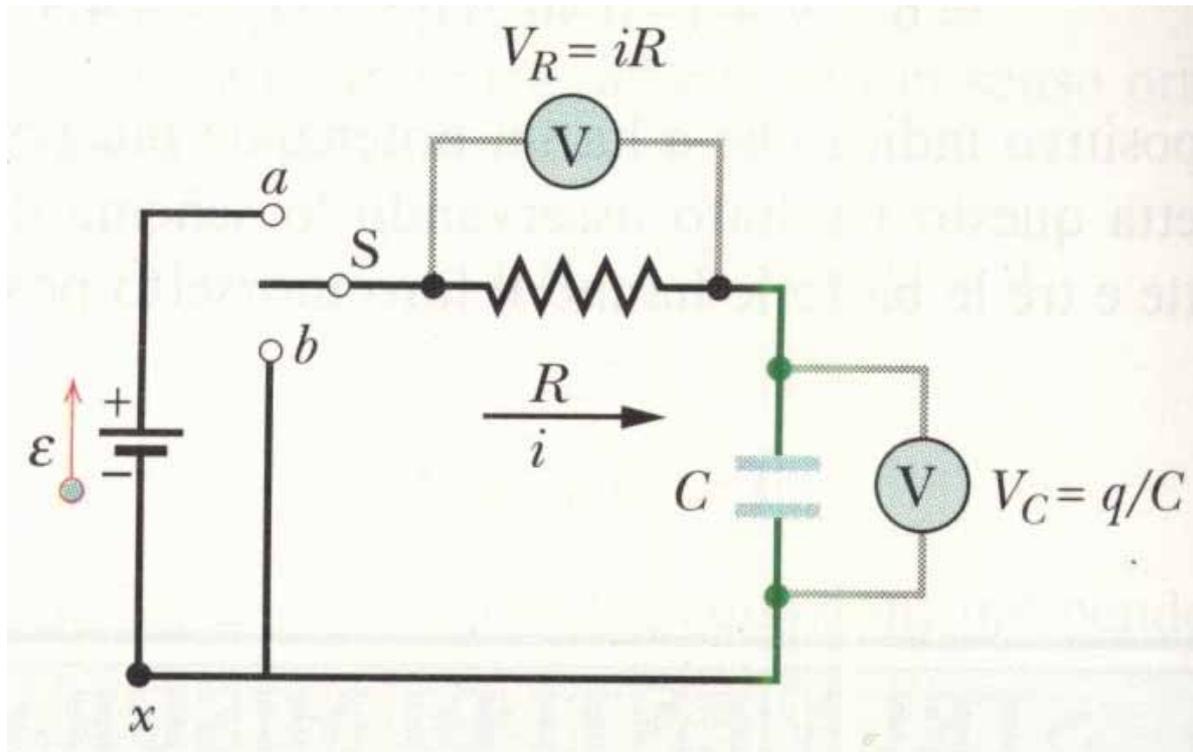
*forza elettromotrice*

$$\mathcal{E} = dL/dq \quad (5.39)$$



*La somma algebrica delle variazioni di potenziale rilevate su un circuito chiuso in un giro completo è nulla*

## Carica di un condensatore



$$\mathcal{E} = Ri + \frac{q}{C} \quad (5.40)$$

$$\mathcal{E} = R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} \quad (5.41)$$

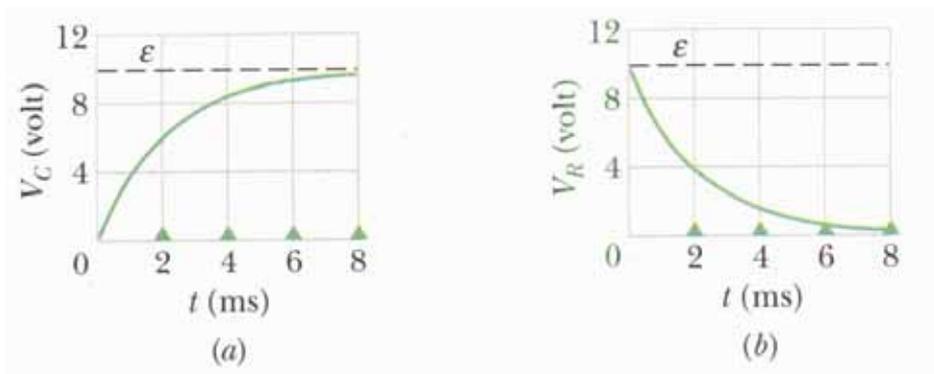
condensatore inizialmente scarico

$$q(t) = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/\tau}) \quad (5.42)$$

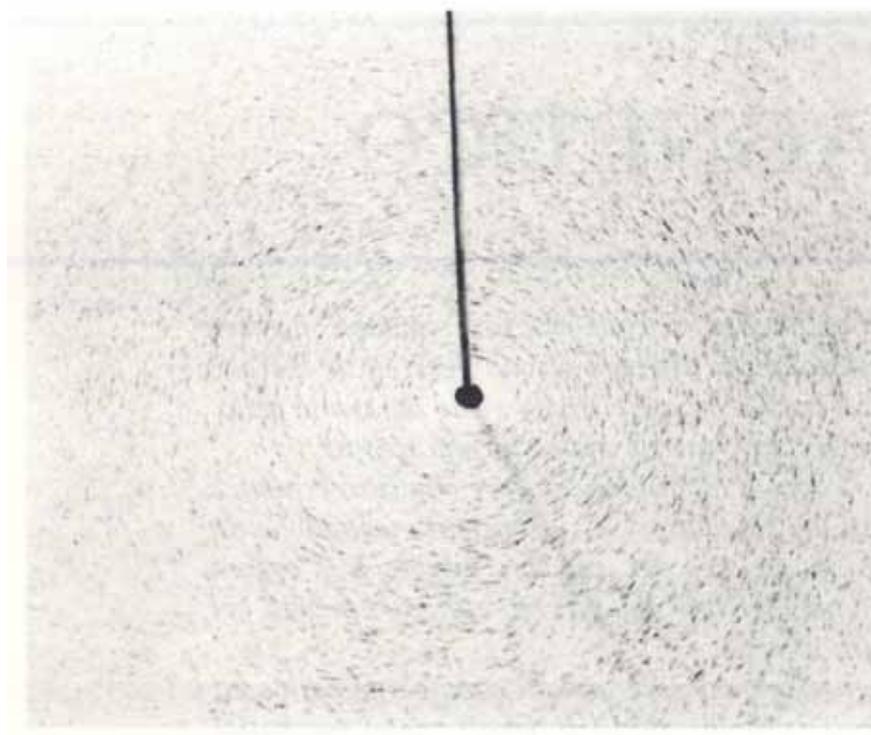
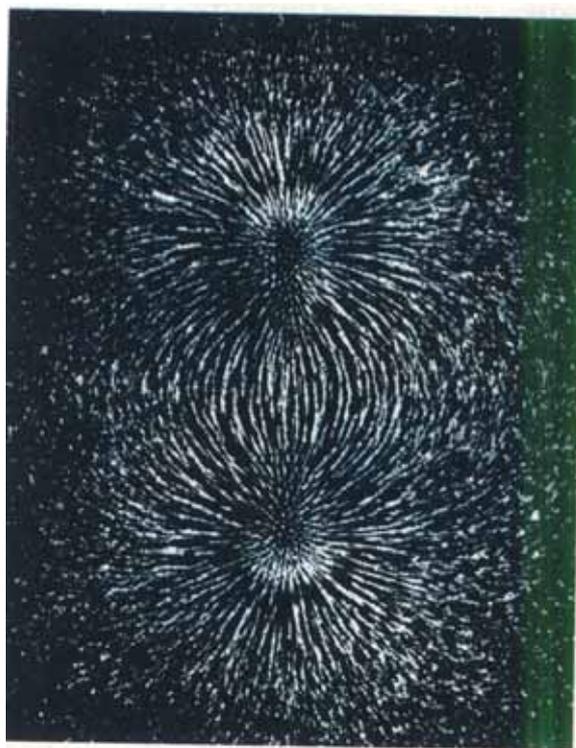
$$\tau = RC \quad (5.43)$$

$\tau$  costante di tempo del circuito

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau} \quad (5.44)$$



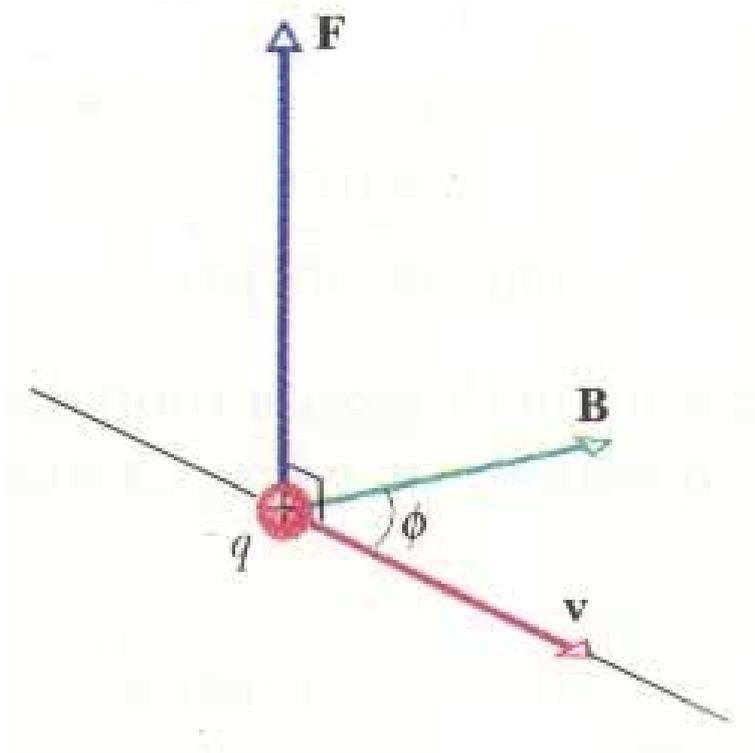
## 6 Il campo magnetico



corrente elettrica  $\leftrightarrow$   $\mathbf{B}$   $\leftrightarrow$  corrente elettrica

*Una carica elettrica in moto produce un campo magnetico che può esercitare una forza magnetica su altre cariche in moto o su correnti*

## Forza magnetica su una carica in moto



$$B = \frac{F_{\perp}}{qv} \quad (6.1)$$

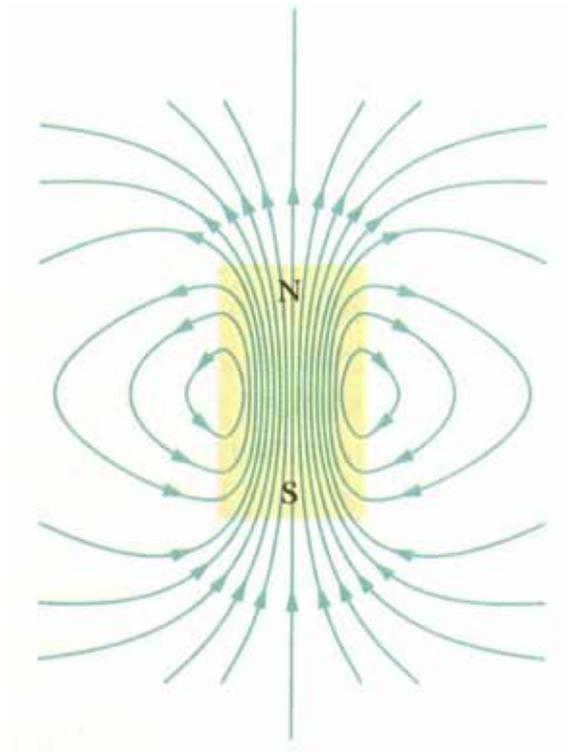
$$F = qvB \sin \phi \quad (6.2)$$

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (6.3)$$

$\mathbf{F} \perp \mathbf{v}$  La forza magnetica non compie lavoro e quindi non cambia l' $E_C$  della particella

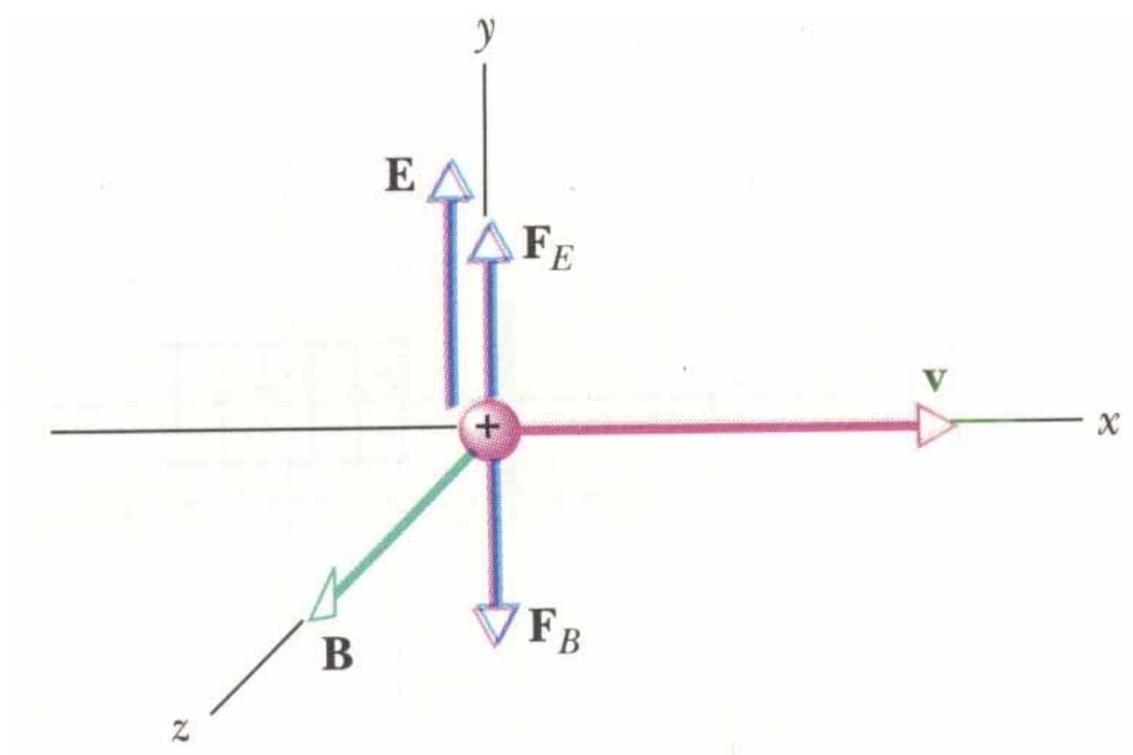
$$1 \text{ tesla} = 1 \frac{\text{newton}}{\text{ampere} \cdot \text{metro}}$$

$$1 \text{ tesla} = 10^4 \text{ gauss}$$



- Linee di forza chiuse
- Polo magnetico *nord* e *sud*

## La forza di Lorentz

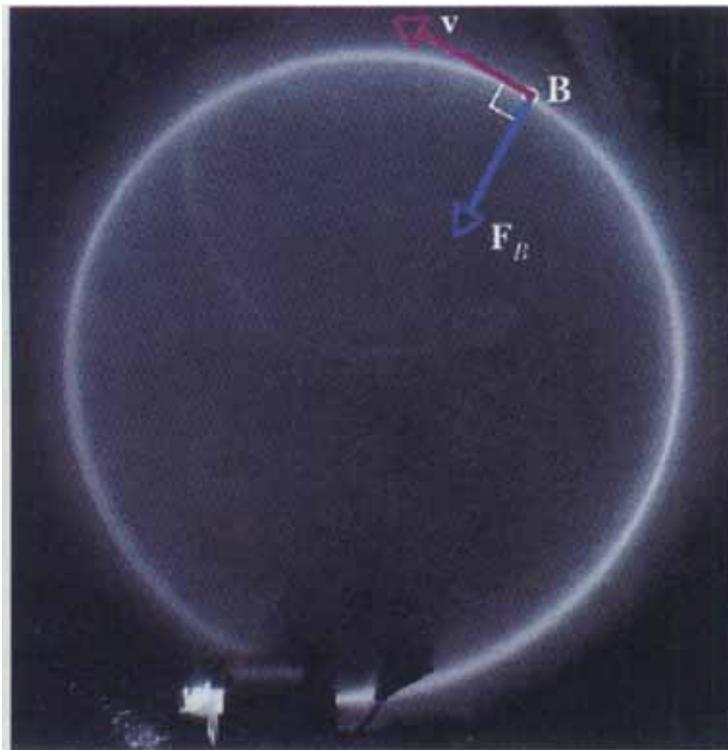


$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (6.4)$$

$$qE = qvB$$

$$v = \frac{E}{B}$$

## Cariche in moto circolare



$$|q|vB = m \frac{v^2}{r}$$

$$r = \frac{mv}{|q|B} = \frac{p}{|q|B}$$

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{|q|B}{m}$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{|q|B}{2\pi m}$$

## Ciclotrone

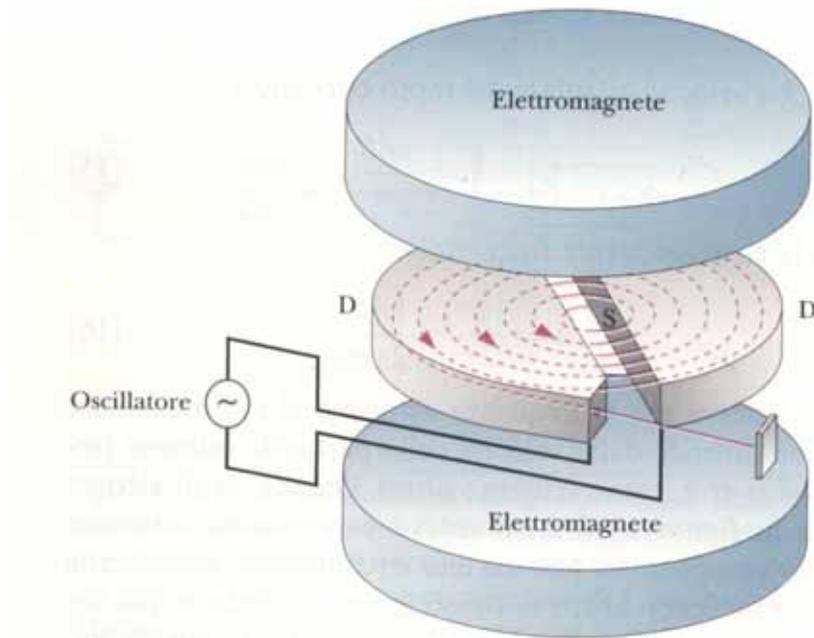


Figura 12 I componenti di un ciclotrone, con la sorgente S e le

Le particelle guadagnano energia quando si trovano fra le due dees.

Il semiperiodo è lo stesso per ciascuna semicirconferenza.

Condizione di risonanza

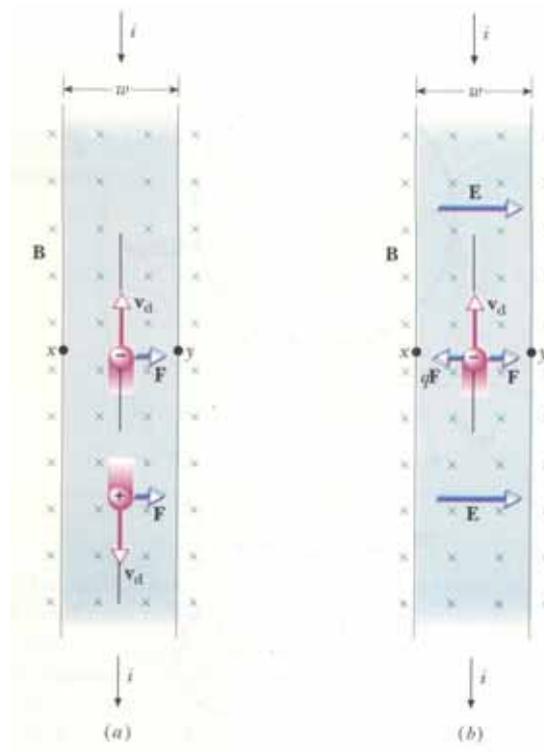
$$v = \frac{|q|BR}{m}$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{q^2 B^2 R^2}{2m} \approx 10 \text{ MeV}$$

L'energia delle particelle è indipendente dalla differenza di potenziale

Per energie elevate ( $K > 50 \text{ MeV}$ ) si devono utilizzare le espressioni relativistiche

# Effetto Hall



$$q\mathbf{E} + q\mathbf{v}_d \times \mathbf{B} = 0$$

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}$$

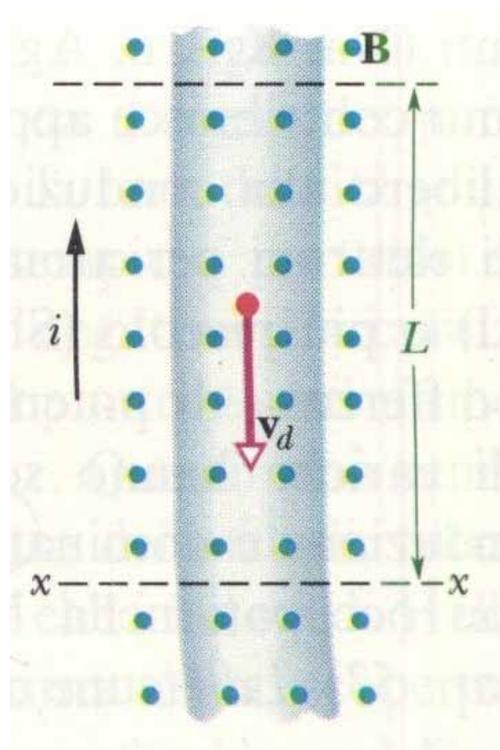
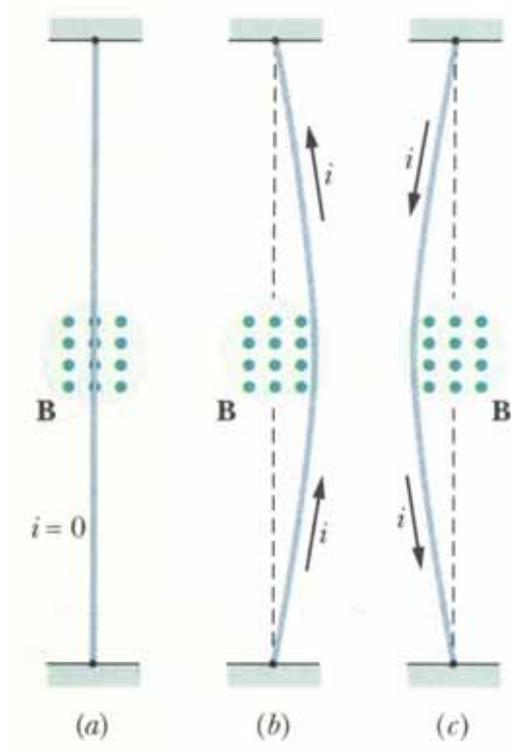
$$E = v_d B$$

$$\frac{V}{w} = v_d B = \frac{j}{ne} B = \frac{i}{wtne} B$$

$$n = \frac{iB}{etV}$$

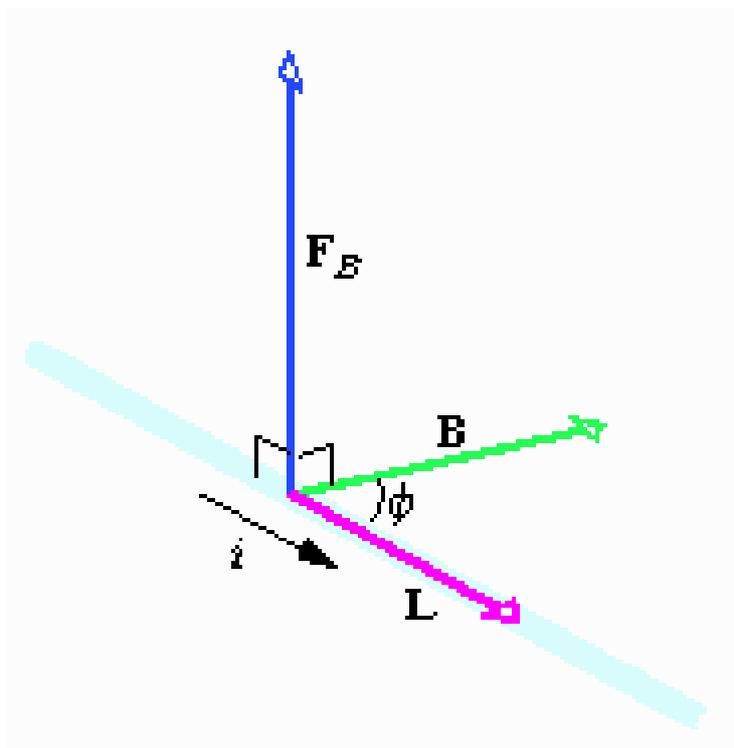
elettroni e lacune nei semiconduttori Tabella 2

## Forza Magnetica agente su una corrente

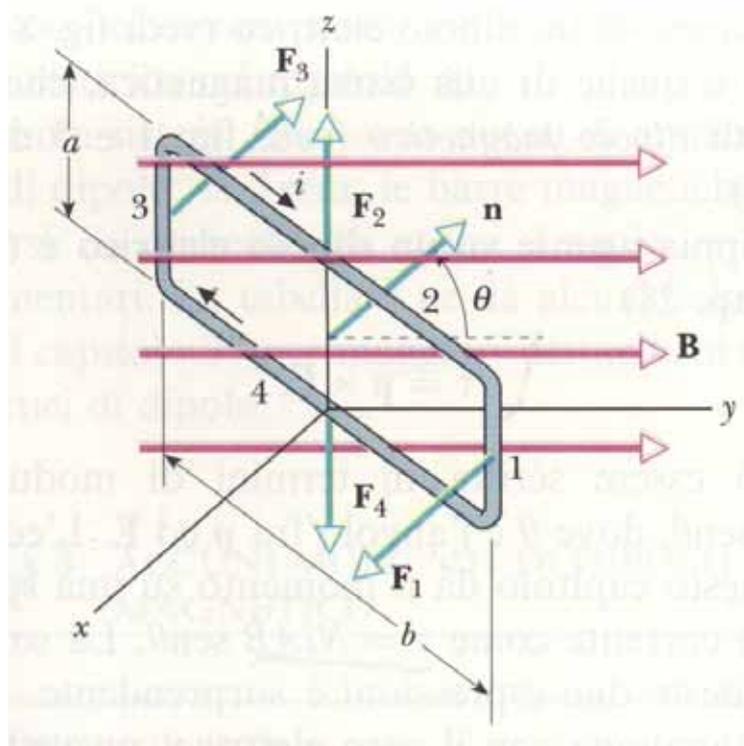


$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= -N e \mathbf{v}_d \times \mathbf{B} \\ \mathbf{F} &= -n A L e \mathbf{v}_d \times \mathbf{B} \\ n A L e \mathbf{v}_d &= -i \mathbf{L} \\ \mathbf{F} &= i \mathbf{L} \times \mathbf{B}\end{aligned}$$

$$d\mathbf{F} = i d\mathbf{s} \times \mathbf{B} \quad (6.5)$$



## Spira percorsa da corrente



$$F_2 = ibB \sin(\pi/2 - \theta) = ibB \cos \theta$$

$$F_4 = ibB \sin(\pi/2 + \theta) = ibB \cos \theta$$

$$F_1 = iaB = F_3$$

$$\tau = 2(iaB)(b/2) \sin \theta = iabB \sin \theta$$

$$\tau = iAB \sin \theta$$

Valida per qualsiasi spira piana di area  $A$

Per  $N$  spire

$$\tau = NiAB \sin \theta \quad (6.6)$$

## Dipolo magnetico

Definiamo *momento di dipolo magnetico*

$$\mu = NiA \quad (6.7)$$

diretto orientato parallelamente a  $\mathbf{n}$

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} \quad (6.8)$$

Valida per spira di qualsiasi forma

$$U = -\mu B \cos \theta = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} \quad (6.9)$$

Si può definire un'energia potenziale per il dipolo immerso nel campo. La forza magnetica non è in generale conservativa

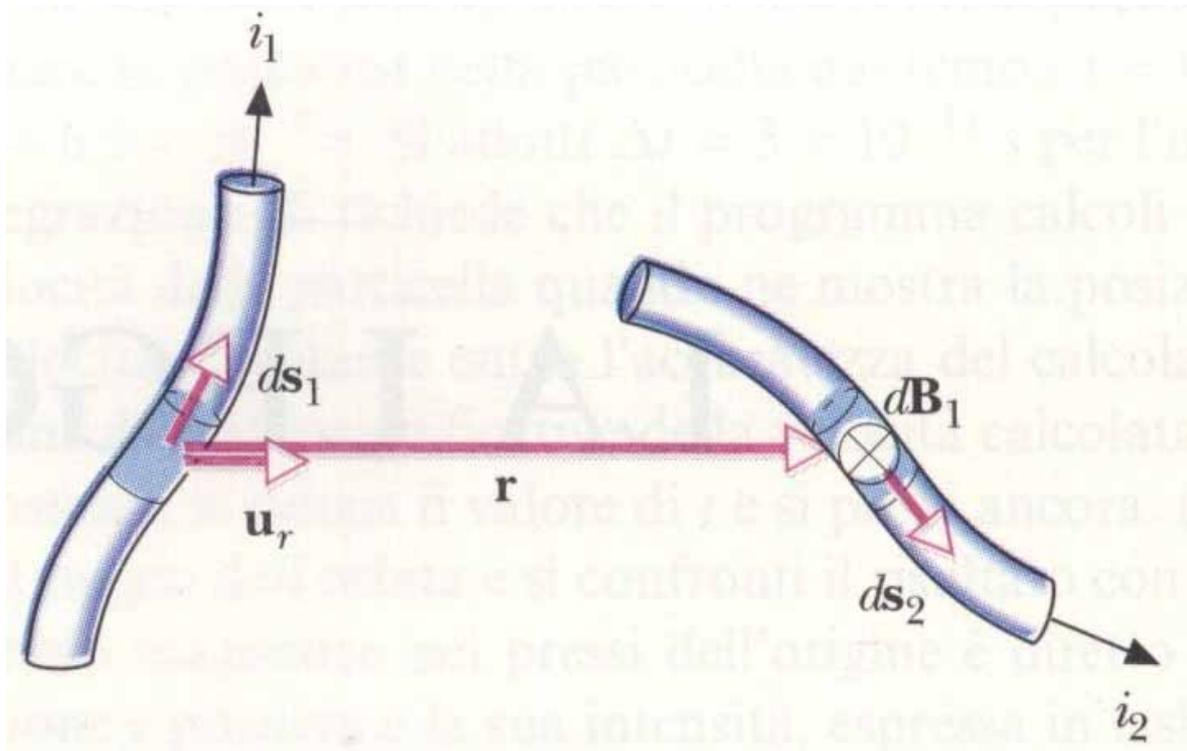
**TABELLA 3** ALCUNI MOMENTI DI DIPOLO  
MAGNETICO

<i>Sistema</i>	$\mu$ (J/T)
Nucleo di atomo di azoto	$2.0 \times 10^{-28}$
Protone	$1.4 \times 10^{-26}$
Elettrone	$9.3 \times 10^{-24}$
Atomo di azoto	$2.8 \times 10^{-23}$
Tipica bobina piccola <sup>a</sup>	$5.4 \times 10^{-6}$
Piccola barra magnetica	5
Bobina superconduttiva	400
Terra	$8.0 \times 10^{22}$

<sup>a</sup> Ad esempio quella dell'esempio 8

# 7 Legge di Ampere

## Legge di Biot-Savart



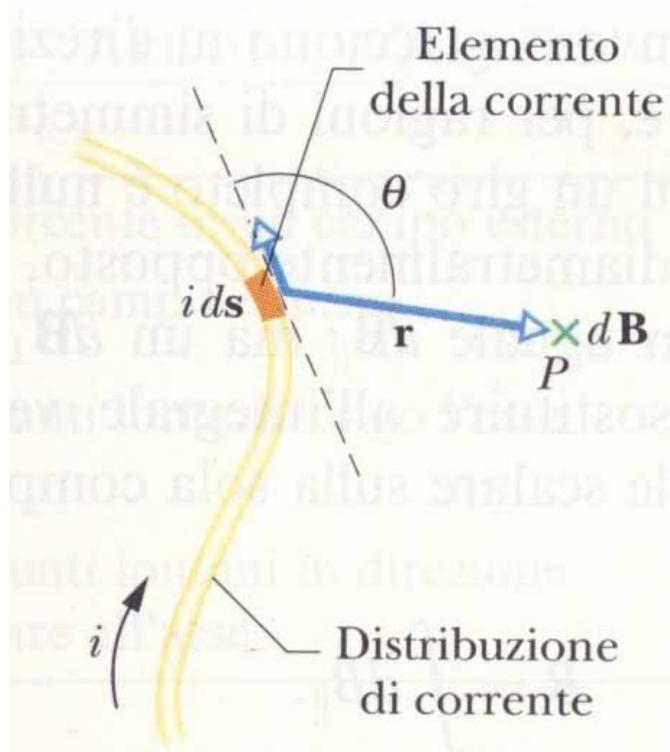
$$d\mathbf{F}_{21} = i_2 ds_2 \times \mathbf{B}_1 \quad (7.1)$$

$$d\mathbf{B}_1 = k \frac{i_1 ds_1 \times \mathbf{u}_r}{r^2} = k \frac{i_1 ds_1 \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (7.2)$$

$$k = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m}/\text{A} \quad (7.3)$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m}/\text{A} \quad (7.4)$$

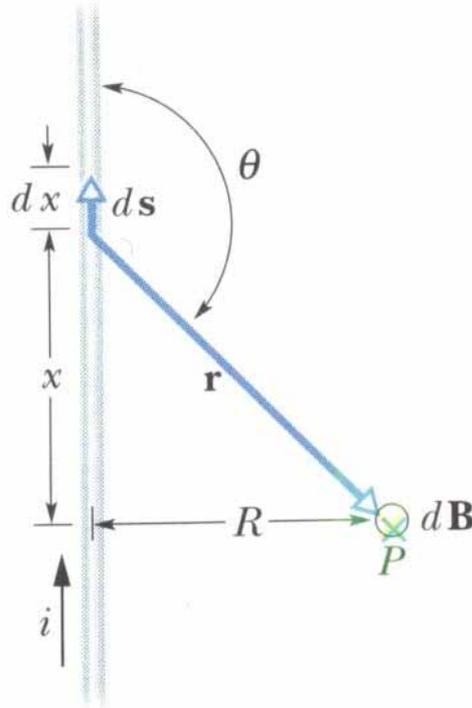
$$c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \quad (7.5)$$



$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d\mathbf{s} \times \mathbf{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (7.6)$$

$$\mathbf{B} = \int d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{i d\mathbf{s} \times \mathbf{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{i d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (7.7)$$

## Filo rettilineo infinitamente lungo



$$dB = \frac{\mu_0 i ds \sin \theta}{4\pi r^2} \quad (7.8)$$

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \theta dx}{r^2} \quad (7.9)$$

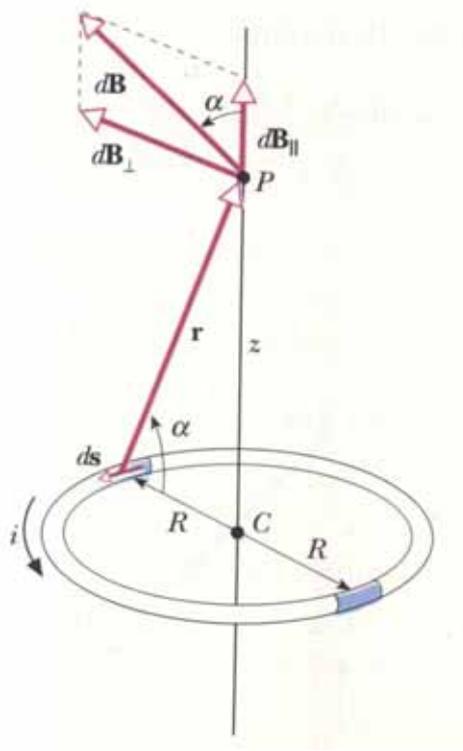
$$r = \sqrt{x^2 + R^2} \quad (7.10)$$

$$\sin \theta = \sin(\pi - \theta) = \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}} \quad (7.11)$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \left[ \frac{x}{(x^2 + R^2)^{1/2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} \quad (7.12)$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \quad (7.13)$$

## Spira circolare percorsa da corrente



Un elemento di corrente diametralmente opposto genera un uguale  $d\mathbf{B}_{\parallel}$  e un  $d\mathbf{B}_{\perp}$  opposto

$$B = \int dB_{\parallel} \quad (7.14)$$

$$dB = \frac{\mu_0 i ds \sin \pi/2}{4\pi r^2} \quad (7.15)$$

$$dB_{\parallel} = dB \cos \alpha \quad (7.16)$$

$$dB_{\parallel} = \frac{\mu_0 i \cos \alpha ds}{4\pi r^2} \quad (7.17)$$

$$r = \sqrt{z^2 + R^2} \quad (7.18)$$

$$\cos \alpha = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} \quad (7.19)$$

$$dB_{\parallel} = \frac{\mu_0 i R ds}{4\pi (R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (7.20)$$

$$B = \int dB_{\parallel} = \frac{\mu_0 i R}{4\pi (R^2 + z^2)^{3/2}} \int ds \quad (7.21)$$

$$B = \frac{\mu_0 i R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (7.22)$$

Per  $z = 0$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2R} \quad (7.23)$$

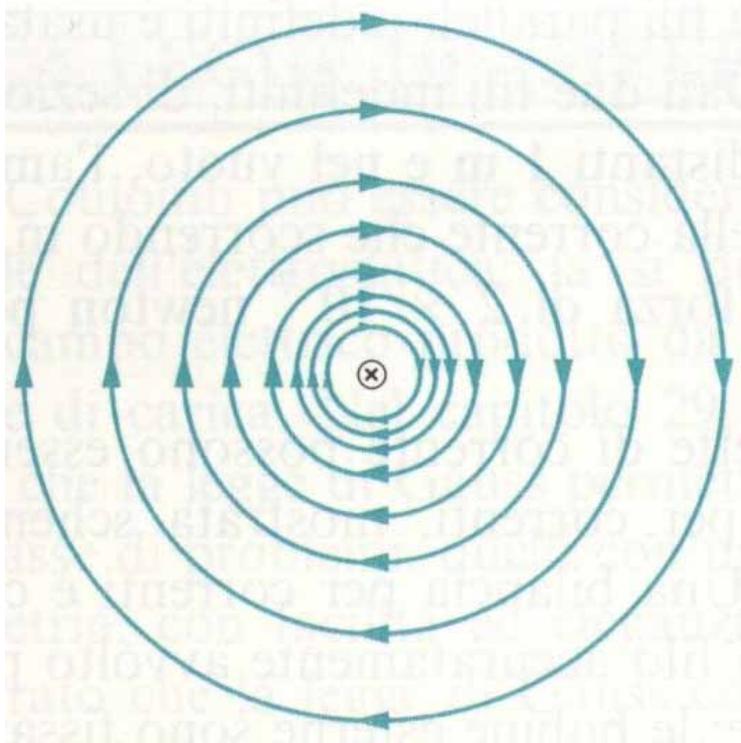
se  $z \gg R$

$$B = \frac{\mu_0 i R^2}{2z^3} = \frac{\mu_0 i A}{2\pi z^3} = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi z^3} \quad (7.24)$$

Per una bobina di  $N$  spire circolari di area  $A$

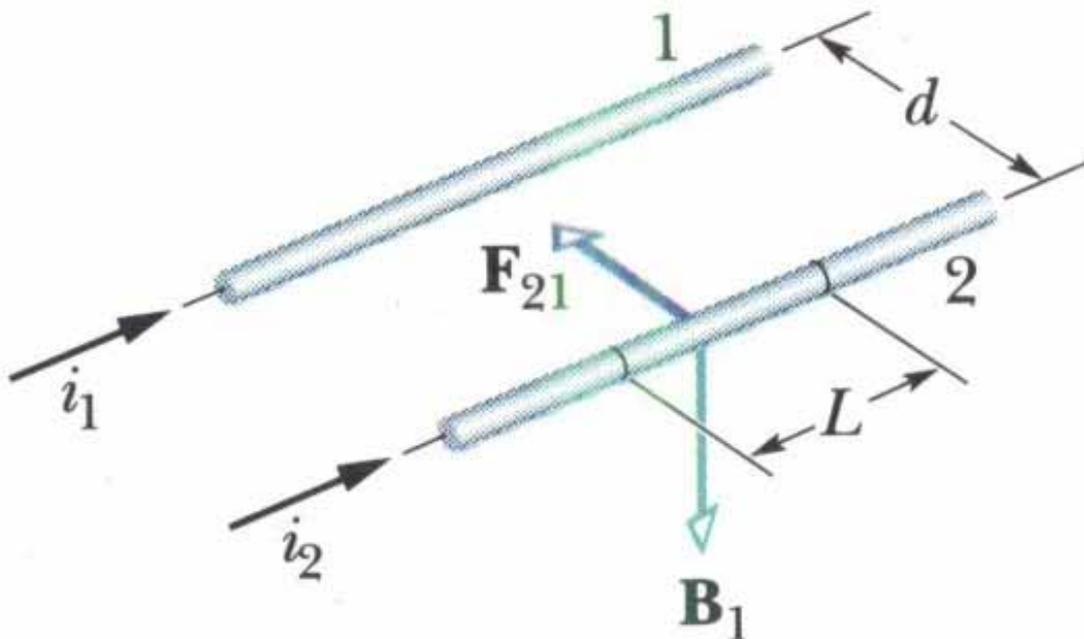
$$B = \frac{\mu_0 N i A}{2\pi z^3} = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi z^3} \quad (7.25)$$

## Linee di forza di $\mathbf{B}$



## Conduttori Paralleli

corrente elettrica  $\leftrightarrow \mathbf{B} \leftrightarrow$  corrente elettrica



$$B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d} \quad (7.26)$$

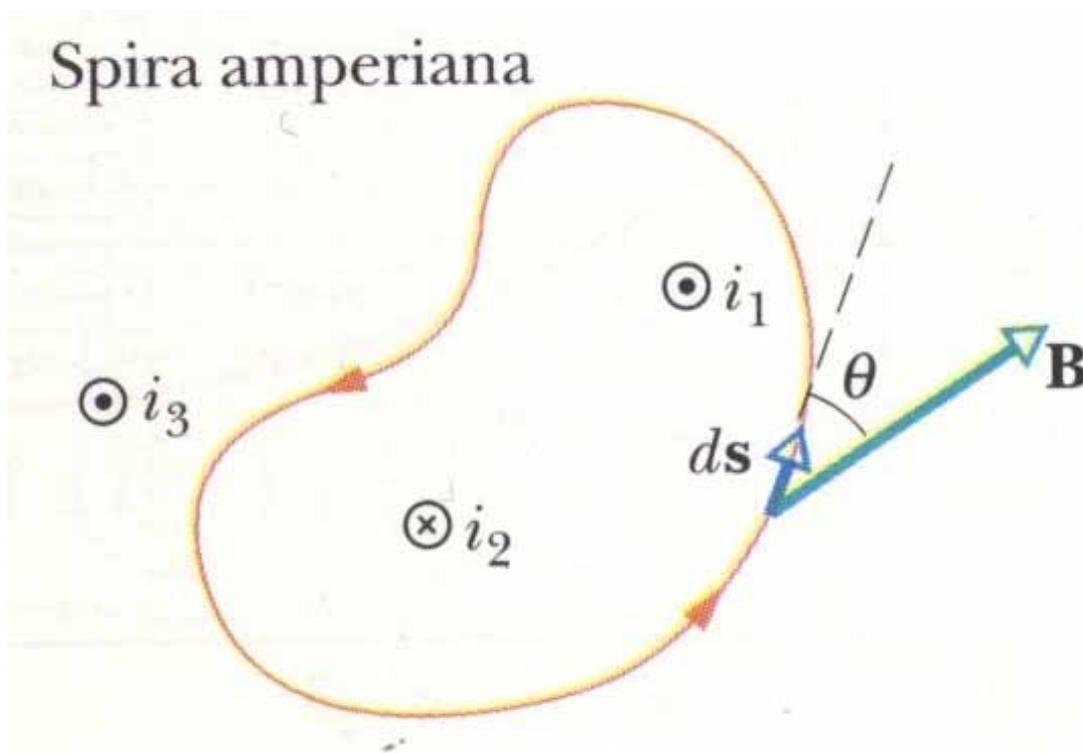
$$F_{21} = i_2 L B_1 = \frac{\mu_0 L i_1 i_2}{2\pi d} \quad (7.27)$$

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \quad (7.28)$$

*Correnti parallele e concordi si attraggono, correnti parallele ma discordi si respingono*

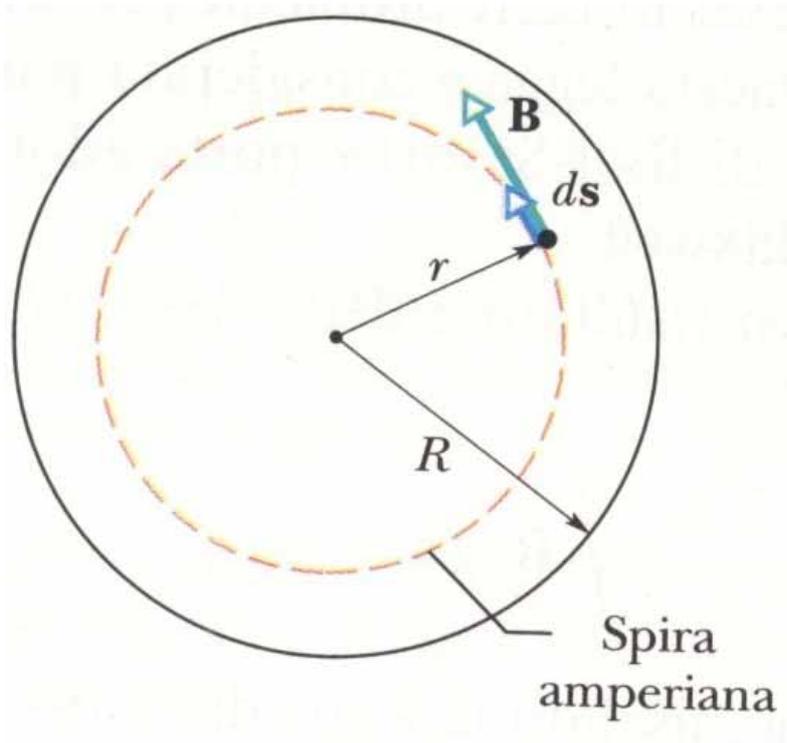
Ampere: corrente che scorrendo in ciascun filo provoca una forza di  $2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$

## Legge di Ampere



$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i \quad (7.29)$$

Il campo magnetico dipende anche da  $i_3$  ma l'integrale lungo la spira non dipende dalle correnti non concatenate

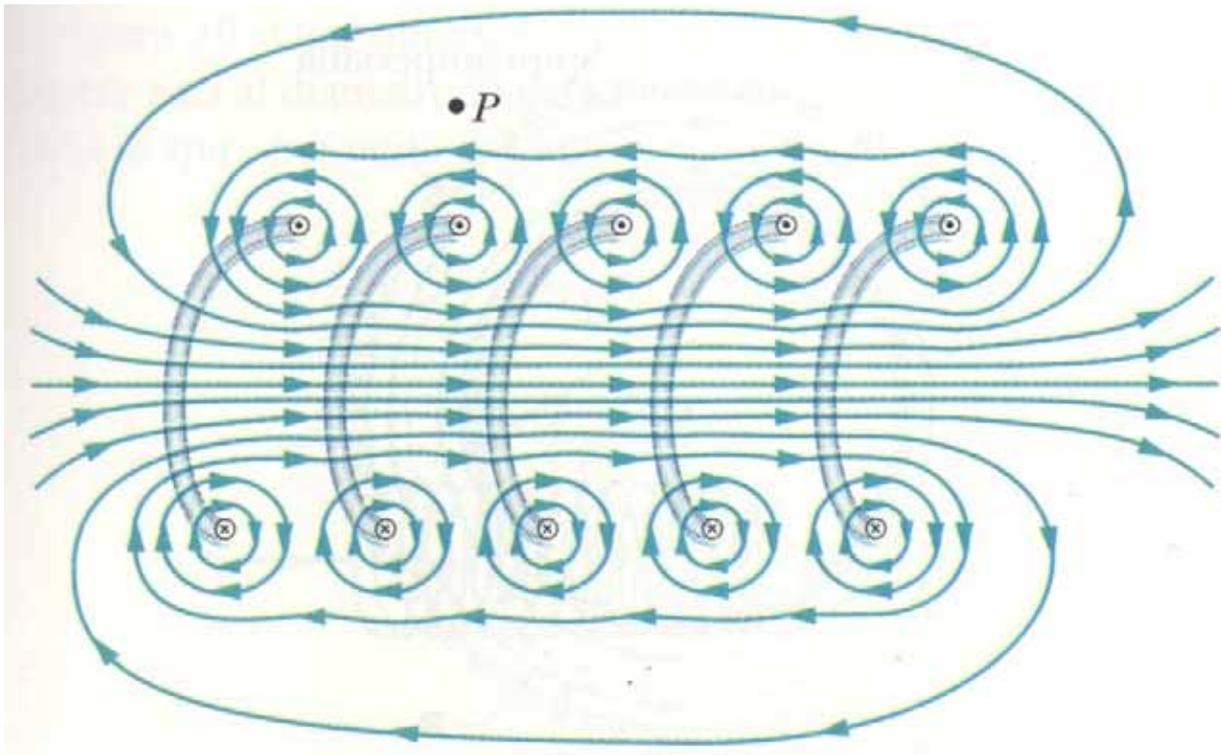


$$\oint B ds \cos \theta = B \oint ds = B(2\pi r) \quad (7.30)$$

$$B(2\pi r) = \mu_0 i \quad (7.31)$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \quad (7.32)$$

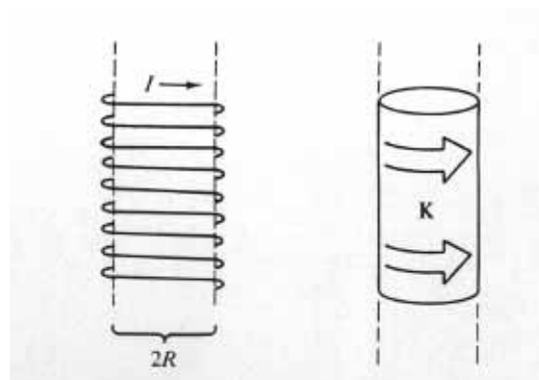
## Solenoide



Dentro il solenoide  $\mathbf{B}$  tende a essere parallelo all'asse

Fuori dal solenoide i contributi delle correnti entranti e uscenti tendono a elidersi

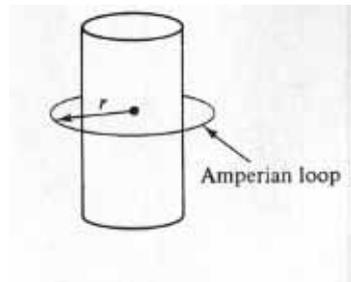
Solenoide cilindrico infinito di raggio  $R$  con densità di spire per unità di lunghezza  $n$  percorso da corrente  $i$



$\mathbf{B}$  non può avere componente radiale: invertire il senso della corrente e girare il solenoide sono operazioni fisicamente equi-

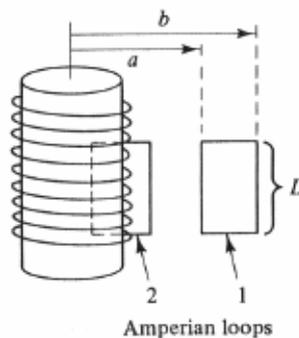
valenti, ma la prima inverte il verso di  $B_r$  mentre la seconda lo mantiene.

$\mathbf{B}$  non può avere componente circonferenziale. Infatti la circuitazione lungo la linea in figura



$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B_\phi 2\pi r = \mu_0 I_c \approx 0 \quad (7.33)$$

da cui  $B_\phi = 0$ .  $B$  risulta quindi diretto parallelamente all'asse del solenoide. Per simmetria il modulo è funzione soltanto della distanza dall'asse.



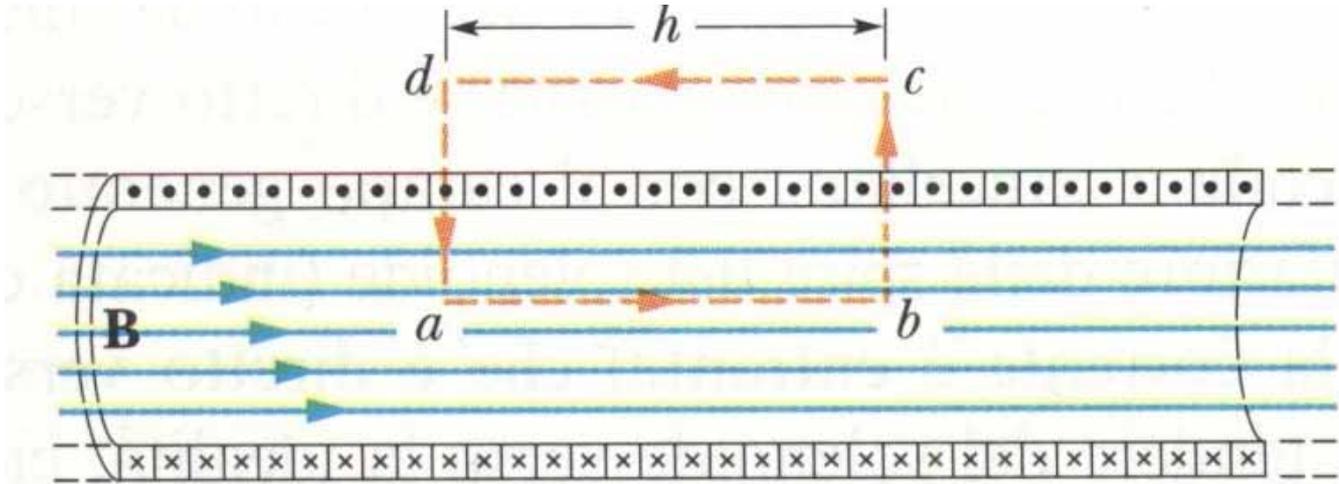
Consideriamo la circuitazione lungo il cammino 1

$$\oint_1 \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = [B(a) - B(b)]L = \mu_0 I_c = 0 \quad (7.34)$$

Il campo esternamente non dipende dalla distanza dall'asse. Inoltre deve tendere a zero a distanza infinita. Quindi  $B = 0$

esternamente al solenoide.

Consideriamo la circuitazione del campo lungo la linea 2



$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} + \int_b^c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} + \int_c^d \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} + \int_d^a \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (7.35)$$

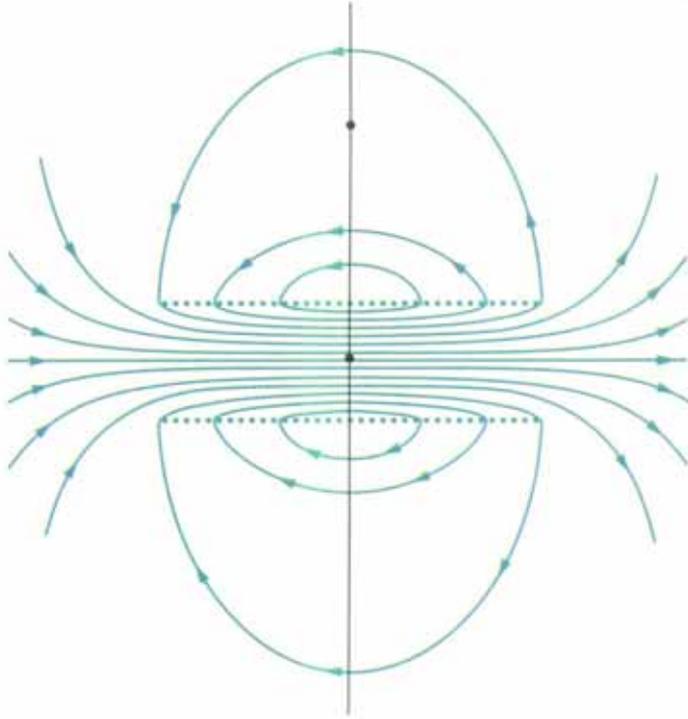
$$i = i_0 n h \quad (7.36)$$

$$B h = \mu_0 i_0 n h \quad (7.37)$$

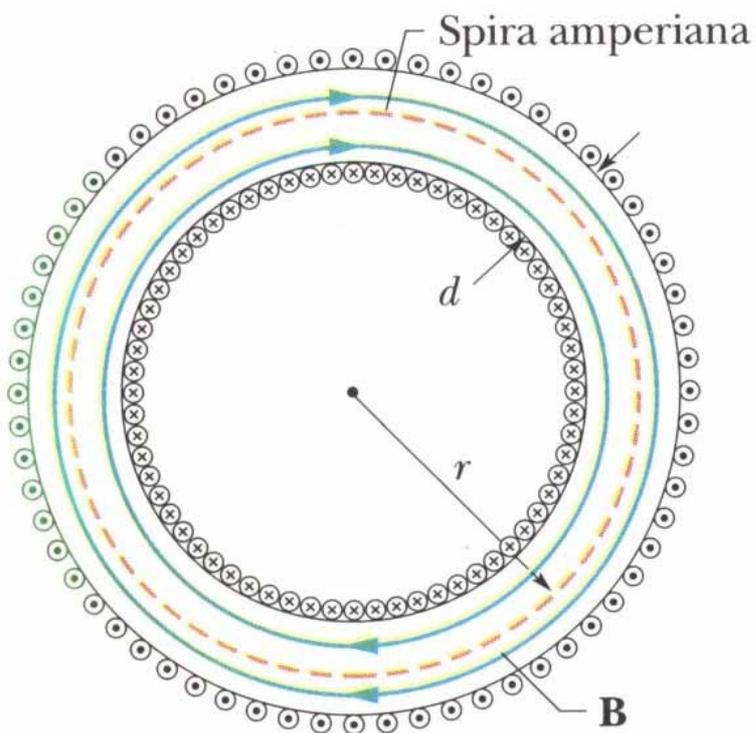
$$B = \mu_0 i_0 n \quad (7.38)$$

$n$  numero di spire per unità di lunghezza

Nel caso di un solenoide reale



## Toroide



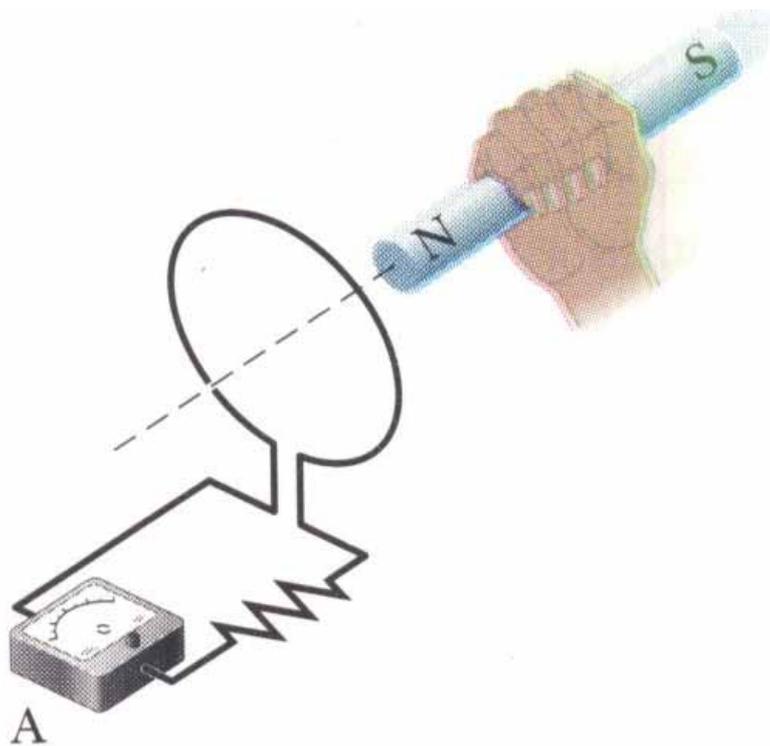
$$B(2\pi r) = \mu_0 i_0 N \quad (7.39)$$

$$B = \frac{\mu_0 i_0 N}{2\pi r} \quad (7.40)$$

$$B = \mu_0 i_0 n \quad (7.41)$$

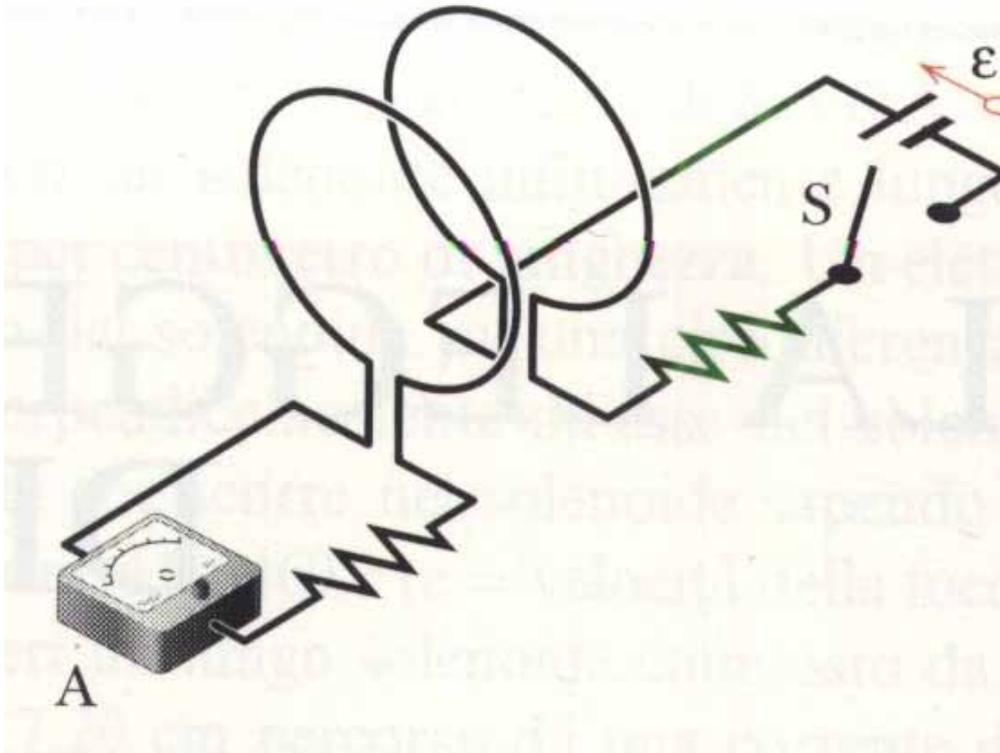
B è nullo esternamente

## 8 Legge dell'induzione di Faraday

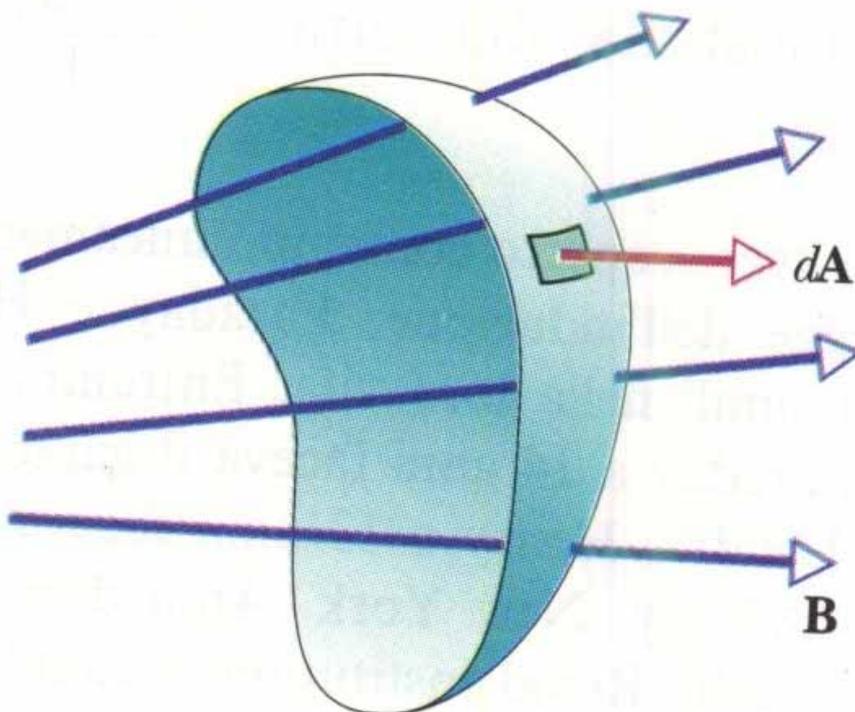


- Mentre il magnete si muove l'ago dell'amperometro si sposta.
- Se rovescio il magnete spostamenti ago sono opposti
- Conta il movimento relativo

Corrente indotta generata da f.e.m. indotta



Si induce una fem nella bobina sx solo quando la corrente nella bobina dx sta cambiando



Variazione del numero di linee di forza del campo magnetico che attraversa una spira che induce una fem nella spira. Velocità di variazione determina l'intensità

$$\Phi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad (8.1)$$

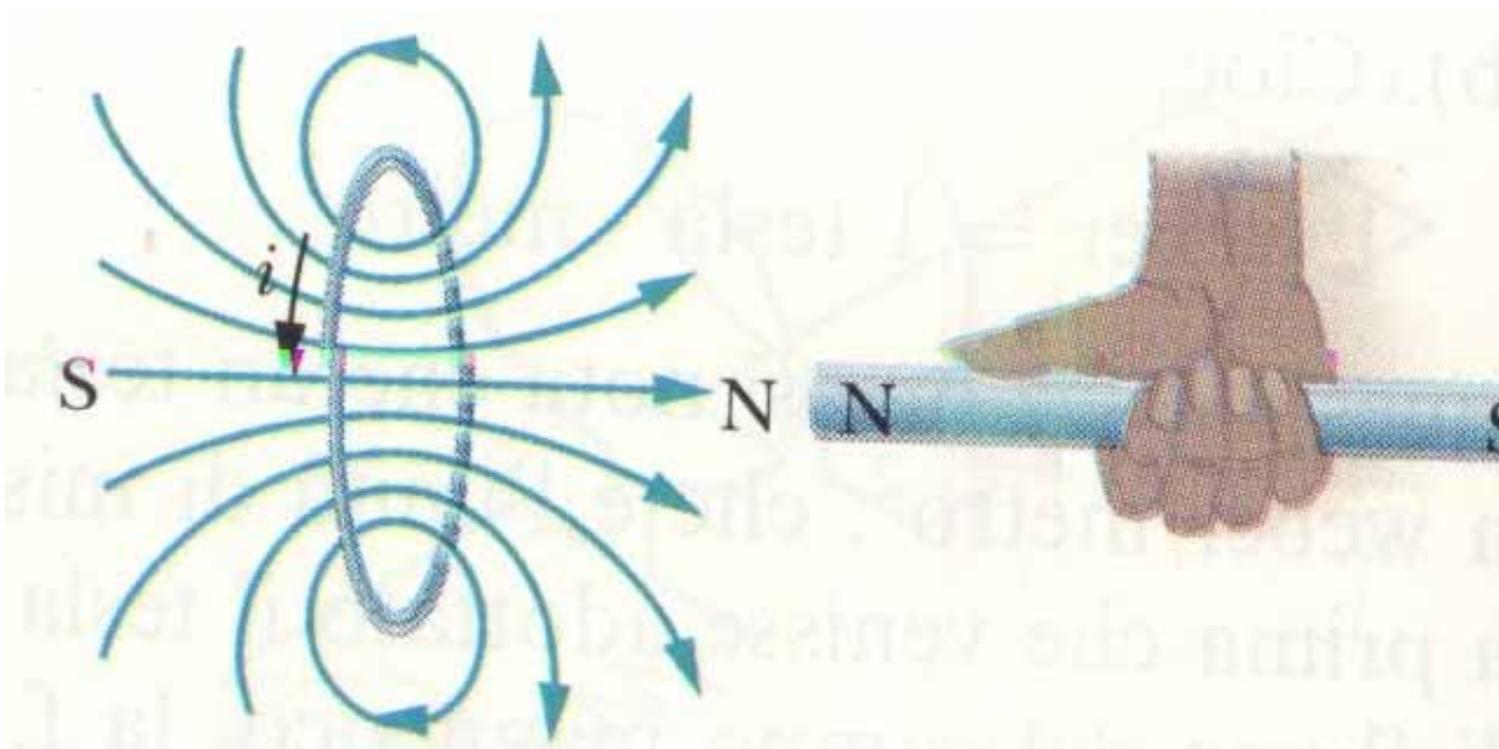
$$1 \text{ weber} = 1 \text{ tesla} \cdot \text{metro}^2 \quad (8.2)$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (8.3)$$

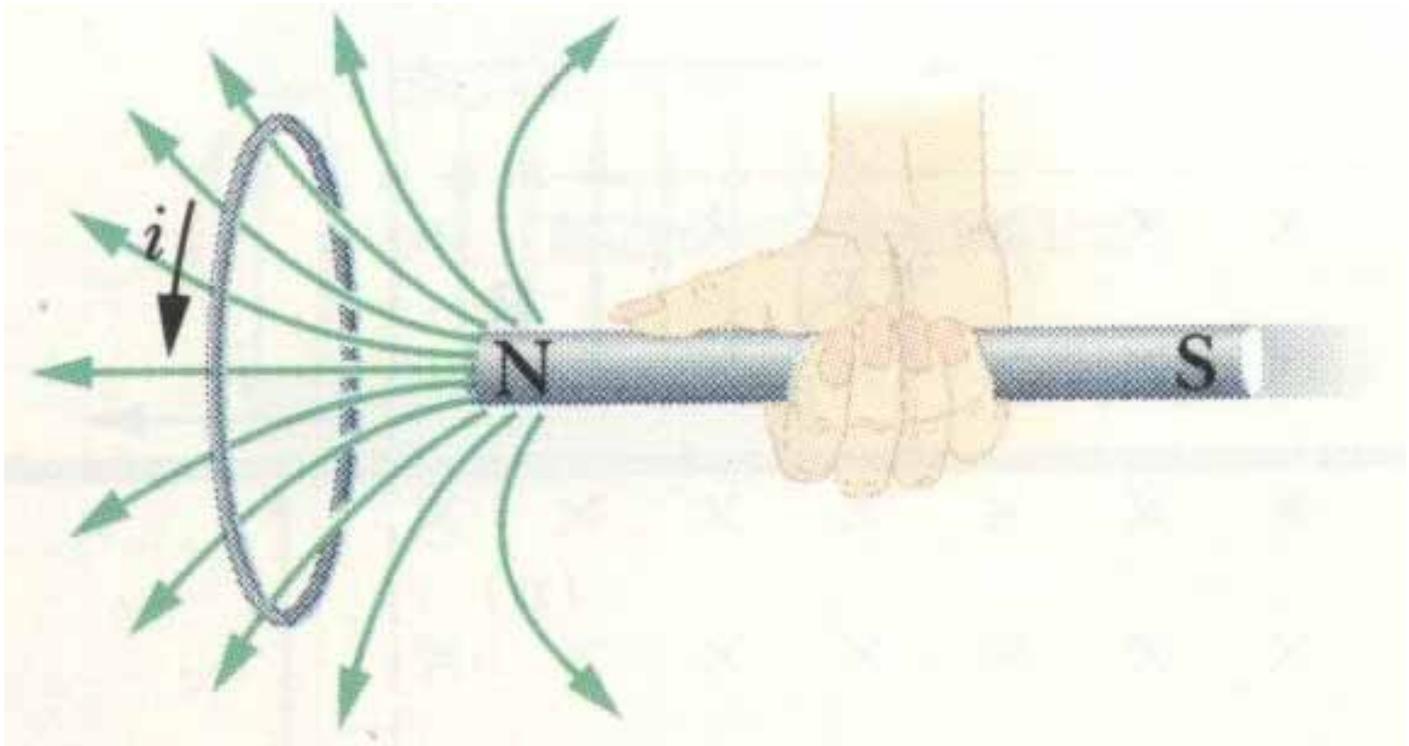
Legge dell'induzione di Faraday: La fem indotta in un circuito è uguale alla velocità con cui varia il flusso del campo magnetico attraverso il circuito, cambiata di segno.

## Legge di Lenz

La corrente indotta in una spira conduttrice chiusa ha un verso tale da opporsi alla variazione che la ha generata

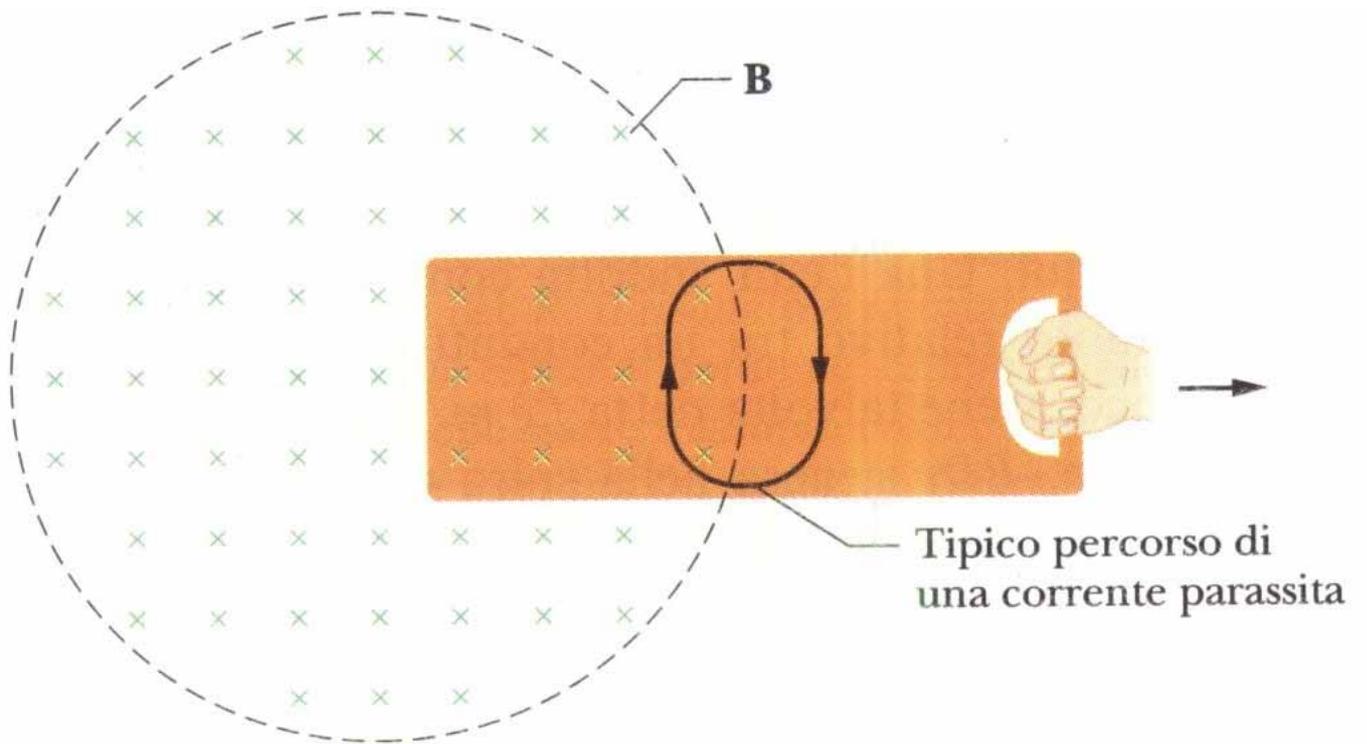


Il lavoro compiuto sul sistema coincide con la potenza dissipata per effetto Joule dalla spira



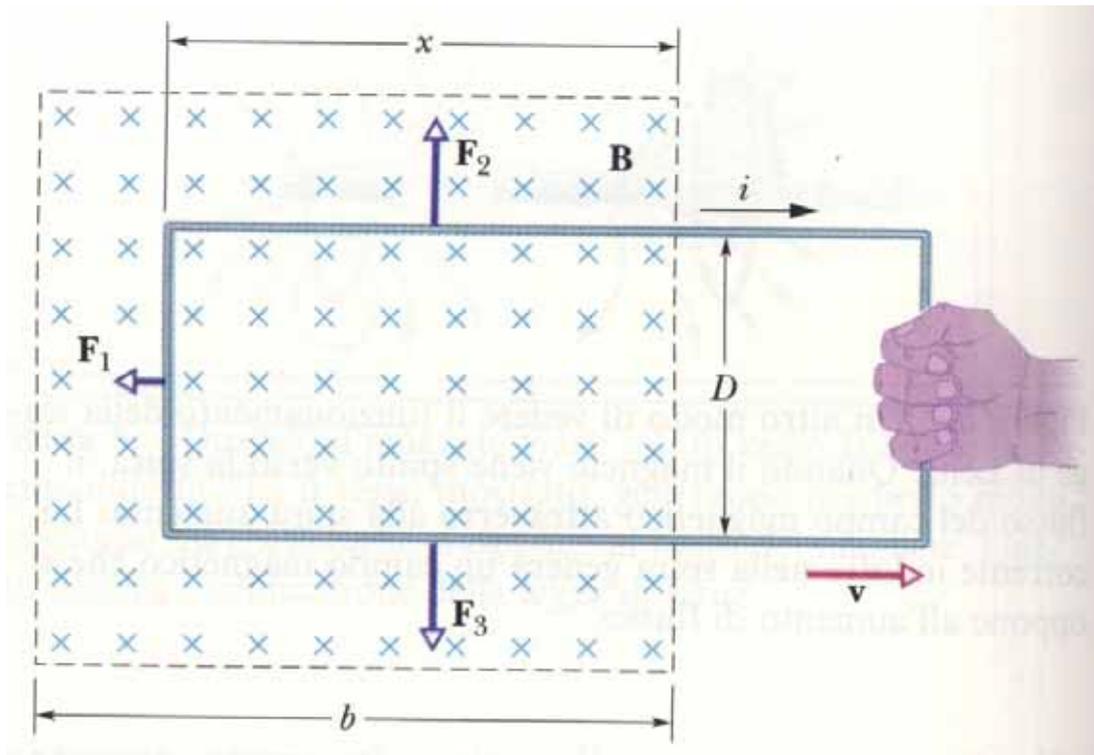
La corrente circola in modo da produrre un campo che si oppone alla variazione del flusso del campo magnetico

## Correnti di Foucault



Correnti parassite. Si usano laminati per ridurre effetto. Forni a induzione. Frenamento magnetico

## Forze elettromotrici derivanti dal moto



$$\Phi_B = BDx \quad (8.4)$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(BDx) = -BD\frac{dx}{dt} = BDv \quad (8.5)$$

Questo risultato è ottenibile in termini di forza di Lorentz

$$\mathbf{f} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (8.6)$$

$$f dr = e d\mathcal{E} = evB dr \quad (8.7)$$

$$\mathcal{E} = \int_0^D vB dr = vBD \quad (8.8)$$

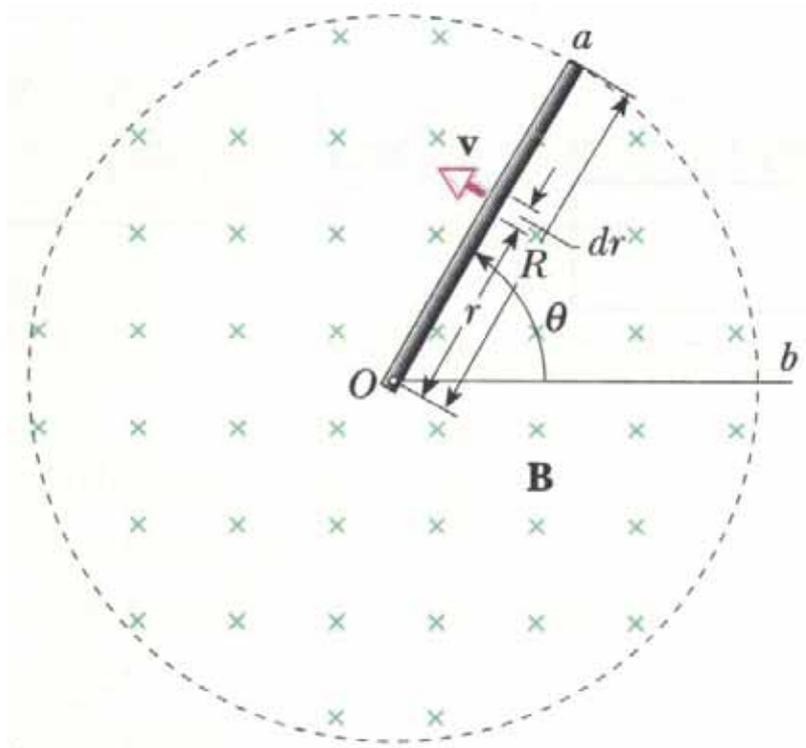
$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{BDv}{R} \quad (8.9)$$

$$F_2 = F_3 \quad (8.10)$$

$$F_1 = iDB \sin \pi/2 = \frac{B^2 D^2 v}{R} \quad (8.11)$$

$$P = F_1 v = \frac{B^2 D^2 v^2}{R} \quad (8.12)$$

$$P = i^2 R = \left( \frac{BDv}{R} \right)^2 R = \frac{B^2 D^2 v^2}{R} \quad (8.13)$$



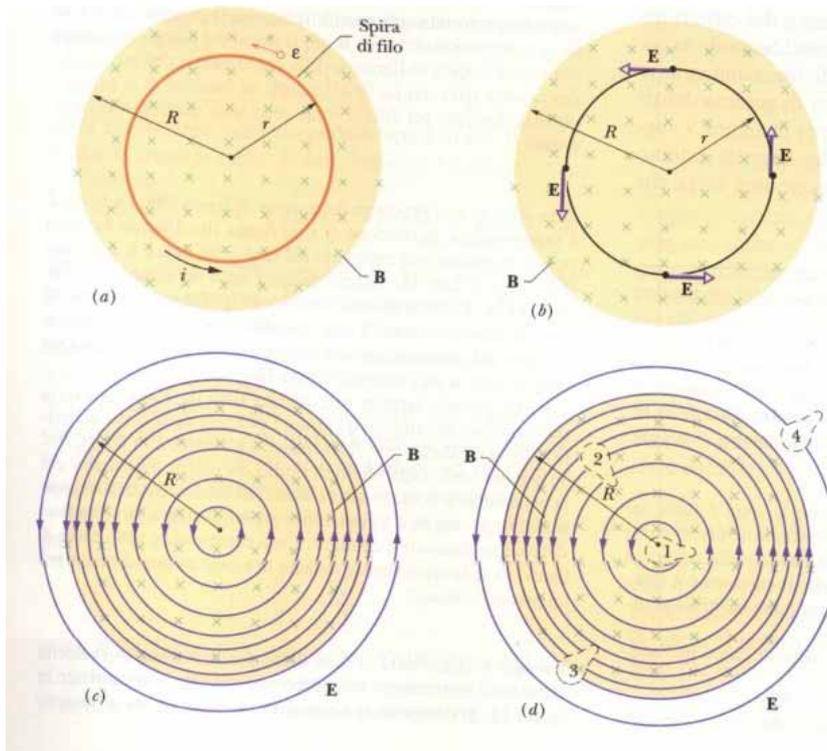
$$d\mathcal{E} = Bv dr \quad (8.14)$$

$$\mathcal{E} = \int d\mathcal{E} = \int_0^R Bv dr = \int_0^R B\omega r dr = \frac{1}{2} B\omega R^2 \quad (8.15)$$

$$\Phi_B = BA = B\left(\frac{1}{2}R^2\theta\right) \quad (8.16)$$

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{1}{2}BR^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}B\omega R^2 \quad (8.17)$$

## Campi elettrici indotti



Campo elettrico indotto non è legato alla presenza della spira  
**E** non può avere componenti radiali per legge di Gauss

$$\mathcal{E} = E(2\pi r) = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (8.18)$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (8.19)$$

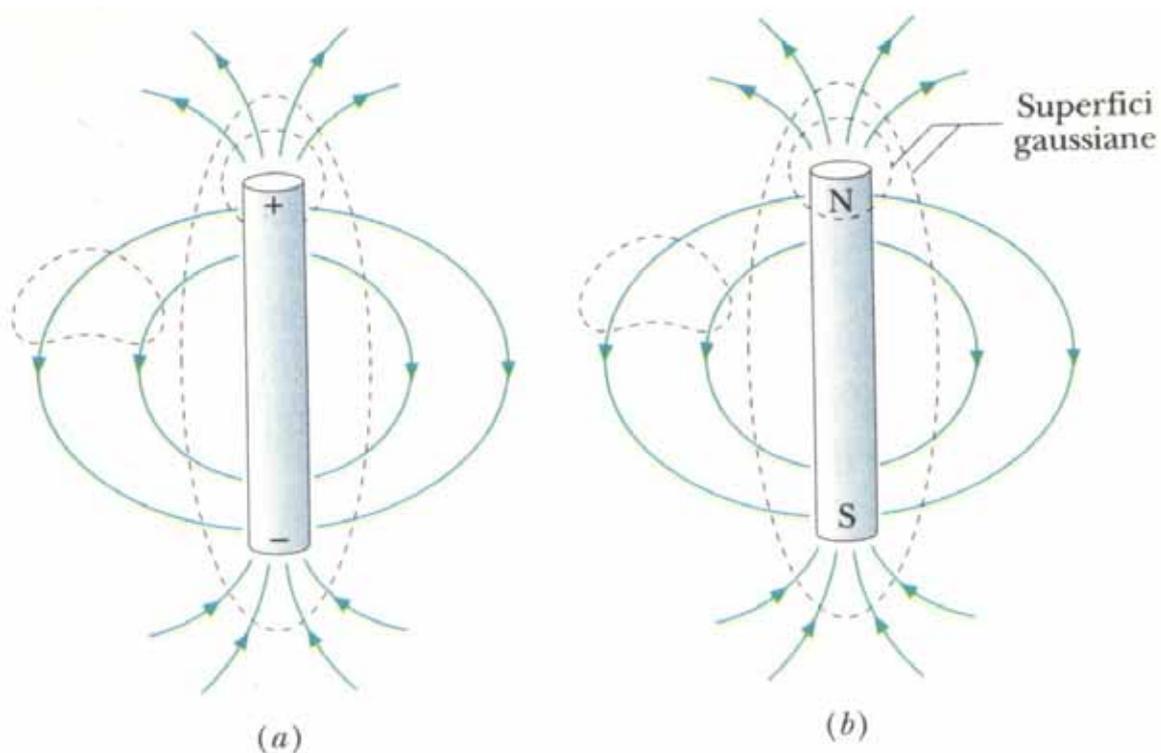
Un campo magnetico variabile genera un campo elettrico variabile

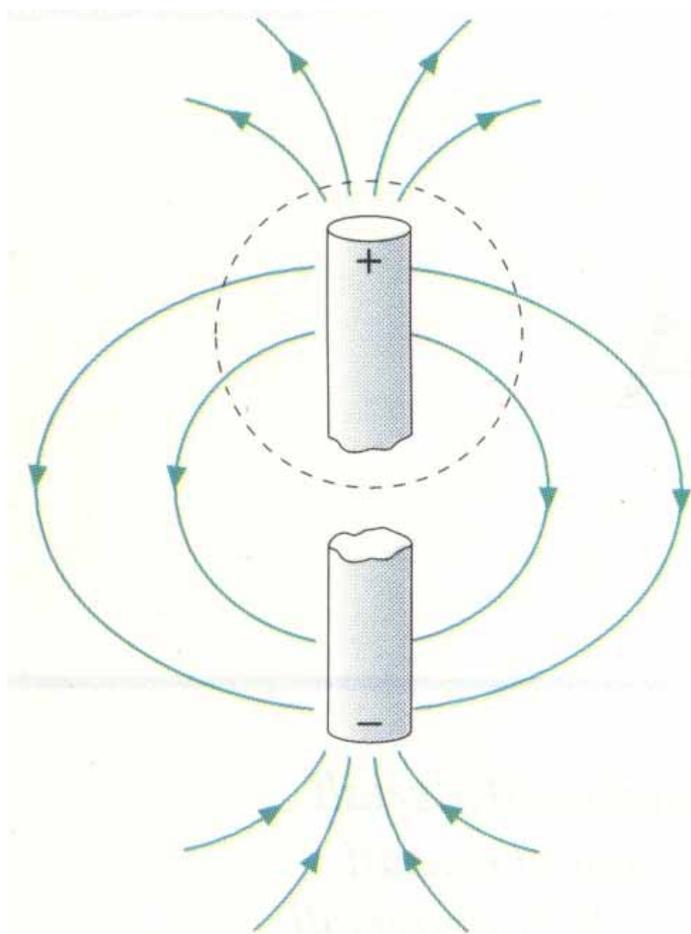
Percorsi 1 e 2 fem è identica. Percorso 3 è inferiore. Percorso 4 è nulla anche se  $\mathbf{E} \neq 0$

Le linee di forza del campo elettrico associato ad una variazione del flusso del campo magnetico possono formare dei percorsi chiusi

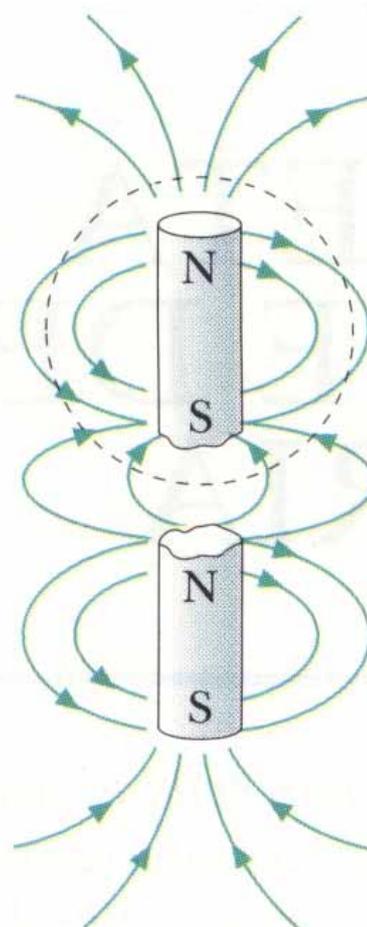
I campi elettrici prodotti da campi magnetici variabili *non* sono conservativi e non possono essere descritti da un potenziale elettrico

## 9 Campo Magnetico nella Materia

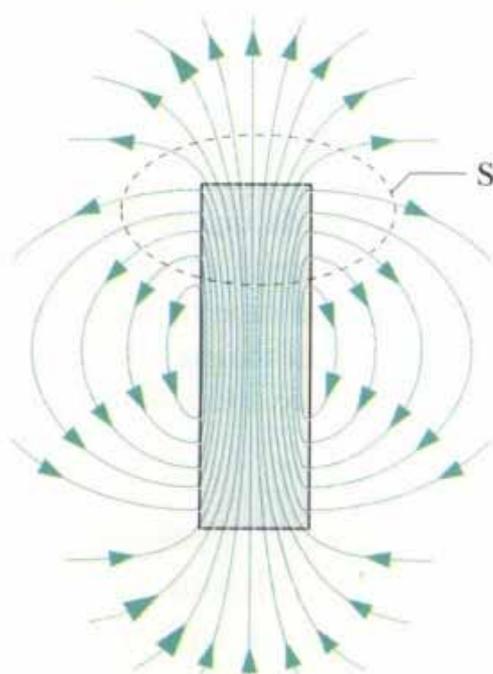




(a)

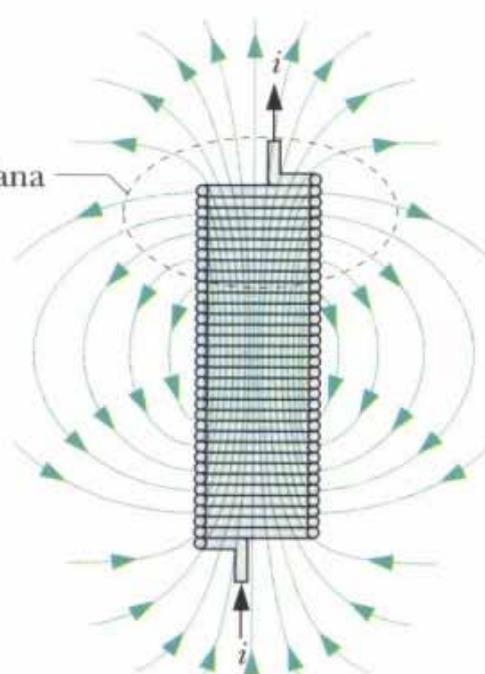


(b)



(a)

Superficie gaussiana

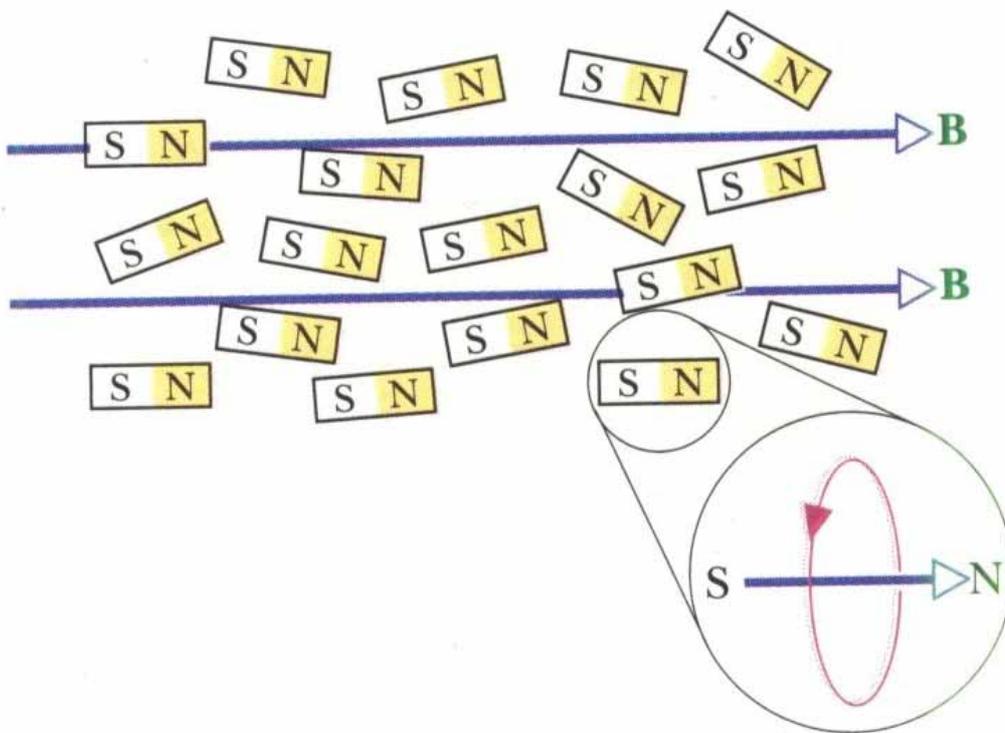


(b)

$$\Phi_B = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad (9.1)$$

*Il flusso netto per la superficie è nullo. Non esistono i monopoli magnetici*

## Magnetismo atomico e nucleare



$$i = \frac{e}{T} = \frac{e}{2\pi r/v} \quad (9.2)$$

$$\mu = iA = \left(\frac{ev}{2\pi r}\right) \pi r^2 = \frac{evr}{2} \quad (9.3)$$

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (9.4)$$

$$l = mvr \quad (9.5)$$

$$\mu_l = \frac{e}{2m} l \quad (9.6)$$

$$\boldsymbol{\mu}_l = -\frac{e}{2m} \mathbf{l} \quad (9.7)$$

$$\mathbf{L} = \sum \mathbf{l}_i \quad (9.8)$$

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{e}{2m} \mathbf{L} \quad (9.9)$$

$L$  è quantizzata e può assumere solo multipli interi di  $\hbar = h/2\pi$ .

*Magnetone di Bohr  $\mu_B$*

$$\mu_B = \frac{e}{2m} \frac{h}{2\pi} = 9.27 \cdot 10^{-24} \text{ J/T} \quad (9.10)$$

## Momenti magnetici intrinseci

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{e}{m} \mathbf{s} \quad (9.11)$$

per elettrone momento angolare intrinseco  $s = \frac{1}{2}(\hbar/2\pi)$

$$\mathbf{S} = \sum \mathbf{s}_i \quad (9.12)$$

$$\boldsymbol{\mu}_S = -\frac{e}{m} \mathbf{S} \quad (9.13)$$

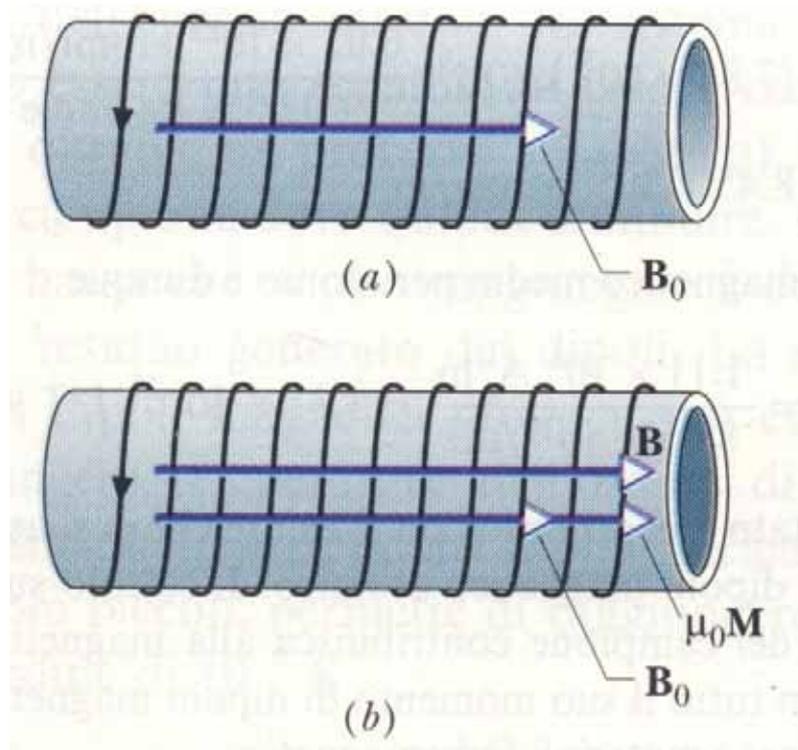
**TABELLA 1** SPIN E MOMENTI MAGNETICI DI ALCUNE PARTICELLE

<i>Particella</i>	$s$ (in unità di $h/2\pi$ )	$\mu_s$ (in unità di $\mu_B$ )
Elettrone	$\frac{1}{2}$	-1.001 159 652 193
Protone	$\frac{1}{2}$	+0.001 521 032 202
Neutrone	$\frac{1}{2}$	-0.001 041 875 63
Deuterone ( $^2\text{H}$ )	1	+0.000 466 975 448
Alpha	0	0
Fotone	1	0

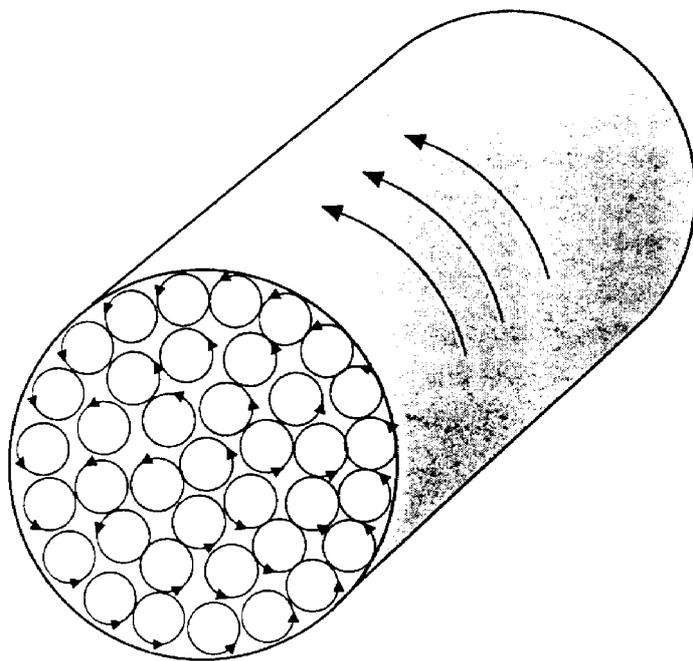
Momento magnetico totale somma di orbitale e intrinseco di tutte le particelle

## Magnetizzazione

$$\mathbf{M} = \frac{\boldsymbol{\mu}}{V} = \frac{\sum \boldsymbol{\mu}_i}{V} \quad (9.14)$$

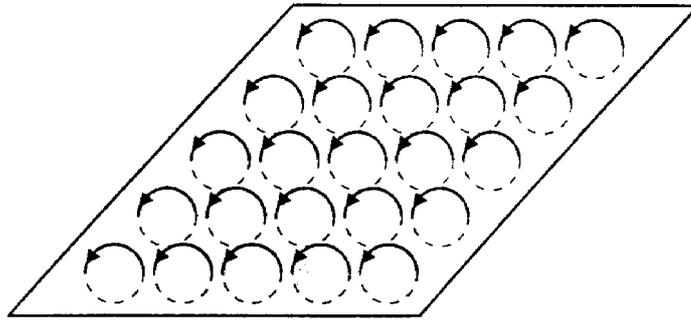


Quando un materiale è soggetto all'azione di un campo magnetico esterno  $\mathbf{B}_0$ , le molecole tendono a orientarsi in modo ordinato così da disporre in media il loro momento magnetico parallelo al campo. Le correnti atomiche scorrono con prevalenza in piani perpendicolari a  $\mathbf{B}_0$ .



Considerando un cilindro di una sostanza omogenea e isotropa, disposto con l'asse parallelamente a un campo magnetico uniforme: il materiale risulta magnetizzato uniformemente con  $\mathbf{M}$  parallelo all'asse.

Da un punto di vista macroscopico all'interno del cilindro non si ha corrente, perchè qualsiasi superficie risulta in media attraversata da una corrente atomica a somma nulla.



Sulla superficie laterale di un cilindro, di sezione  $S$  e lunghezza  $l$ , le correnti atomiche contribuiscono a creare una corrente superficiale che si avvolge sul cilindro ( $N_T$  dipoli di area  $s$ )

$$M = \frac{\sum \mu_i}{V} = \frac{N_T i s}{V} = \frac{N i S}{V} = i \frac{N}{l} \quad (9.15)$$

dove  $N$  sono le spire equivalenti superficiali contenute nel volume  $V$

Il campo magnetico prodotto dalla magnetizzazione risulta

$$B_M = \mu_0 i \frac{N}{l} = \mu_0 M \quad (9.16)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_M = \mathbf{B}_0 + \mu_0 \mathbf{M} \quad (9.17)$$

## Campo Magnetico $\mathbf{H}$

La legge di Ampere nei materiali magnetici è

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i = \mu_0(i_C + i_M) \quad (9.18)$$

Definiamo il campo magnetico  $\mathbf{H}$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (9.19)$$

Il campo in questo modo definito gode della proprietà che

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = i_C \quad (9.20)$$

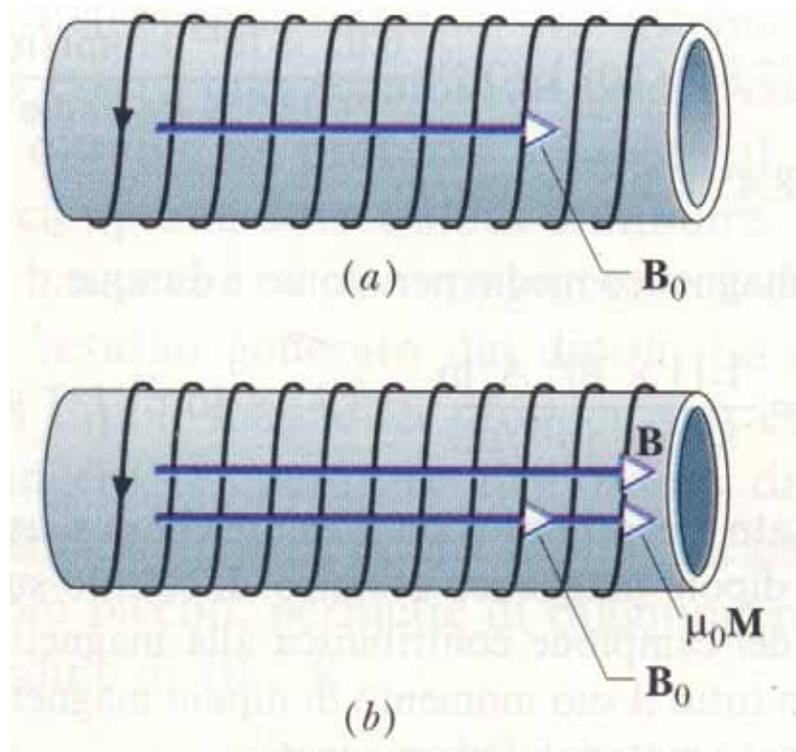
*La circuitazione di  $\mathbf{H}$  è pari alla somma delle sole correnti di conduzione concatenate*

Il legame tra i due campi magnetici è

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \quad (9.21)$$

$\mu_r$  permeabilità magnetica relativa

$$\mathbf{M} = (\mu_r - 1) \mathbf{H} \quad (9.22)$$



$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \quad (9.23)$$

$$\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}_0 \quad (9.24)$$

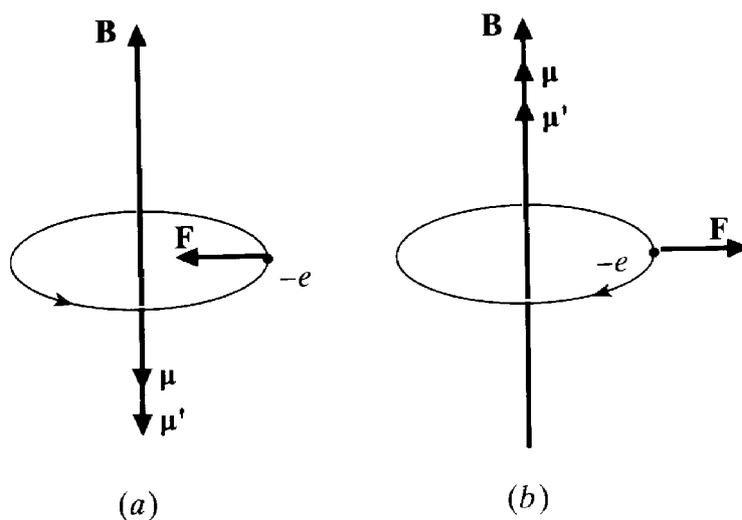
$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}_0 = \mu_r \mathbf{B}_0 \quad (9.25)$$

## Materiali Magnetici

### Diamagnetismo

Momento magnetico indotto quando immersi in un campo magnetico

Quando un atomo è soggetto all'azione di un campo magnetico di induzione  $\mathbf{B}$ , gli elettroni risentono delle forze magnetiche.



Si genera una f.c.e.m. indotta dalla variazione del flusso di  $\mathbf{B}$  concatenato all'orbita dell'elettrone. Per la legge di Lenz si produce  $\Delta\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}' - \boldsymbol{\mu}$  opposto al campo  $\mathbf{B}$ . La forza di Lorentz

$$\mathbf{F} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (9.26)$$

è nei due casi in modulo ( $F = evB$ ) e direzione costante ma di verso opposto.

Nel caso (a) la forza centripeta aumenta leggermente ( infatti  $F_{Coulomb} \approx 10^5 F_{Magnetica}$ ). Il raggio dell'orbita rimane praticamente costante mentre si produce una variazione della velocità angolare  $\Delta\omega$

$$m_e\Delta a_c = m_e r \Delta(\omega^2) = 2m_e r \omega \Delta\omega = evB \quad (9.27)$$

quindi

$$\Delta\omega = \omega_L = \frac{e}{2m_e}B \quad (9.28)$$

dove  $\omega_L$  è chiamata *velocità angolare di Larmor*

Il momento angolare aumenta

$$\Delta L = m_e r^2 \Delta\omega \quad (9.29)$$

e il momento magnetico dell'elettrone

$$\Delta\mu = |\boldsymbol{\mu}' - \boldsymbol{\mu}| = \frac{e}{2m_e}\Delta L = \frac{e^2}{4m_e}r^2 B \quad (9.30)$$

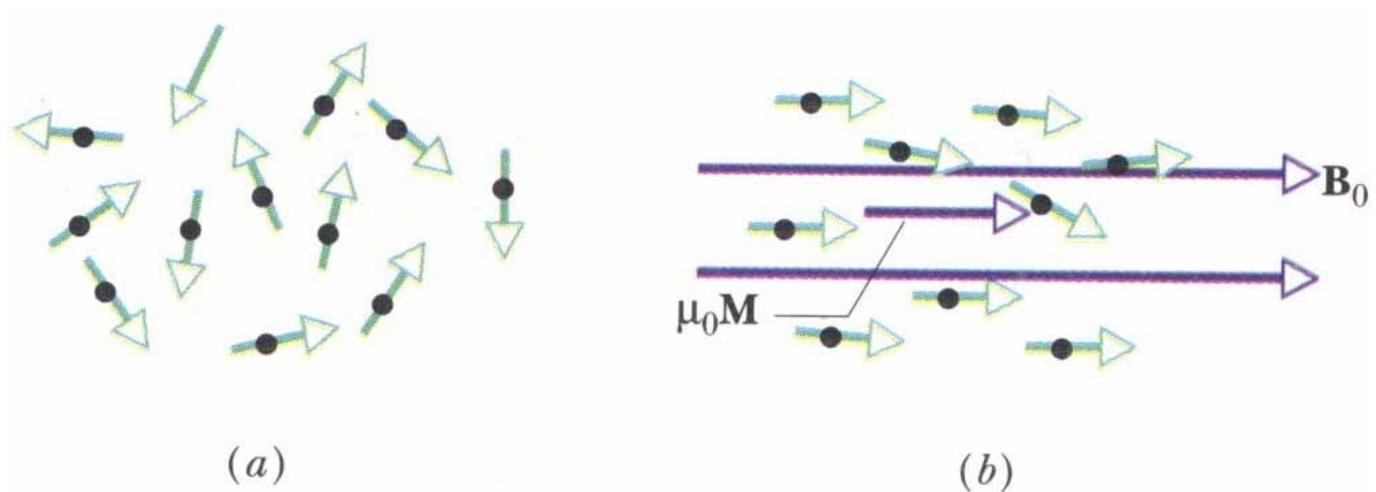
Nel caso (b) il momento magnetico diminuisce ma in ogni caso si ha sempre  $\boldsymbol{\mu}' - \boldsymbol{\mu}$  antiparallelo al campo applicato  $\mathbf{B}$ .

**TABELLA 3** PERMEABILITÀ RELATIVA DI  
ALCUNE SOSTANZE  
DIAMAGNETICHE A TEMPERATURA  
AMBIENTE

<i>Sostanza</i>	$\kappa_m - 1$
Mercurio	$-3.2 \times 10^{-5}$
Argento	$-2.6 \times 10^{-5}$
Bismuto	$-1.7 \times 10^{-5}$
Alcool etilico	$-1.3 \times 10^{-5}$
Rame	$-9.7 \times 10^{-6}$
Diossido di carbonio (1 atm)	$-1.1 \times 10^{-8}$
Azoto (1 atm)	$-5.4 \times 10^{-9}$

## Paramagnetismo

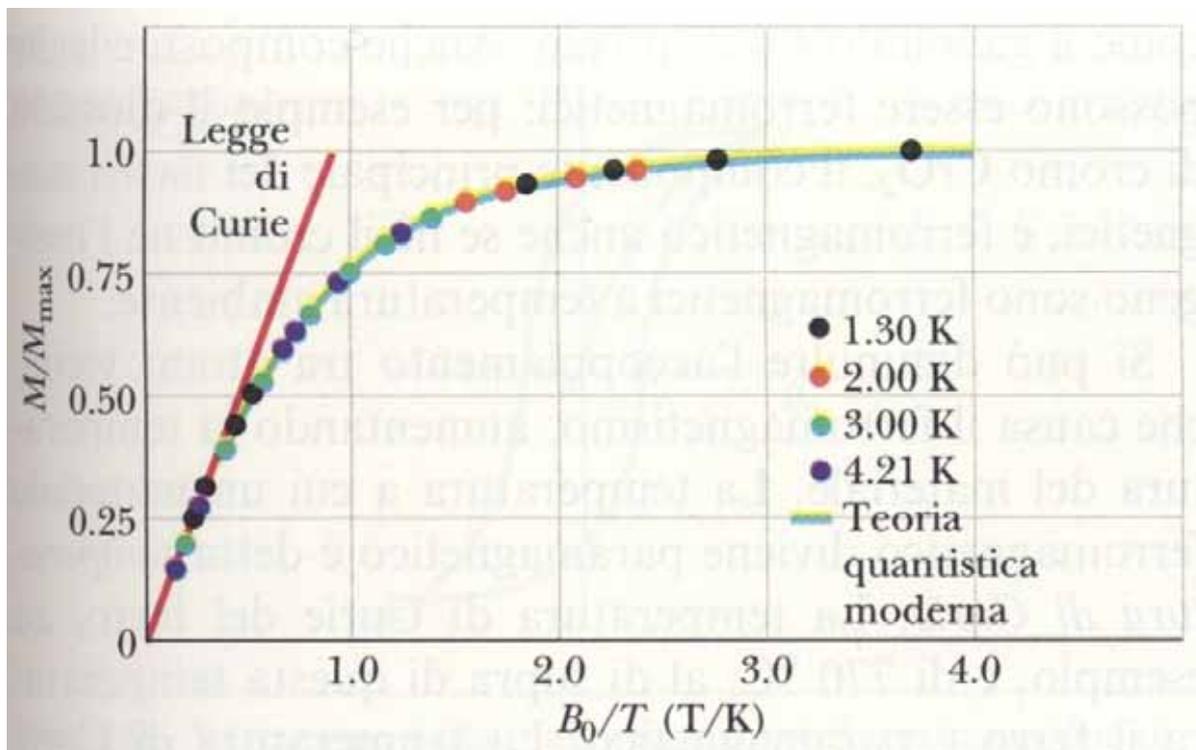
Materiali che possiedono un momento di dipolo magnetico permanente



I dipoli tendono a orientarsi come il campo magnetico esterno  
 Dipendenza dalla temperatura (*Legge di Curie*)

$$M = C \frac{B_0}{T} \quad (9.31)$$

$C$  costante di Curie



$$M_{max} = \frac{N}{V} \mu_i \quad (9.32)$$

**TABELLA 2 PERMEABILITÀ RELATIVA DI ALCUNI MATERIALI PARAMAGNETICI A TEMPERATURA AMBIENTE**

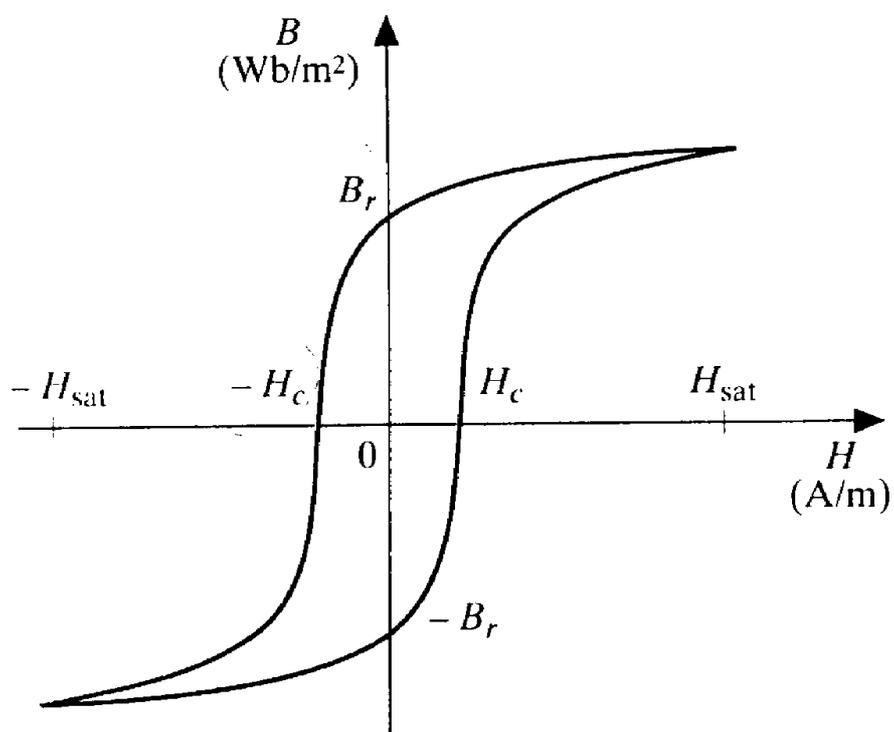
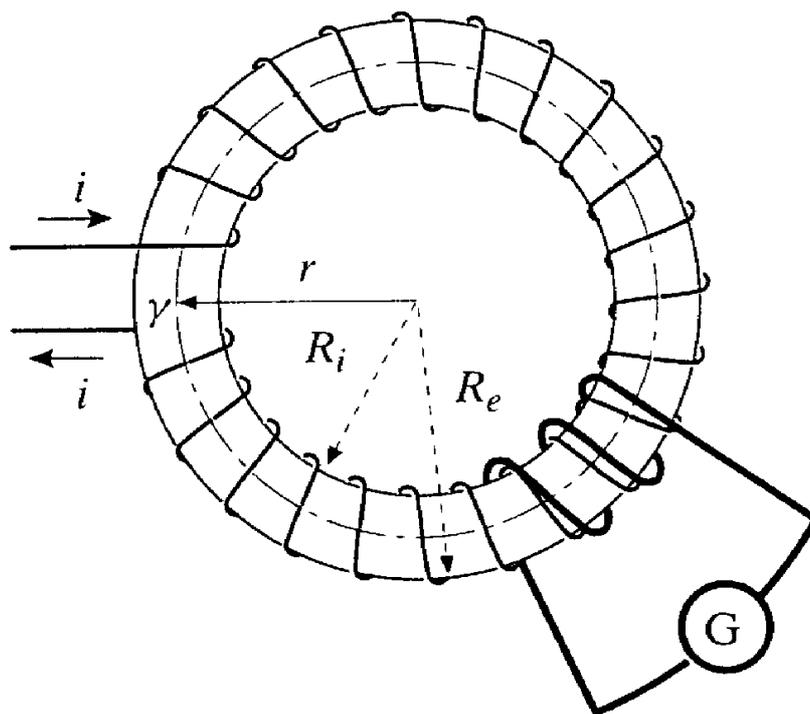
<i>Materiale</i>	$\kappa_m - 1$
Gd <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	$1.2 \times 10^{-2}$
CuCl <sub>2</sub>	$3.5 \times 10^{-4}$
Cromo	$3.3 \times 10^{-4}$
Tungsteno	$6.8 \times 10^{-5}$
Alluminio	$2.2 \times 10^{-5}$
Magnesio	$1.2 \times 10^{-5}$
Ossigeno (1 atm)	$1.9 \times 10^{-6}$
Aria (1 atm)	$3.6 \times 10^{-7}$

## Ferromagnetismo

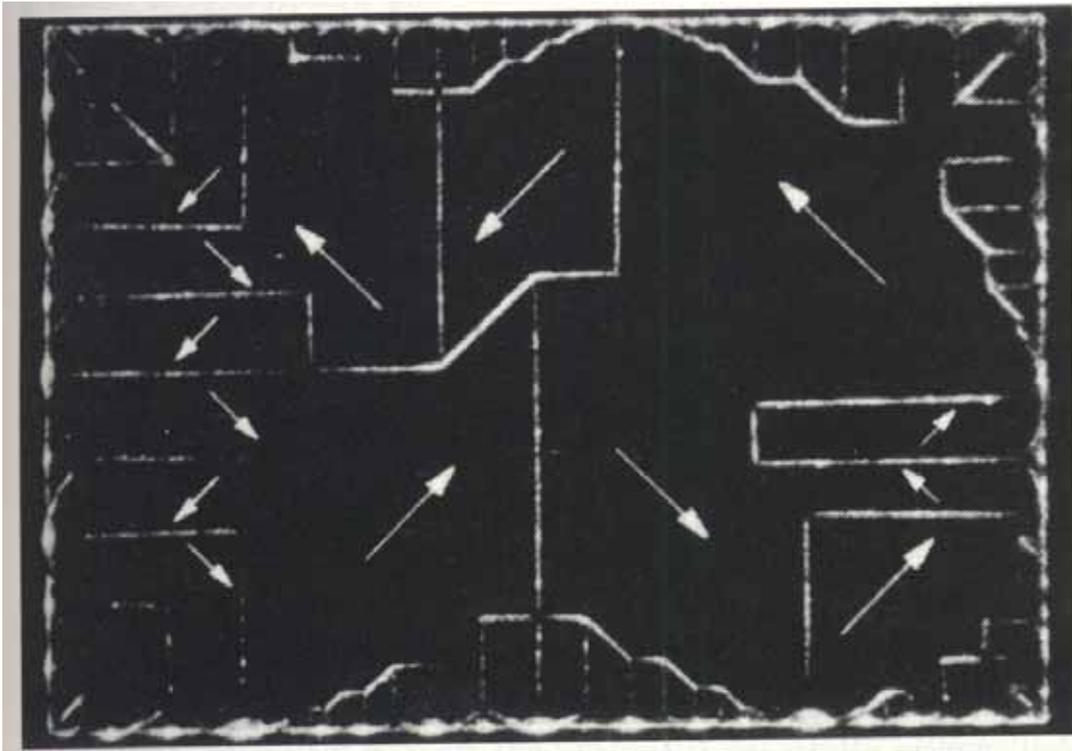
Forte interazione tra momenti di dipolo magnetici che li mantiene allineati. *Fe, Co, Ni, CrO<sub>2</sub>*

*Temperatura di Curie* a cui un materiale ferromagnetico diviene paramagnetico

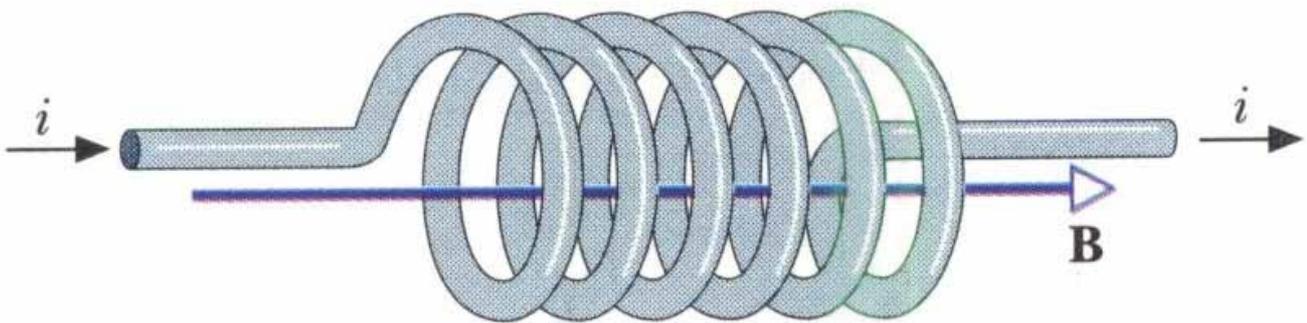
*Ciclo di isteresi*



*domini magnetici*

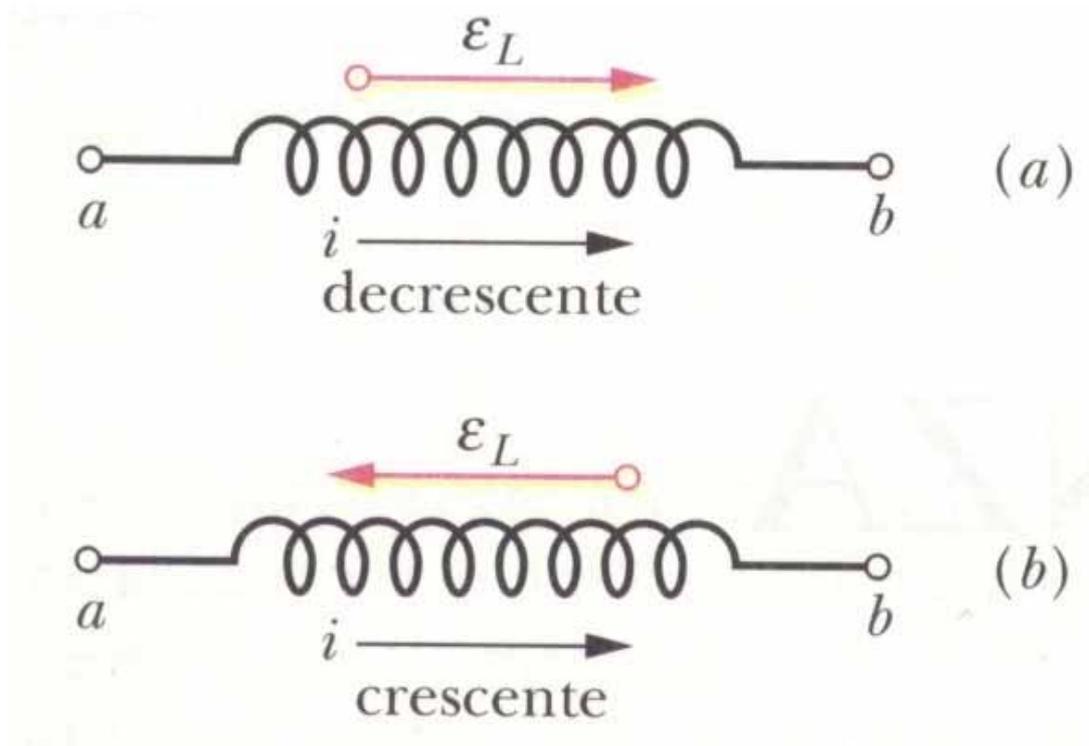


## 10 Induttanza



$$\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt} \quad (10.1)$$

$$1 \text{ henry} = 1 \text{ volt} - \text{secondo/ampere} \quad (10.2)$$



La fem indotta è tale da opporsi alla variazione di corrente

$$V_b - V_a = -L \frac{di}{dt} \quad (10.3)$$

$L$  dipende soltanto dalle caratteristiche geometriche del dispositivo

## Induttanza di un solenoide

$$\mathcal{E}_L = -d \frac{N\Phi_B}{dt} \quad (10.4)$$

$$L \frac{di}{dt} = d \frac{N\Phi_B}{dt} \quad (10.5)$$

$$Li = N\Phi_B \quad (10.6)$$

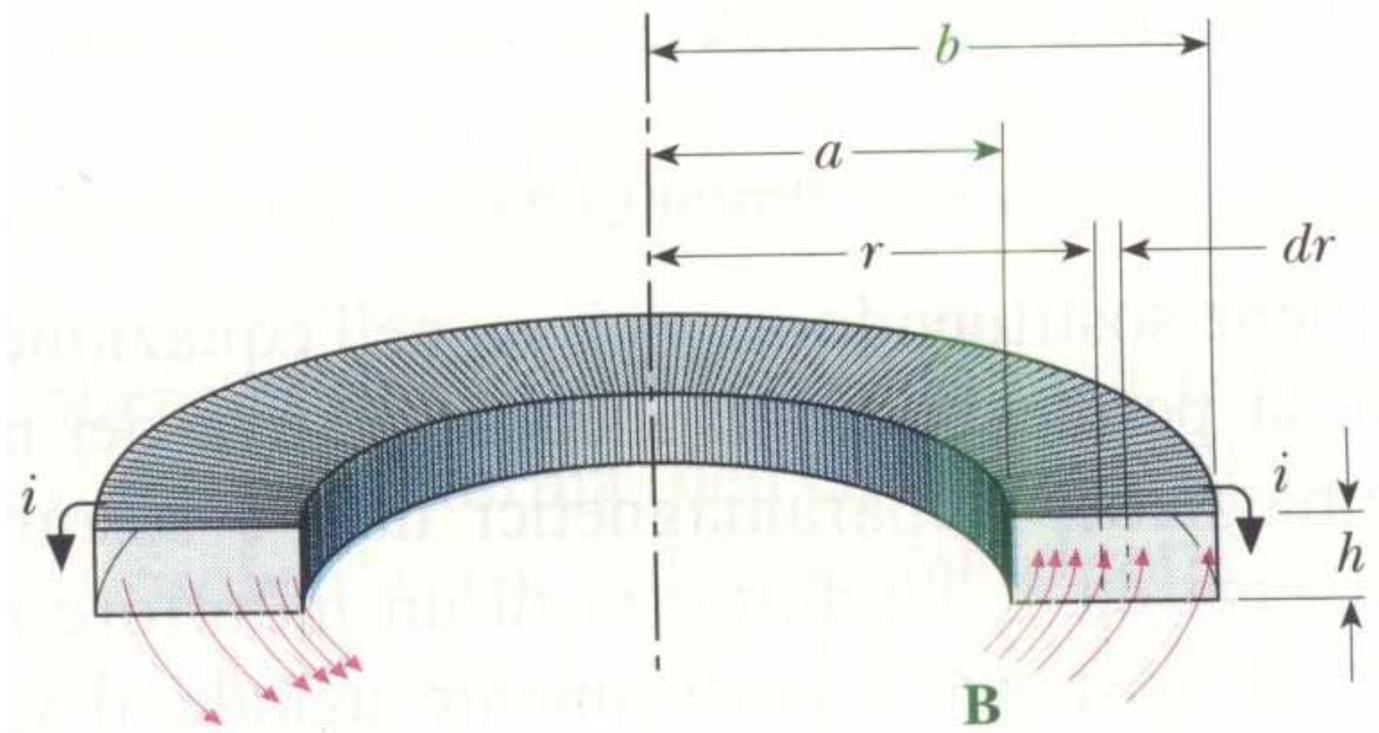
$$L = \frac{N\Phi_B}{i} \quad (10.7)$$

$$N\Phi_B = n l B A = \mu_0 n^2 l i A \quad (10.8)$$

$$L = \mu_0 n^2 l A \quad (10.9)$$

$$\frac{L}{l} = \mu_0 n^2 A \quad (10.10)$$

## Induttanza di un toroide



$$B = \frac{\mu_0 i N}{2\pi r} \quad (10.11)$$

$$\begin{aligned} \Phi_B &= \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \int_a^b B h dr = \int_a^b \frac{\mu_0 i N}{2\pi r} h dr = \\ &= \frac{\mu_0 i N h}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i N h}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad (10.12) \end{aligned}$$

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad (10.13)$$

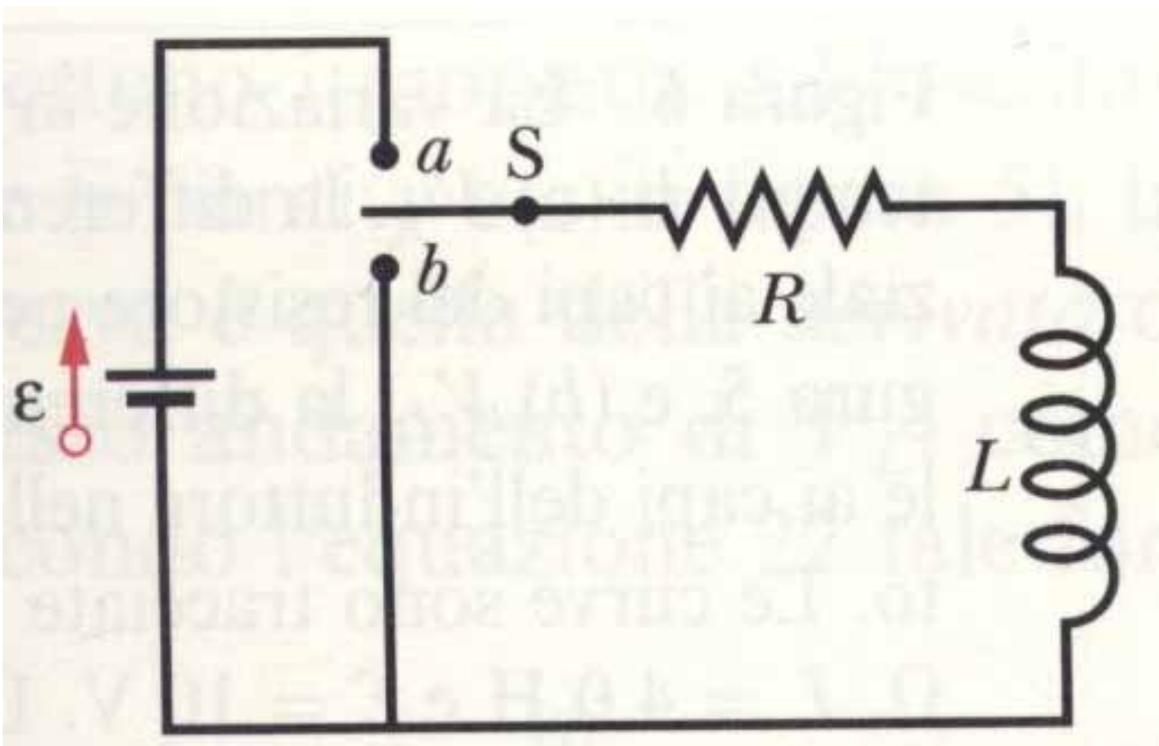
## Induttori con materiali magnetici

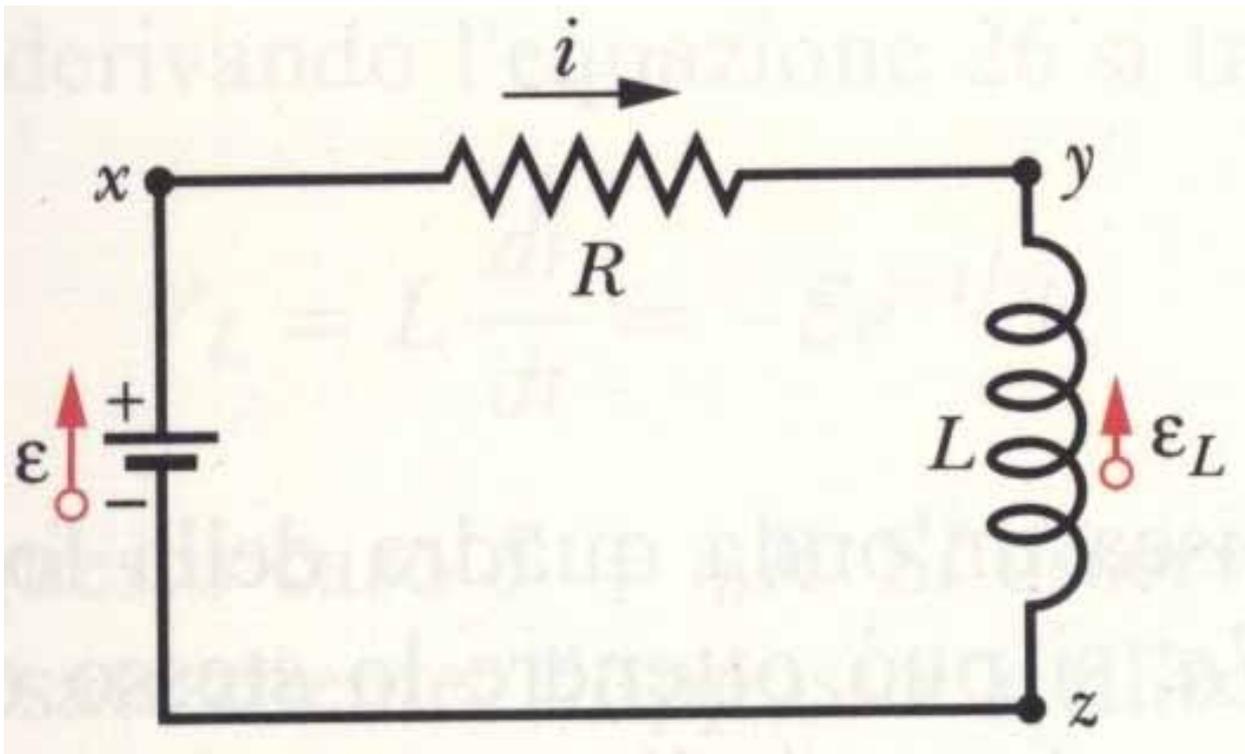
$$\mathbf{B} = \mu_r \mathbf{B}_0 \quad (10.14)$$

$$L = \mu_r L_0 \quad (10.15)$$

Si hanno variazioni sostanziali soltanto nel caso di materiali ferromagnetici

## Circuiti RL





Porto nella posizione (a)

$$V_y - V_x = -iR \quad (10.16)$$

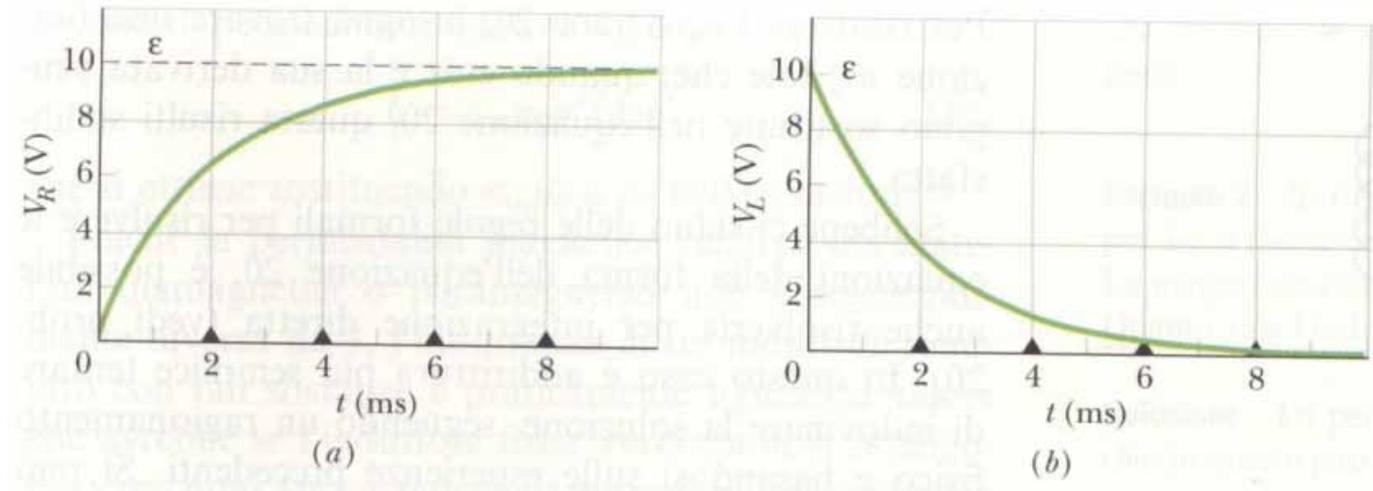
$$V_z - V_y = -L di/dt \quad (10.17)$$

$$-iR - L \frac{di}{dt} + \mathcal{E} = 0 \quad (10.18)$$

$$L \frac{di}{dt} + iR = \mathcal{E} \quad (10.19)$$

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-tR/L}) = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-t/\tau_L}) \quad (10.20)$$

$\tau_L = L/R$  costante di tempo induttiva

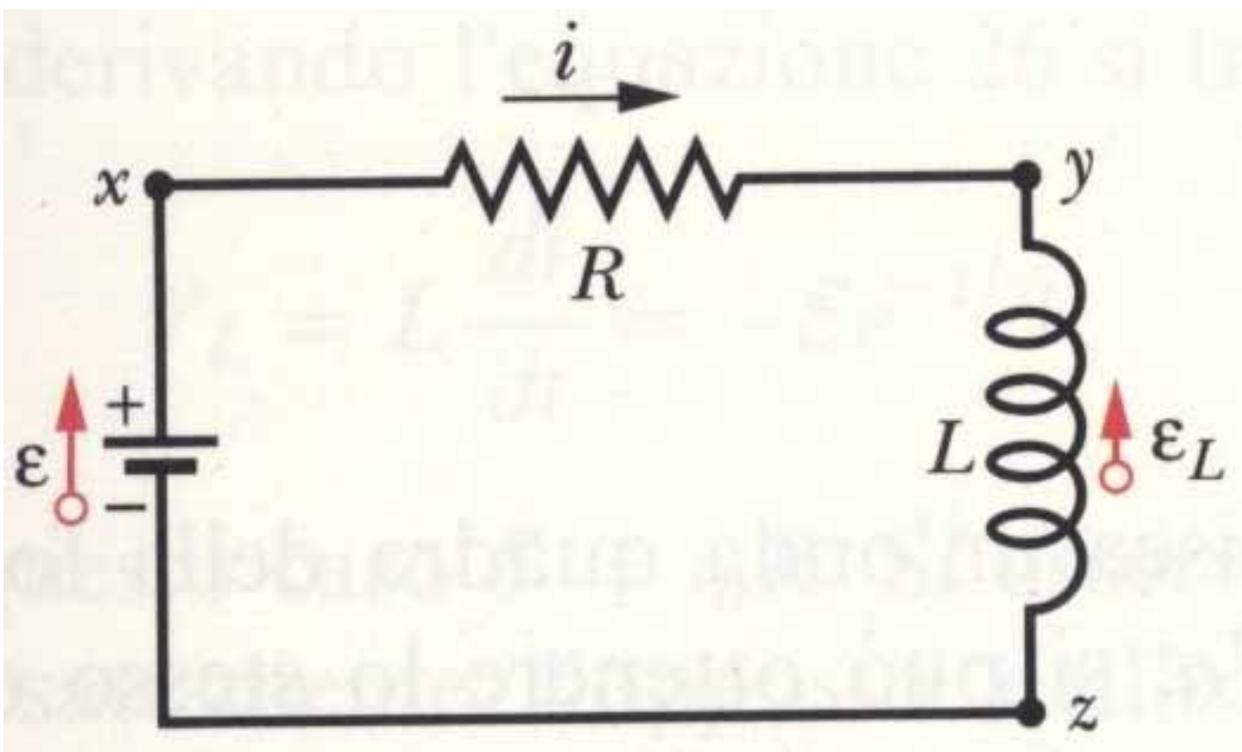


Riporto nella posizione (b)

$$L \frac{di}{dt} + iR = 0 \quad (10.21)$$

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau_L} \quad (10.22)$$

**Energia immagazzinata nel campo magnetico**



$$\mathcal{E} = L \frac{di}{dt} + Ri \quad (10.23)$$

$$\mathcal{E}i = Li \frac{di}{dt} + Ri^2 \quad (10.24)$$

$$\frac{dU_B}{dt} = Li \frac{di}{dt} \quad (10.25)$$

$$dU_B = Lid i \quad (10.26)$$

$$\int_0^{U_B} dU_B = \int_0^i Lid i \quad (10.27)$$

$$U_B = \frac{1}{2} Li^2 \quad (10.28)$$

Energia immagazzinata nel campo magnetico all'interno del solenoide

$$u_B = \frac{U_B}{Al} = \frac{\frac{1}{2} Li^2}{Al} \quad (10.29)$$

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad (10.30)$$

*densità di energia del campo magnetico*

In presenza di entrambi i campi elettrico  $\mathbf{E}$  e magnetico  $\mathbf{B}$

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad (10.31)$$

# 11 Equazioni di Maxwell

TABELLA 1 INSIEME DI PROVA<sup>a</sup> DI EQUAZIONI FONDAMENTALI DELL'ELETTROMAGNETISMO

Simbolo	Nome	Equazione	Paragrafo di riferimento
I	Legge di Gauss per l'elettricità	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = q/\epsilon_0$	29-3
II	Legge di Gauss per il magnetismo	$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$	37-1
III	Legge dell'induzione di Faraday	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -d\Phi_B/dt$	36-2
IV	Legge di Ampère	$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i$	35-5

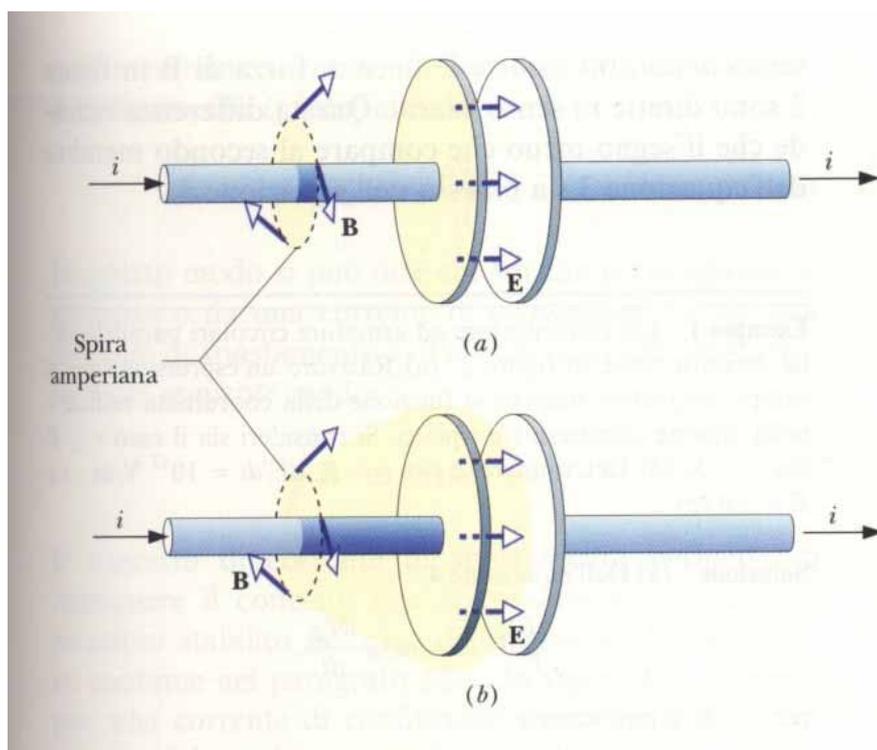
<sup>a</sup> Il termine «di prova» suggerisce, come si vedrà in seguito, che l'equazione IV non sia ancora completa e richieda un termine addizionale; vedi tabella 2.

Due integrali di superficie e due integrali di linea

*Se si varia un campo magnetico ( $-d\Phi_B/dt$ ) si produce un campo elettrico ( $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ )*

*Se si varia un campo elettrico ( $-d\Phi_E/dt$ ) si produce un campo magnetico ( $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ )*

## Corrente di Spostamento



$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i \quad (11.1)$$

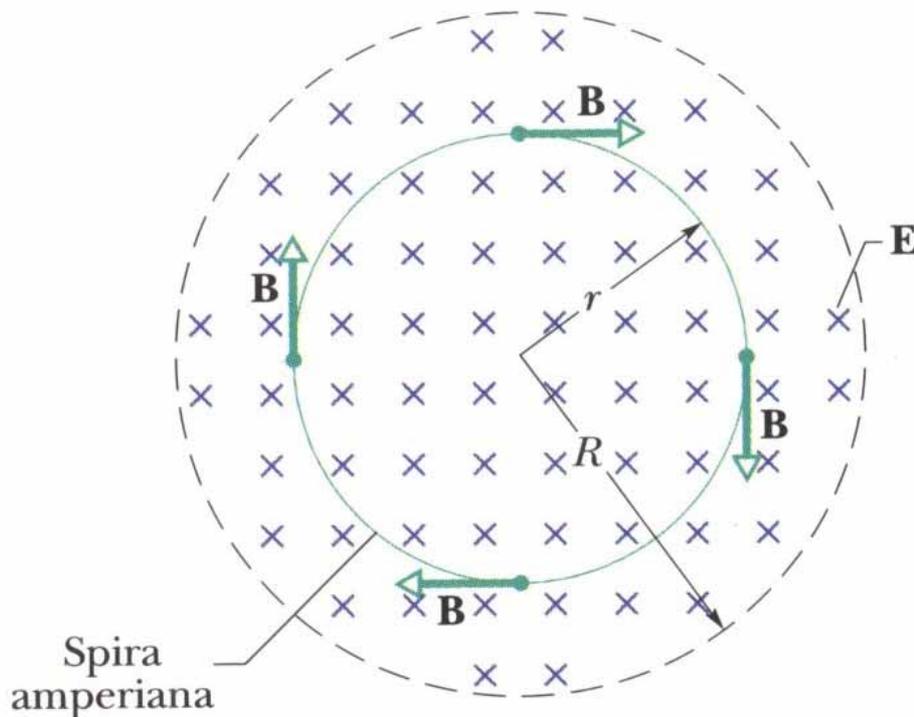
$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (11.2)$$

$$q = \epsilon_0 EA \quad (11.3)$$

$$\epsilon_0 \frac{d(EA)}{dt} = i \quad (11.4)$$

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \mu_0 i \quad (11.5)$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (11.6)$$



Un campo elettrico variabile induce un campo magnetico

Linee di forza di  $\mathbf{E}$  dirette in senso antiorario, linee di forza di  $\mathbf{B}$  dirette in senso orario

*Corrente di spostamento*

$$i_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (11.7)$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0(i + i_d) \quad (11.8)$$

$$i = \frac{dq}{dt} = \epsilon_0 \frac{d(EA)}{dt} = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = i_d \quad (11.9)$$

TABELLA 2 EQUAZIONI FONDAMENTALI DELL'ELETTROMAGNETISMO (EQUAZIONI DI MAXWELL)<sup>a</sup>

Numero	Nome	Equazione	Descrive	Esperimento decisivo	Capitolo di riferimento
I	Legge di Gauss per l'elettricità	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = q/\epsilon_0$	Carica e campo elettrico	(a) Cariche dello stesso segno si respingono e cariche di segno opposto si attraggono, in modo proporzionale all'inverso della loro distanza al quadrato. (b) Una carica su un conduttore isolato si dispone sulla superficie esterna.	29
II	Legge di Gauss per il magnetismo	$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$	Il campo magnetico	Non è stato finora possibile verificare l'esistenza di un monopolo magnetico.	37
III	Legge dell'induzione di Faraday	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -d\Phi_B/dt$	L'effetto elettrico di un campo magnetico variabile	Una sbarra magnetica spinta attraverso una spira chiusa, vi fa circolare una corrente.	36
IV	Legge di Ampère (generalizzata da Maxwell)	$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 d\Phi_E/dt$	L'effetto magnetico di una corrente o di un campo elettrico variabile	(a) Una corrente in un filo genera un campo magnetico in prossimità del filo. (b) La velocità della luce può essere calcolata da misure puramente elettromagnetiche.	35 41

<sup>a</sup> Scritte nell'ipotesi che non vi siano materiali dielettrici o magnetici.

*simmetria, onde elettromagnetiche, elettromagnetismo e relatività*

## 12 Equazioni di Maxwell in forma differenziale

La teoria completa dell'elettromagnetismo è dovuta a Maxwell

Le equazioni di Maxwell pongono in relazione i campi  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$ , la densità complessiva di carica elettrica  $\rho_{tot}$  e la densità complessiva di corrente  $\mathbf{j}_{tot}$

In forma integrale le equazioni di Maxwell sono

- *Legge di Ampere*

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \sum_k i_k + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \phi_S(\mathbf{E})$$

- *Legge dell'induzione di Faraday*

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \phi_S(\mathbf{B})$$

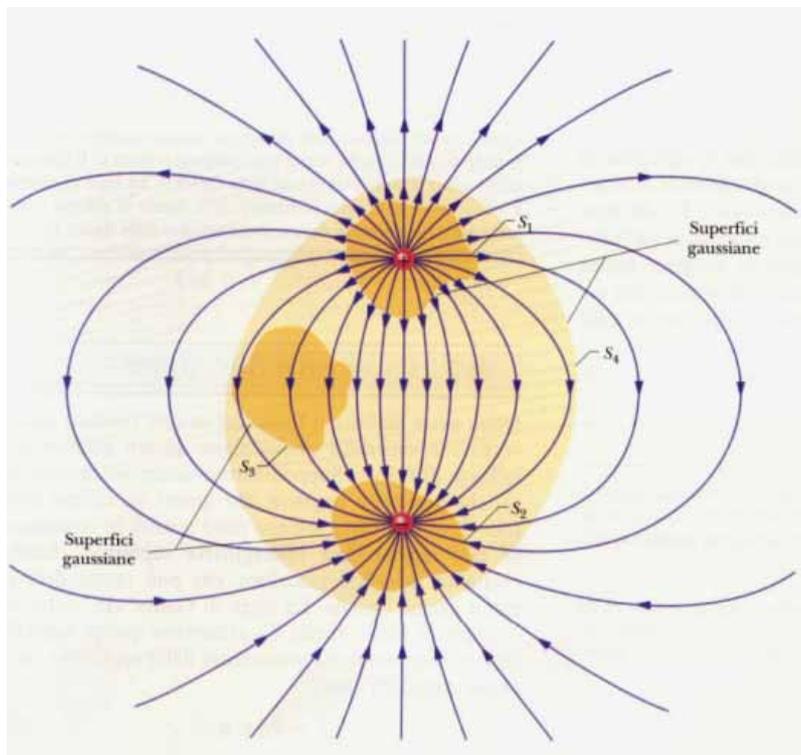
- *Legge di Gauss per campo elettrico*

$$\phi_S(\mathbf{E}) = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

- *Legge di Gauss per la campo magnetico*

$$\phi_S(\mathbf{B}) = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

## Formulazione differenziale della Legge di Gauss per il campo elettrico



In presenza di una distribuzione continua di cariche con densità  $\rho$  si ottiene

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V dq = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(x, y, z) dx dy dz \quad (12.1)$$

dove  $V$  indica la regione di spazio racchiusa dalla superficie  $S$ .

*Il flusso totale del campo elettrico  $\mathbf{E}$  uscente attraverso una superficie chiusa è uguale alla carica totale interna alla superficie divisa per  $\epsilon_0$*

## Teorema della divergenza

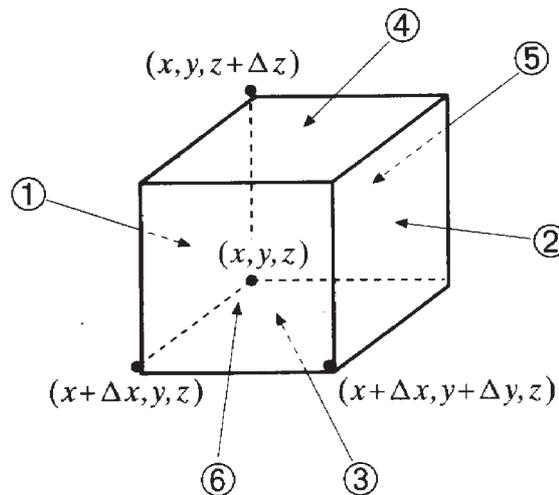
L'operatore vettoriale differenziale *nabla*  $\nabla$  è definito dalla seguente relazione

$$\nabla = \mathbf{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{u}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

L'operatore agisce su funzioni o su campi vettoriali

Dato un campo vettoriale  $\mathbf{F}$  si definisce *divergenza* di  $\mathbf{F}$  la grandezza

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$



Consideriamo un parallelepipedo retto di spigoli  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  e  $\Delta z$ . Il flusso di un campo vettoriale  $\mathbf{F}$  attraverso la superficie  $\Delta S$  del parallelepipedo risulta

$$\begin{aligned} \int_{\Delta S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \int_1 \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS + \int_2 \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS + \\ &+ \int_3 \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS + \int_4 \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS + \int_5 \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS + \int_6 \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS \end{aligned}$$

In prima approssimazione

$$\int_1 \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_1 F_y dx dz \approx -F_y(1) \Delta x \Delta z$$

$$\begin{aligned} \int_2 \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS &= \int_2 F_y dx dz \approx F_y(2) \Delta x \Delta z = \\ &\approx \left[ F_y(1) + \frac{\partial F_y}{\partial y} \Delta y \right] \Delta x \Delta z \end{aligned}$$

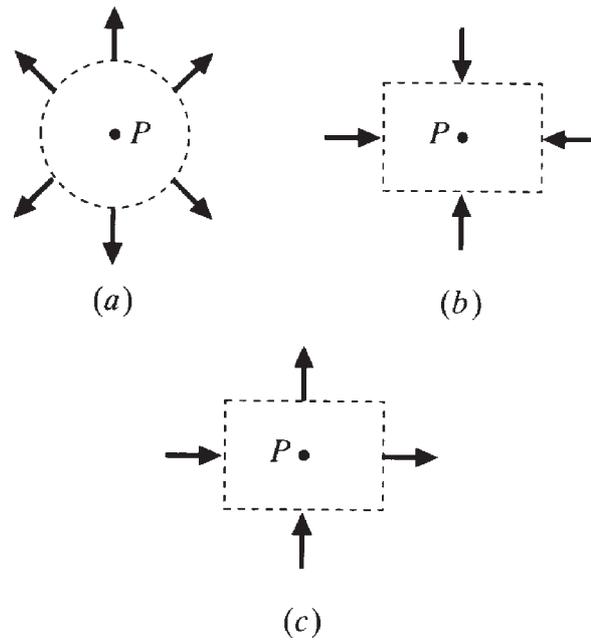
Espressioni analoghe sono valide per le altre facce. Sommando risulta

$$\int_{\Delta S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \approx \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z = \nabla \cdot \mathbf{F} \Delta V$$

La divergenza di  $\mathbf{F}$  nel punto  $P$  è il flusso per unità di volume di  $\mathbf{F}$  uscente da  $P$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

La divergenza in un punto può essere positiva negativa o nulla a seconda dei casi



nel caso di un volume finito  $V$ , dividendolo in tanti parallelepipedi infinitesimi, la somma dei flussi attraverso tutte le superfici equivale al flusso attraverso la superficie esterna, perchè tutte le facce interne compaiono due volte con la normale orientata in verso opposto.

Si ha il *teorema della divergenza*

$$\boxed{\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV}$$

*Il flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie chiusa è uguale all'integrale della divergenza del campo esteso alla regione di spazio racchiusa dalla superficie*

Se consideriamo un volumetto infinitesimo  $\Delta V$  in una regione sede di un campo elettrico

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \Delta V$$

quindi

$$\frac{1}{\Delta V} \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Poiché la divergenza del vettore  $\mathbf{E}$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\Delta V} \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS$$

La scrittura differenziale del Teorema di Gauss è

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad (12.2)$$

*La divergenza di  $\mathbf{E}$  in un punto è uguale alla densità volumetrica di carica in quel punto divisa per  $\epsilon_0$*

## Formulazione differenziale della legge di Faraday

### Gradiente di un campo scalare

Consideriamo un campo scalare  $U(x, y, z)$ . Partendo da un punto  $P$  si esegue uno spostamento

$$d\mathbf{s} = dx\mathbf{u}_x + dy\mathbf{u}_y + dz\mathbf{u}_z$$

La variazione corrispondente di  $U$  risulta

$$\begin{aligned} dU &= U(x + dx, y + dy, z + dz) - U(x, y, z) = \\ &= \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \end{aligned}$$

introducendo

$$\text{grad } U = \nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{u}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{u}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{u}_z$$

si ottiene

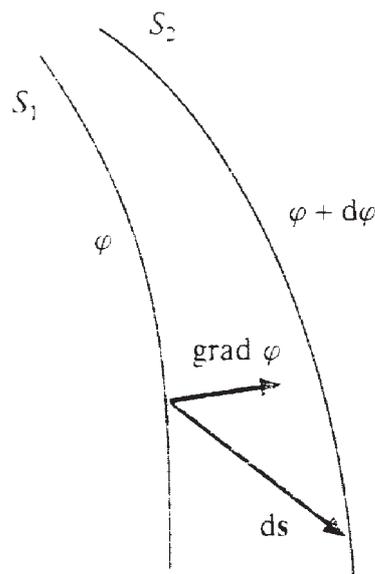
$$dU = \nabla U \cdot d\mathbf{s} = \nabla U \cdot \mathbf{n} ds \quad (12.3)$$

dove  $\mathbf{n}$  è un versore avente direzione e verso di  $d\mathbf{s}$

La derivata direzionale della funzione  $U$  nella direzione specificata dal versore  $\mathbf{n}$  risulta

$$\frac{dU}{ds} = \nabla U \cdot \mathbf{n} = |\nabla U| \cos \theta$$

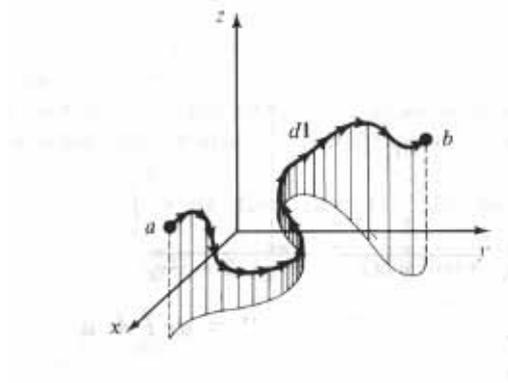
dove  $\theta$  è l'angolo tra lo spostamento  $d\mathbf{s}$  e la direzione del gradiente nel punto considerato, cioè  $dU/ds$  è la componente del vettore  $\nabla U$  nella direzione orientata fissata dallo spostamento



- Il gradiente di  $U(x, y, z)$  è un vettore di modulo uguale al valore assoluto massimo della derivata direzionale  $dU/ds$

- la direzione e il verso coincidono con quelli per cui la derivata direzionale (cioè la velocità di cambiamento) assume valore massimo
- in ogni punto, il vettore gradiente è perpendicolare alla curva di livello  $U(x, y, z) = \text{cost}$  passante per il punto considerato

Dalla (12.3) si ottiene per l'integrale di linea di  $\nabla U$  lungo una linea generica che unisce due punti  $a$  e  $b$



il teorema fondamentale del gradiente

$$\int_a^b \nabla U \cdot d\mathbf{s} = U(b) - U(a) \quad (12.4)$$

Consideriamo un campo elettrostatico. Essendo il campo conservativo

$$V_b - V_a = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (12.5)$$

quindi dalla (12.4) si ha

$$\int_a^b \nabla V \cdot d\mathbf{s} = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (12.6)$$

cioè

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{u}_z\right) \quad (12.7)$$

Formulazione differenziale della relazione tra campo elettrico e potenziale

Introducendo la (12.7) nella espressione della legge di Gauss (12.2) si ottiene l'*equazione di Poisson*

$$\nabla \cdot (\nabla V) = \nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (12.8)$$

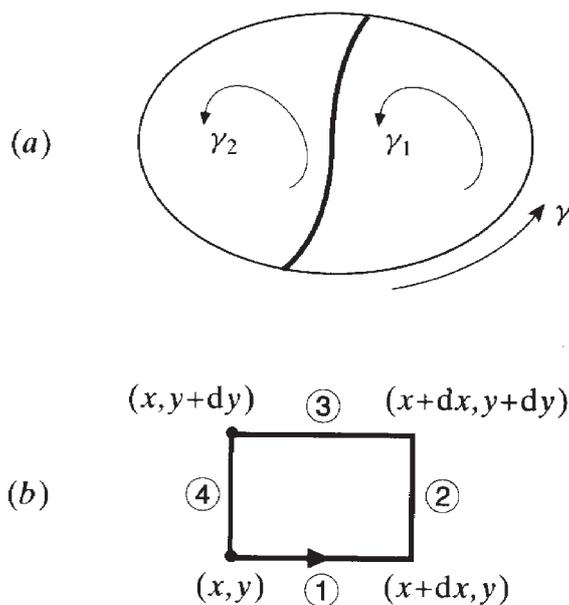
## Teorema di Stokes

Dato un campo vettoriale  $\mathbf{F}$  si definisce *rotore* o *rotazione* di  $\mathbf{F}$  il vettore (in coordinate cartesiane)

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\mathbf{u}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\mathbf{u}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\mathbf{u}_z \end{aligned}$$

Consideriamo la circuitazione del campo vettoriale  $\mathbf{F}$  lungo una linea chiusa  $\gamma$

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$



La circuitazione è uguale alla somma sulle due curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ . In generale la superficie racchiusa da  $\gamma$  può essere suddivisa in infiniti rettangoli con circuitazione totale su  $\gamma$  uguale alla somma della circuitazione sui rettangoli.

La circuitazione di  $\mathbf{F}$  lungo un contorno rettangolare infinitesimo è

$$\begin{aligned} & F_x(1) dx + F_y(2) dy - F_x(3) dx - F_y(4) dy = \\ & = [F_x(x, y) - F_x(x, y+dy)]dx + [F_y(x+dx, y) - F_y(x, y)]dy = \\ & = \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) dxdy = (\nabla \times \mathbf{F})_z dxdy = \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned}$$

dove  $\mathbf{n}$  è il versore di  $dS$  orientato come il verso di avanzamento di una vite destrorsa che ruota nel verso di percorrenza di  $\gamma$ .

Risulta quindi

$$\boxed{\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS} \quad (12.9)$$

*Teorema di Stokes: La circuitazione di un campo vettoriale lungo una linea chiusa  $\gamma$  è uguale al flusso della rotazione*

del campo attraverso una qualunque superficie avente per contorno  $\gamma$

Vale la relazione

$$\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

La rotazione di  $\mathbf{F}$  nel punto  $P$  è un vettore avente per modulo il valore assoluto massimo della circuitazione specifica (per unità di superficie) di  $\mathbf{F}$  intorno a  $P$  e direzione coincidente con il versore della superficie infinitesima corrispondente a tale valore massimo.

Dal teorema di Stokes segue che se  $\nabla \times \mathbf{F} = 0$  in tutti i punti sede della regione del campo, cioè il campo è *irrotazionale*, la circuitazione lungo una qualsiasi linea chiusa è nulla e quindi il campo è conservativo  $\mathbf{F} = -\nabla\phi$

Il flusso di  $\nabla \times \mathbf{F}$  attraverso una superficie chiusa  $S_C$  è nullo. Infatti, dividendo  $S_C$  in due superfici non chiuse,  $\gamma$  viene percorso due volte in senso inverso e quindi la circuitazione di  $\mathbf{F}$  è nulla. Per il teorema della divergenza si ha che

$$\int_{S_C} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) dV = 0$$

quindi

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$$

Il campo elettrostatico è conservativo, si ha quindi

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \\ &= \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \mathbf{u}_x + \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \mathbf{u}_y + \\ &\quad + \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \mathbf{u}_z = 0 \quad (12.10)\end{aligned}$$

L'espressione della *Legge dell'induzione di Faraday* è, data una superficie  $S$  di contorno  $\gamma$

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \phi_S(\mathbf{B})$$

Applicando il teorema di Stokes

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS$$

Quindi

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}} \quad (12.11)$$

che si riduce alla (12.10) nel caso statico

## Formulazione differenziale della Legge di Gauss per il campo magnetico

Sperimentalmente

*le linee di forza del campo vettoriale  $\mathbf{B}$  sono o linee chiuse*

*di lunghezza finita o linee a spirale di lunghezza infinita, cioè il campo induzione magnetica non possiede sorgenti nè positive nè negative*

Considerando una qualunque superficie chiusa  $S$ , si ha quindi il *Teorema di Gauss per il campo magnetico*

$$\Phi_S(\mathbf{B}) = \oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0$$

*il flusso magnetico (dell'induzione magnetica  $\mathbf{B}$ ) attraverso una superficie chiusa è sempre nullo.*

Il numero totale di linee di forza entranti nella superficie coincide con il numero totale di linee di forza uscenti. Non esistono i monopoli magnetici. Per il teorema della divergenza

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} \, dV = 0$$

e quindi

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0}$$

Un campo  $\mathbf{G}$  per il quale  $\nabla \cdot \mathbf{G} = 0$  si dice *solenoidale* e si può dimostrare che può essere espresso come rotazione di un altro campo vettoriale  $\mathbf{G} = \nabla \times \mathbf{F}$

Il campo  $\mathbf{B}$  è un campo solenoidale

## Formulazione differenziale della Legge di Ampere

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \sum_k i_k + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \phi_S(\mathbf{E}) \quad (12.12)$$

Se  $\mathbf{J}(x, y, z)$  rappresenta la densità di corrente attraverso la superficie  $S$  concatenata alla curva  $c$ , si ha

$$\mu_0 \sum_k i_k = \int_S \mu_0 \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS$$

Applicando il teorema di Stokes

$$\oint_c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \mu_0 \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS + \int_S \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS$$

Quindi

$$\int_S \left[ \nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{J} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

Poichè le relazioni devono valere qualunque sia la superficie  $S$  considerata, deve essere

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (12.13)$$

La cui principale conseguenza è che *ad ogni campo elettrico variabile nel tempo è associato un campo magnetico*

## Onde elettromagnetiche

Le equazioni di Maxwell in forma differenziale sono

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_{tot} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (12.14)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (12.15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{tot}}{\epsilon_0} \quad (12.16)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (12.17)$$

Su una carica  $q$  in moto con velocità  $\mathbf{v}$  agisce la forza di Lorenz

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

In presenza di mezzi materiali si introducono i campi ausiliari  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{H}$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M} = \mu \mathbf{H}$$

La (12.14) diventa

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{j}_C + \mathbf{j}_P + \mathbf{j}_M + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) \quad (12.18)$$

dove  $\mathbf{j}_P$  rappresenta la densità di corrente di polarizzazione e  $\mathbf{j}_M$  la densità di corrente di magnetizzazione. Si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_P &= \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \\ \mathbf{j}_M &= \nabla \times \mathbf{M} \end{aligned}$$

e quindi la (12.18) diventa

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0(\mathbf{j}_C + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) = \\ &= \mu_0(\mathbf{j}_C + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \end{aligned}$$

Le equazioni di Maxwell nella materia diventano quindi

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_C + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}} \quad (12.19)$$

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}} \quad (12.20)$$

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_L} \quad (12.21)$$

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0} \quad (12.22)$$

Dove  $\rho_L$  rappresenta la densità di carica elettrica libera e  $\mathbf{j}_C$  la densità di corrente di conduzione

Alle equazioni di Maxwell si unisce anche la legge di Ohm

$$\mathbf{j}_C = \gamma \mathbf{E}$$

Le equazioni ricavate sono valide per sostanze isotrope e non ferromagnetiche dure per le quali si ha  $\mathbf{B} = \mu(\mathbf{H})\mathbf{H}$ .

Le equazioni di Maxwell ricavate per campi costanti o lentamente variabili nel tempo sono valide sperimentalmente anche in presenza di campi rapidamente variabili nel tempo.

Tramite le (12.19)-(12.22) si ricavano i vettori  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{H}$  quando sono noti nello spazio e nel tempo  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\gamma$ ,  $\rho_L(x, y, z, t)$  e  $\mathbf{j}_C(x, y, z, t)$ .

La soluzione delle equazioni di Maxwell rappresentano onde elettromagnetiche che si propagano nel vuoto alla velocità della luce  $c$