

# FISICA SPERIMENTALE B APPUNTI DELLE LEZIONI

*G. Sberveglieri*

2002-2003



# Indice

<b>1</b>	<b>Dinamica di un sistema di particelle</b>	<b>1</b>
	Moto del centro di massa . . . . .	1
	Leggi del moto di un sistema di particelle . . . . .	2
	Massa ridotta . . . . .	7
	Momento angolare di un sistema . . . . .	9
	Momento angolare nei sistemi di riferimento $C$ e $L$	13
	Energia Cinetica di un sistema . . . . .	17
	Conservazione dell'energia di un sistema di particelle	18
	Energia interna di un sistema . . . . .	21
	Relazione tra l'energia cinetica nei sistemi $C$ e $L$ . .	22
	Riassunto delle relazioni valide per i sistemi di particelle	23
<b>2</b>	<b>Urti</b>	<b>25</b>
	Impulso e quantità di moto . . . . .	26
	Conservazione della quantità di moto nei processi di urto . . . . .	27
	Esempio . . . . .	30
	Urti in una dimensione . . . . .	30
	Urti elastici . . . . .	31
	Urti anelastici . . . . .	34
	Il pendolo balistico . . . . .	34
	Sistema di riferimento del centro di massa . . . . .	35

<b>3</b>	<b>Corpo rigido</b>	<b>39</b>
	Momento angolare di un corpo rigido . . . . .	41
	Assi principali di un corpo rigido . . . . .	43
	Calcolo dei momenti di inerzia . . . . .	44
	Teorema di Steiner o degli assi paralleli (Teorema di Lagrange) . . . . .	45
	Raggio giratore di un corpo . . . . .	47
	Momento di inerzia di una lamina piana sottile	48
	Momento di inerzia di una sbarra sottile omogenea . . . . .	49
	Equazione del moto rotatorio . . . . .	50
	Energia cinetica di rotazione . . . . .	51
	Moto di rotolamento senza strisciamento . . . . .	53
<b>4</b>	<b>Gravitazione</b>	<b>57</b>
	Dinamica planetaria . . . . .	59
	Massa inerziale e massa gravitazionale . . . . .	63
	Energia potenziale gravitazionale . . . . .	64
	Moto generale gravitazionale . . . . .	69
	Sezioni coniche . . . . .	69
	Eccentricità in funzione dei parametri fisici del moto gravitazionale . . . . .	70
	Campo Gravitazionale . . . . .	74
	Potenziale gravitazionale . . . . .	76
	Campo gravitazionale di un guscio sferico . . . . .	77

---

Campo gravitazionale di una sfera piena . . . . .	80
Principio di equivalenza . . . . .	83
Gravitazione e forze intermolecolari . . . . .	84
<b>5 Termodinamica</b>	<b>86</b>
Aspetti microscopici e macroscopici . . . . .	86
Il metodo termodinamico . . . . .	86
Sistema, ambiente, frontiera . . . . .	87
Stati termodinamici e variabili di stato . . . . .	87
Equilibrio termodinamico . . . . .	88
Funzioni di stato ed equazioni di stato . . . . .	89
Trasformazioni termodinamiche . . . . .	90
Rappresentazione grafica di stati e trasformazioni	92
Esempio di trasformazione reversibile . . . . .	92
Equilibrio termico . . . . .	93
Temperatura . . . . .	95
Misura della temperatura . . . . .	96
L'equazione di stato dei gas ideali . . . . .	99
Legge di Charles . . . . .	99
Legge di Gay - Lussac . . . . .	100
Legge di Boyle . . . . .	101
Unità di misura della pressione . . . . .	104
Termometri . . . . .	105
Termometro a gas . . . . .	105

Termometro a resistenza . . . . .	106
Termometro a liquido in capillare di vetro . .	107
Classificazione delle trasformazioni termodina- miche . . . . .	108
Il calore . . . . .	108
Capacità termica e calore specifico . . . . .	110
Sorgenti di calore . . . . .	111
Transizioni di fase e calori latenti . . . . .	111
Bilanci termici. Equilibri termici . . . . .	113
Il Lavoro in termodinamica . . . . .	114
Esempio . . . . .	116
Unità di misura del lavoro . . . . .	118
Mulinello di Joule . . . . .	118
Primo principio della termodinamica (nelle trasfor- mazioni chiuse) . . . . .	119
Primo principio della termodinamica . . . . .	120
Energia interna di un gas . . . . .	122
Espansione libera di un gas perfetto (rarefatto)	122
Applicazioni del 1° P.T. ad un gas perfetto . .	123
Relazione di Mayer: . . . . .	124
Gas perfetto . . . . .	125
Trasformazione isoterma reversibile . . . . .	125
Trasformazione adiabatica reversibile (Equazio- ni di Poisson) . . . . .	126

---

Diagramma delle trasformazioni nel piano di Clapeyron	126
Calore specifico di una politropica $\Lambda$ di equazione $pV^x = K$ . . . . .	127
Entropia del gas perfetto . . . . .	128
Ciclo di Carnot per un gas perfetto . . . . .	129
Macchine termiche . . . . .	131
Macchina di Stirling . . . . .	133
Macchine frigorifere . . . . .	135
Il frigorifero di Stirling . . . . .	137
Secondo principio della termodinamica . . . . .	139
Reversibilità e irreversibilità . . . . .	142
Irreversibilità meccanica interna . . . . .	143
Il Teorema di Carnot . . . . .	144
Temperatura termodinamica assoluta . . . . .	146
Teorema o disuguaglianza di Clausius . . . . .	148
è possibile ogni ciclo? . . . . .	150
Entropia . . . . .	150
Calcolo dell'entropia per un gas perfetto . . . . .	152
Variazione di entropia di generiche trasformazioni	153
Entropia dell'Universo . . . . .	154
Entropia e processi naturali . . . . .	156
Entropia ed energia inutilizzabile . . . . .	157
Entropia e disordine . . . . .	159
Terzo principio della termodinamica . . . . .	160

---

Elementi di teoria cinetica dei gas . . . . .	161
Introduzione . . . . .	161
Equazione di stato $pV = nRT$ . . . . .	162
Calcolo cinetico della pressione . . . . .	162
Processo di diffusione . . . . .	165
Velocità del suono . . . . .	166
Distribuzione delle velocità molecolari . . . . .	166
Verifica sperimentale della distribuzione di Max- well . . . . .	168
Energia interna e calori molari secondo la teoria cinetica . . . . .	169



# 1 Dinamica di un sistema di particelle

Consideriamo un sistema di particelle

- Moto del centro di massa
- Conservazione della quantità di moto
- Conservazione della quantità di moto angolare
- Conservazione dell'Energia

Il moto di un sistema di particelle può essere separato in

1. Moto del centro di massa (CM)
  - tutta la massa concentrata nel CM
  - Risultante delle Forze esterne applicata in CM
2. Moto delle singole particelle del sistema intorno al CM

## Moto del centro di massa

Se abbiamo un sistema costituito da  $n$  masse  $m_1 + m_2 + \dots + m_n$  dotate di velocità  $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots + \mathbf{v}_n$ , la quantità di moto totale è

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 + \dots$$

La massa totale è:

$$M = \sum_{i=1}^n m_i$$

Consideriamo il sistema equivalente ad un'unica particella di massa  $M$  e di velocità  $\mathbf{v}_{CM}$

$$\mathbf{P} = M\mathbf{v}_{CM}$$

Risulta

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{\mathbf{P}}{M} = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

$\mathbf{v}_{CM}$  è la velocità di un punto denominato *centro di massa*

Le coordinate del centro di massa sono determinate da

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \dots + m_n\mathbf{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i\mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (1.1)$$

Infatti derivando la (1.1) si ottiene

$$\frac{d\mathbf{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i}{M} = \mathbf{v}_{CM}$$

## Leggi del moto di un sistema di particelle

### *Prima legge del moto*

Se il sistema è isolato per il principio di conservazione della quantità di moto  $\mathbf{P}$  è costante, quindi

Il centro di massa di un sistema isolato si muove con velocità costante  $\mathbf{v}_{CM}$  in qualsiasi sistema inerziale

Si definisce sistema di riferimento del centro di massa o sistema  $C$ , il sistema di riferimento in cui

$$\mathbf{v}_{CM} = 0$$

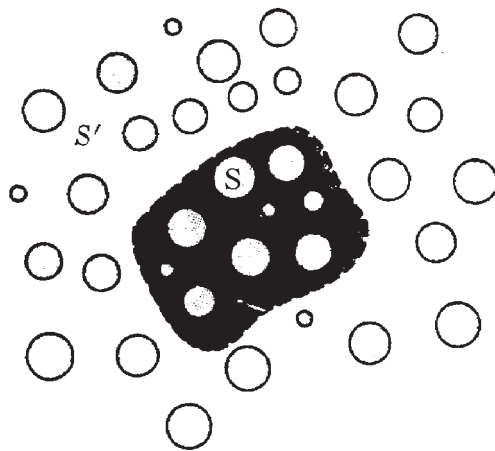
quindi nel sistema  $C$  si ha  $\mathbf{P} = 0$  la quantità di moto totale è nulla

Nel sistema  $C$  la descrizione del moto è in generale più semplice

Il  $CM$  è un punto inventato dotato di notevoli proprietà fisiche

### *Seconda legge del moto*

Consideriamo un sistema  $S$  non isolato che interagisce con il sistema  $S'$



Supponiamo che i due sistemi siano isolati dal resto del mondo  
Per il principio di conservazione della quantità di moto si ha

$$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i + \sum_j \mathbf{p}_j = \text{costante}$$

cioè

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_S + \mathbf{P}_{S'} = \text{costante} \quad (1.2)$$

Quindi

$$\Delta \mathbf{P}_S = -\Delta \mathbf{P}_{S'} \quad (1.3)$$

Si produce uno scambio di quantità di moto fra i due sistemi

Derivando rispetto al tempo la (1.2) si ha

$$\frac{d\mathbf{P}_S}{dt} = -\frac{d\mathbf{P}_{S'}}{dt}$$

Definiamo il primo termine *forza esterna* esercitata su  $S$

$$\mathbf{F}_{ext} = \frac{d\mathbf{P}_S}{dt} = \frac{d(\sum_i \mathbf{p}_i)}{dt}$$

$\mathbf{F}_{ext}$  non contiene le forze interne ad  $S$  perchè per il principio di conservazione della quantità di moto non producono variazioni di  $\mathbf{P}$

Poichè  $\mathbf{v}_{CM} = \frac{\mathbf{P}_S}{M}$  si ha

$$\mathbf{F}_{ext} = M \frac{d\mathbf{v}_{CM}}{dt} = M \mathbf{a}_{CM}$$

Il centro di massa di un sistema di particelle si muove come se fosse una particella avente massa uguale alla massa totale del sistema e soggetta alla forza esterna applicata al sistema

*Terza legge del moto per un sistema di particelle*

Dalla (1.3), definendo  $\mathbf{F}'_{ext}$  la forza di interazione del sistema  $S$  sul sistema  $S'$ , si ha:

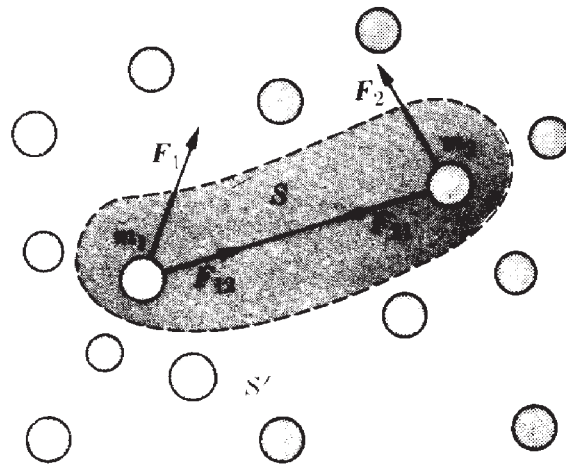
$$\mathbf{F}_{ext} = -\mathbf{F}'_{ext}$$

La legge di azione reazione tra i sistemi  $S$  e  $S'$

L'interazione tra i due sistemi di particelle si può descrivere allo stesso modo dell'interazione fra due particelle singole

Non ricaviamo la descrizione dettagliata del moto delle singole particelle ma la dinamica del  $CM$

*Forze agenti sulle singole particelle del sistema*



Supponiamo che il sistema sia composto da due particelle:

- $\mathbf{F}_{12}$  forza interna agente sulla particella  $m_1$  dovuta alla interazione con la particella  $m_2$
- $\mathbf{F}_{21}$  forza interna agente sulla particella  $m_2$  dovuta alla interazione con la particella  $m_1$
- $\mathbf{F}_1$  forza esterna agente sulla particella  $m_1$
- $\mathbf{F}_2$  forza esterna agente sulla particella  $m_2$

per la legge di azione reazione

$$\boxed{\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}} \quad (1.4)$$

Le equazioni del moto per le due particelle sono

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{12} \\ \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} &= \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{21}\end{aligned}$$

Sommando le due equazioni

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)}{dt} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

Si può generalizzare per un sistema arbitrario di  $n$  particelle

$$\boxed{\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d(\sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i)}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{ext}}$$

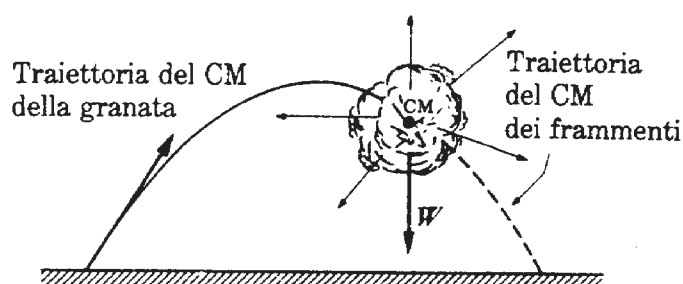
dove  $\mathbf{F}_i$  è la forza esterna agente sulla particella  $m_i$

La forza esterna agente su un sistema di particelle è la somma delle forze esterne agenti su ciascuna delle particelle componenti

Anche in presenza di un sistema complesso ai fini del moto del sistema sono efficaci solo le forze esterne applicate alle particelle

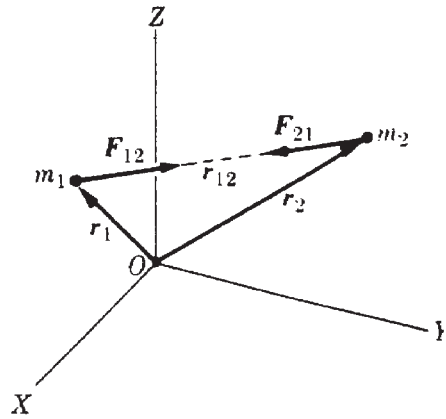
Le interazioni interne si compensano reciprocamente senza provocare variazioni della quantità di moto del sistema

Esempio:



## Massa ridotta

Consideriamo due particelle soggette soltanto alla loro mutua interazione



Le equazioni del moto delle due particelle per un osservatore inerziale sono

$$\mathbf{F}_{12} = m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} ; \quad \mathbf{F}_{21} = m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt}$$

cioè

$$\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \frac{\mathbf{F}_{12}}{m_1} ; \quad \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \frac{\mathbf{F}_{21}}{m_2}$$

Sottraendo membro a membro

$$\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} - \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \frac{\mathbf{F}_{12}}{m_1} - \frac{\mathbf{F}_{21}}{m_2}$$

Utilizzando la (1.4) si ha

$$\frac{d(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)}{dt} = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \mathbf{F}_{12}$$

Poichè  $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{12}$  velocità di  $m_1$  relativa a  $m_2$ , si ha

$$\frac{d(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_{12}}{dt} = \mathbf{a}_{12}$$

dove  $\mathbf{a}_{12}$  è l'accelerazione di  $m_1$  relativa a  $m_2$ . Quindi

$$\mathbf{a}_{12} = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \mathbf{F}_{12}$$

Definiamo massa ridotta  $\mu$  del sistema

$$\frac{1}{\mu} = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)$$

$$\boxed{\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}$$

Risulta

$$\mathbf{F}_{12} = \mu \mathbf{a}_{12}$$

Il moto relativo di due particelle soggette soltanto alla loro mutua interazione è equivalente al moto, relativo ad un osservatore inerziale, di una particella avente massa uguale alla massa ridotta e soggetta a una forza uguale alla loro interazione.

Si può, utilizzando i concetti di moto relativo e massa ridotta, separare lo studio di un sistema di *due particelle* interagenti in:

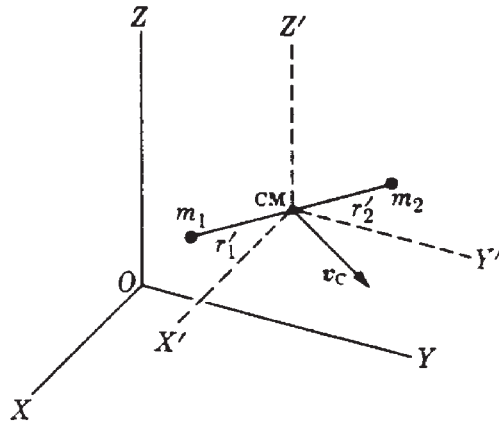
- Moto del centro di massa del sistema, che in assenza di forze esterne è rettilineo
- Moto di una particella di massa  $\mu$  sottoposta alla forza di interazione interna

Quando  $m_1 \ll m_2$  si ha  $\mu \approx m_1$  ed il  $CM$  coincide con la massa  $m_2$ .

ESEMPIO: Siano date  $m_1$  e  $m_2$  con velocità  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$ .

Determinare  $\mathbf{v}_{CM}$ ,  $\mathbf{v}'_1$  e  $\mathbf{v}'_2$  (velocità delle particelle rispetto al  $CM$ )





$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Utilizzando la trasformazione galileiana

$$\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{CM} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_{12} \quad (1.5)$$

$$\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{CM} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_{12} \quad (1.6)$$

dove  $\mathbf{v}_{12}$  è la velocità relativa delle due particelle. Le quantità di moto di  $m_1$  e  $m_2$  rispetto al  $CM$  sono

$$\mathbf{p}'_1 = m_1 \mathbf{v}'_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_{12} = \mu \mathbf{v}_{12}$$

$$\mathbf{p}'_2 = m_2 \mathbf{v}'_2 = -\frac{m_2 m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_{12} = -\mu \mathbf{v}_{12}$$

La quantità di moto totale del sistema rispetto al  $CM$  è nulla

$$\mathbf{P}' = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = 0$$

## Momento angolare di un sistema

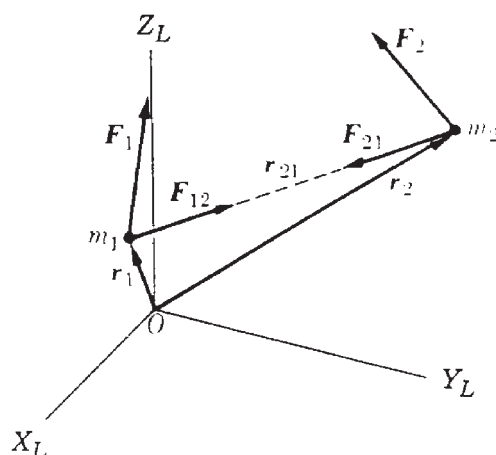
Per una particella il momento della quantità di moto (momento angolare) risulta

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

La legge angolare del moto

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \boldsymbol{\tau}$$

Consideriamo un sistema formato da due particelle



$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}_1}{dt} &= \boldsymbol{\tau}_1 ; & \frac{d\mathbf{L}_2}{dt} &= \boldsymbol{\tau}_2 \\ \frac{d\mathbf{L}_1}{dt} &= \mathbf{r}_1 \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{12}) ; & \frac{d\mathbf{L}_2}{dt} &= \mathbf{r}_2 \times (\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{21}) \end{aligned}$$

Sommando le due equazioni si ottiene la legge angolare del moto del sistema

$$\frac{d\mathbf{L}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{L}_2}{dt} = \boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_{12} \quad (1.7)$$

Essendo per la terza legge del moto

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_{12} = 0$$

la (1.7) risulta

$$\frac{d\mathbf{L}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{L}_2}{dt} = \boldsymbol{\tau}_{ext}$$

Per un sistema formato da un numero qualsiasi di particelle

$$\boxed{\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}_{ext}}$$

dove

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i ; \quad \boldsymbol{\tau}_{ext} = \sum_i \boldsymbol{\tau}_{ext_i}$$

Infatti i momenti  $\boldsymbol{\tau}_{interni}$  si annullano per la terza legge del moto (forze interne che agiscono lungo le rette congiungenti ciascuna coppia di particelle)

La derivata rispetto al tempo del momento angolare totale di un sistema di particelle rispetto ad un punto arbitrario è uguale al momento totale rispetto allo stesso punto delle forze esterne agenti sul sistema

Riassumendo le variazioni della quantità di moto lineare e angolare sono prodotte dalle sole forze esterne in quanto gli effetti delle forze interne si compensano

$$\boxed{\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}_{ext}} \quad (1.8)$$

$$\boxed{\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}_{ext}} \quad (1.9)$$

Si può studiare *il moto complessivo* di un sistema trascurando le forze interne

In assenza di forze esterne o quando la somma dei loro momenti è nulla, si ha

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$$

quindi

$$\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 + \mathbf{L}_3 + \dots = \textit{costante}$$

*legge di conservazione della quantità di moto angolare*

Il momento angolare totale  $\mathbf{L}$  di un sistema isolato o per il quale è nullo il momento delle forze esterne, è costante (in modulo, direzione e verso)

Esempi:

- gli elettroni di un atomo rispetto al nucleo (Sistema isolato)
- I pianeti del sistema solare rispetto al Sole (Sistema isolato)

I principi di conservazione della quantità di moto e della quantità di moto angolare sono validi anche in fisica atomica e nucleare, dove non sono valide le leggi della meccanica Newtoniana

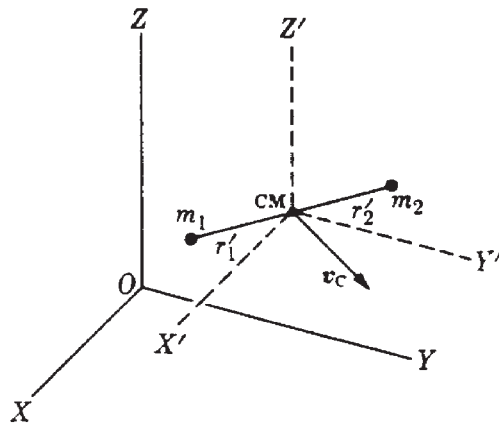
In presenza di due sistemi interagenti  $S$  e  $S'$  isolati dal resto del mondo, il momento angolare totale è costante

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_S + \mathbf{L}_{S'} = \textit{costante}$$

Per effetto dell'interazione i due sistemi interagenti si scambiano quantità di moto angolare

$$\Delta\mathbf{L}_S = -\Delta\mathbf{L}_{S'}$$

## Momento angolare nei sistemi di riferimento $C$ e $L$



La posizione del  $CM$  nel sistema  $L$  è

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Le posizioni delle particelle nel sistema  $C$  sono

$$\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{CM} = \frac{m_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 \mathbf{r}_{12}}{m_1 + m_2} \quad (1.10)$$

$$\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{CM} = \frac{m_1(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{m_1 + m_2} = -\frac{m_1 \mathbf{r}_{12}}{m_1 + m_2} \quad (1.11)$$

Il momento angolare del sistema rispetto al  $CM$  dalle (1.5), (1.6), (1.10) e (1.11) risulta

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_C = \mathbf{r}'_1 \times \mathbf{p}'_1 + \mathbf{r}'_2 \times \mathbf{p}'_2 &= \left( \frac{m_2 \mathbf{r}_{12}}{m_1 + m_2} \right) \times (\mu \mathbf{v}_{12}) + \\ &+ \left( -\frac{m_1 \mathbf{r}_{12}}{m_1 + m_2} \right) \times (-\mu \mathbf{v}_{12}) \end{aligned}$$

ovvero

$$\boxed{\mathbf{L}_C = \mathbf{r}_{12} \times \mu \mathbf{v}_{12}} \quad (1.12)$$

Il momento angolare del sistema rispetto al  $CM$  è equivalente a quello di una particella di quantità di moto  $\mu\mathbf{v}_{12}$  e di posizione  $\mathbf{r}_{12}$

$\mathbf{L}_C$  è una proprietà intrinseca del sistema stesso, indipendente dall'osservatore

$\mathbf{L}_C$  è definito *momento angolare interno*

Nel caso delle particelle elementari o dei corpi rigidi il momento angolare interno viene chiamato *spin*

*Relazione fra il momento angolare  $\mathbf{L}$  di un sistema calcolato rispetto ai sistemi di riferimento  $L$  e  $C$  ( $\mathbf{L}, \mathbf{L}_C$ )*

Consideriamo per semplicità un sistema composto da due sole particelle

Il momento angolare rispetto a  $L$  è

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2$$

Le relazioni fra i vettori posizione, velocità e quantità di moto nei due riferimenti sono

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}_{CM} ; & \mathbf{r}_2 &= \mathbf{r}'_2 + \mathbf{r}_{CM} \\ \mathbf{v}_1 &= \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}_{CM} ; & \mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}'_2 + \mathbf{v}_{CM} \\ \mathbf{p}_1 &= \mathbf{p}'_1 + m_1\mathbf{v}_{CM} ; & \mathbf{p}_2 &= \mathbf{p}'_2 + m_2\mathbf{v}_{CM} \end{aligned}$$

Il momento angolare nel sistema  $L$  risulta

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= (\mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}_{CM}) \times (\mathbf{p}'_1 + m_1\mathbf{v}_{CM}) + (\mathbf{r}'_2 + \mathbf{r}_{CM}) \times (\mathbf{p}'_2 + m_2\mathbf{v}_{CM}) = \\ &= \mathbf{r}'_1 \times \mathbf{p}'_1 + \mathbf{r}'_2 \times \mathbf{p}'_2 + (m_1\mathbf{r}'_1 + m_2\mathbf{r}'_2) \times \mathbf{v}_{CM} + \\ &\quad + \mathbf{r}_{CM} \times (\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2) + \mathbf{r}_{CM} \times (m_1\mathbf{v}_{CM} + m_2\mathbf{v}_{CM}) = \\ &= \mathbf{r}'_1 \times \mathbf{p}'_1 + \mathbf{r}'_2 \times \mathbf{p}'_2 + \mathbf{r}_{CM} \times (\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2) + (m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2) \times \mathbf{v}_{CM} \end{aligned}$$

Essendo

$$\begin{aligned}\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 &= 0 \\ \mathbf{L}_C &= \mathbf{r}'_1 \times \mathbf{p}'_1 + \mathbf{r}'_2 \times \mathbf{p}'_2 \\ \mathbf{r}_{CM} &= \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}\end{aligned}$$

Risulta

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_C + (m_1 + m_2) \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{v}_{CM}$$

Ovvero

$$\boxed{\mathbf{L} = \mathbf{L}_C + \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{P}} \quad (1.13)$$

Il momento angolare nel sistema di riferimento  $L$  può essere scomposto in

- $\mathbf{L}_C$ : *momento angolare interno* del sistema dovuto alla rotazione intorno al  $CM$
- $\mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{P}$ : *momento angolare esterno* dovuto alla traslazione del sistema

In generale nello studio dei moti rotatori dei sistemi di particelle si possono separare i moti interni rispetto al  $CM$  dal moto del centro di massa

*Relazione fra il momento meccanico esterno  $\boldsymbol{\tau}_{ext}$  rispetto al  $CM$  e il momento angolare interno  $\mathbf{L}_C$  di un sistema*

Consideriamo per semplicità un sistema composto da due sole particelle

Il momento meccanico agente sulle due particelle rispetto all'origine del sistema  $L$  risulta:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}_{ext} &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = (\mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}_{CM}) \times \mathbf{F}_1 + (\mathbf{r}'_2 + \mathbf{r}_{CM}) \times \mathbf{F}_2 = \\ &= \mathbf{r}'_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}'_2 \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{r}_{CM} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) \quad (1.14)\end{aligned}$$

Poichè il momento delle forze esterne rispetto al  $CM$  è

$$\boldsymbol{\tau}_{CM} = \mathbf{r}'_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}'_2 \times \mathbf{F}_2 \quad (1.15)$$

e la risultante delle forze esterne

$$\mathbf{F}_{ext} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \quad (1.16)$$

Introducendo la (1.16) e la (1.15) nella (1.14), si ottiene

$$\boxed{\boldsymbol{\tau}_{ext} = \boldsymbol{\tau}_{CM} + \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{F}_{ext}} \quad (1.17)$$

Derivando l'espressione del momento angolare (1.13) si ottiene

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{L}_C}{dt} + \mathbf{r}_{CM} \times \frac{d\mathbf{P}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_{CM}}{dt} \times \mathbf{P}$$

Poiché

$$\frac{d\mathbf{r}_{CM}}{dt} \times \mathbf{P} = \mathbf{v}_{CM} \times M\mathbf{v}_{CM} = 0$$

si ottiene

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{L}_C}{dt} + \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{F}_{ext} \quad (1.18)$$

Ricordando che

$$\boxed{\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}_{ext}} \quad (1.19)$$

Si ha dalla (1.17) e dalla (1.18)

$$\boxed{\frac{d\mathbf{L}_C}{dt} = \boldsymbol{\tau}_{CM}} \quad (1.20)$$

La relazione (1.19) è valida per momenti angolari e meccanici calcolati *rispetto ad un punto fisso in un sistema inerziale*

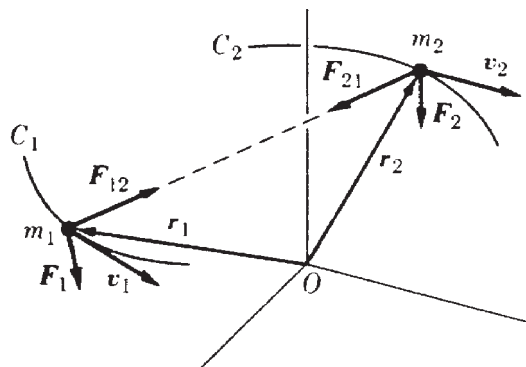


La relazione (1.20) è valida per momenti angolari e meccanici calcolati rispetto al  $CM$  anche se non è in quiete rispetto ad un sistema di riferimento inerziale

La relazione (1.20) rimane valida per un sistema composto da un numero qualunque di particelle e risulta particolarmente utile nello studio dei corpi rigidi

## Energia Cinetica di un sistema

Consideriamo un sistema composto da due particelle sottoposte a forze sia esterne che interne:



All'istante considerato l'energia cinetica del sistema risulta

$$E_K = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

Il teorema dell'energia cinetica diventa

$$\boxed{E_K - E_{K_0} = W_{ext} + W_{int}} \quad (1.21)$$

La variazione di energia cinetica di un sistema di particelle è uguale alla somma del lavoro compiuto sul sistema dalle forze esterne e dalle forze interne

Si ha

$$W_{ext} = \int_A^B (\mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2)$$

e il lavoro delle forze interne

$$W_{int} = \int_A^B (\mathbf{F}_{12} \cdot d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_{21} \cdot d\mathbf{r}_2)$$

poiché  $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$  si ha

$$W_{int} = \int_A^B (\mathbf{F}_{12} \cdot d\mathbf{r}_1 - \mathbf{F}_{12} \cdot d\mathbf{r}_2) = \int_A^B \mathbf{F}_{12} \cdot d(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

Scrivendo  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_{12}$  si ottiene

$$W_{int} = \int_A^B \mathbf{F}_{12} \cdot d\mathbf{r}_{12}$$

Il lavoro compiuto dalle forze interne dipende soltanto dallo *spostamento reciproco* delle particelle

Il risultato è valido per sistemi composti da un numero qualsiasi di particelle

## Conservazione dell'energia di un sistema di particelle

Consideriamo un sistema di due particelle in presenza di un campo di forze interne conservative. Si può scrivere

$$W_{int} = \int_A^B \mathbf{F}_{12} \cdot d\mathbf{r}_{12} = E_{P,int_A} - E_{P,int_B}$$

Se le forze interne agiscono lungo la congiungente le particelle, l'energia potenziale dipende soltanto da  $\mathbf{r}_{12}$

L'energia potenziale non dipende dal sistema di riferimento ma dalle coordinate relative delle particelle

Per il teorema della energia cinetica otteniamo

$$E_{K_B} - E_{K_A} = W_{ext} + W_{int} = W_{ext} + E_{P,int_A} - E_{P,int_B}$$

cioè

$$(E_K + E_{P,int})_B - (E_K + E_{P,int})_A = W_{ext}$$

La somma della energia cinetica e della energia potenziale interna di un sistema rispetto ad un sistema di riferimento inerziale, viene definita *energia propria*  $U$

$$U = E_K + E_{P,int} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + E_{P,int}$$

In presenza di più particelle si ha

$$U = E_K + E_{P,int} = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 + \sum_j E_{P,int}$$

Dove la prima sommatoria è estesa alle  $i$  particelle e la seconda alle  $j$  coppie di particelle

In assenza di forze interne l'energia interna ha soltanto la componente cinetica

Dalla definizione di energia propria ricaviamo

$$U_B - U_A = W_{ext}$$

La variazione di energia propria di un sistema di particelle uguaglia il lavoro compiuto dalle forze esterne sul sistema

Per un sistema isolato  $W_{ext} = 0$  quindi in presenza di forze interne conservative l'energia propria di un sistema isolato è costante (principio di conservazione dell'energia propria per un sistema di particelle)

Se due sistemi  $S$  e  $S'$ , dotati di forze interne conservative, interagiscono fra loro e sono isolati dal resto dell'universo, si ha

$$U_S + U_{S'} = cost$$

L'interazione vista come scambio di energia è

$$\boxed{\Delta U_S = -\Delta U_{S'}}$$

In presenza di forze esterne conservative si può scrivere

$$W_{ext} = E_{P,ext_A} - E_{P,ext_B}$$

Si ha allora

$$U_B - U_A = E_{P,ext_A} - E_{P,ext_B}$$

cioè

$$(U + E_{P,ext})_A = (U + E_{P,ext})_B$$

Si definisce Energia totale del sistema  $E$

$$\boxed{E = U + E_{P,ext} = E_K + E_{P,int} + E_{P,ext} = cost} \quad (1.22)$$

L'energia totale del sistema è costante in presenza di forze interne ed esterne conservative

La relazione (1.22) costituisce il principio di conservazione della energia totale per un sistema di particelle

ESEMPIO: Si abbiano due corpi di massa  $m_1$  e  $m_2$  uniti da una molla di costante elastica  $k$ . Se il sistema è posto su un piano orizzontale in assenza di attriti, si ha

$$U = E_K + E_{P,int} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}kx^2 = cost$$

Se il sistema viene lanciato in aria, definite  $y_1$  e  $y_2$  le altezze dei due corpi, risulta

$$\begin{aligned} E &= E_K + E_{P,int} + E_{P,ext} = \\ &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}kx^2 + m_1gy_1 + m_2gy_2 = cost \end{aligned}$$

## Energia interna di un sistema

Poiché l'energia cinetica dipende dalle velocità delle particelle, i valori che assume dipendono dal sistema di riferimento utilizzato per descrivere il moto delle particelle

L'energia cinetica calcolata da un sistema di riferimento solidale con  $C$  viene definita *energia cinetica interna*  $E_{K,int}$  del sistema

Si definisce *energia interna* di un sistema la somma

$$U_{int} = E_{K,int} + E_{P,int}$$

Quando  $E_{P,int}$  è trascurabile (gas ad elevata temperatura) la conservazione della energia si riduce alla conservazione dell'energia cinetica. Si definisce *energia termica* l'energia associata al moto delle molecole

## Relazione tra l'energia cinetica nei sistemi $C$ e $L$

Consideriamo un sistema costituito da due particelle  
L'energia cinetica nel sistema di riferimento  $L$  risulta

$$E_K = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

Le relazioni tra le velocità misurate nei due sistemi

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}_{CM} ; \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}'_2 + \mathbf{v}_{CM}$$

Sostituendo otteniamo

$$\begin{aligned} E_K &= \frac{1}{2}m_1(\mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}_{CM})^2 + \frac{1}{2}m_2(\mathbf{v}'_2 + \mathbf{v}_{CM})^2 = \\ &= \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{CM}^2 + (m_1\mathbf{v}'_1 + m_2\mathbf{v}'_2) \cdot \mathbf{v}_{CM} \end{aligned}$$

L'espressione

$$m_1\mathbf{v}'_1 + m_2\mathbf{v}'_2 = \mathbf{P}_{CM} = 0$$

Risulta quindi

$$E_K = E_{K,int} + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{CM}^2$$

cioè

$$\boxed{E_K = E_{K,int} + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2}$$

dove

- $E_{K,int} = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2$  è l'energia cinetica interna

- $\frac{1}{2}Mv_{CM}^2$  è l'energia cinetica traslazionale

Il moto del sistema può essere visto come:

- moto traslazionale del  $CM$
- moto interno relativo al  $CM$

La relazione determinata è valida per un sistema composto da un numero qualsiasi di particelle

## Riassunto delle relazioni valide per i sistemi di particelle

$$\mathbf{P} = M\mathbf{v}_{CM}$$

$$\mathbf{P}_C = 0$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_C + \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{P}$$

$$\boldsymbol{\tau}_{ext} = \boldsymbol{\tau}_{extC} + \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{F}_{ext}$$

$$E_K = E_{K_C} + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2$$

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_{ext} ; \quad M\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{F}_{ext}$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}_{ext} ;$$

$$\frac{d\mathbf{L}_C}{dt} = \boldsymbol{\tau}_{extCM}$$

$$E_K - E_{K_0} = W_{ext} + W_{int}$$

$$\Delta U = W_{ext}$$

### *Definizioni di Energia*

Energia propria:  $U = E_K + E_{P,int}$

Energia interna:  $U_{int} = E_{K,int} + E_{P,int}$

Energia totale:  $E = E_K + E_{P,int} + E_{P,ext}$

Per il moto di un sistema di particelle valgono relazioni analoghe a quelle valide per il moto delle singole particelle:

- $\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_{ext}$  legge per il moto traslatorio
- $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}_{ext}$  legge per il moto rotatorio rispetto ad un punto fisso in un sistema di riferimento inerziale

Le equazioni scritte non forniscono una informazione completa sul comportamento delle singole particelle (i gradi di libertà sono  $3N$ ), ma sull'effetto complessivo di traslazione e rotazione del sistema

Il moto del sistema può essere visto come:

- moto traslazionale del  $CM$
- moto interno relativo al  $CM$



## 2 Urti

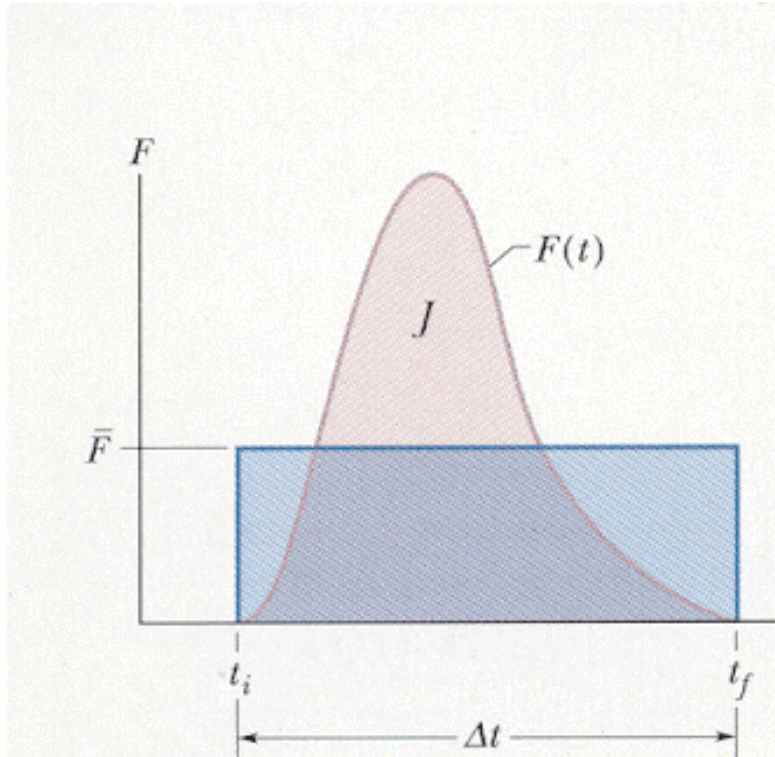
Nella collisione tra due particelle una forza relativamente grande agisce su ciascuna di esse per un tempo relativamente breve. Secondo l'idea principale che sta alla base del concetto di urto, il moto delle particelle collidenti (o di almeno una di esse) cambia piuttosto rapidamente e si può fare una separazione piuttosto netta nella scala dei tempi fra ciò che avviene prima dell'urto e dopo l'urto.

Le forze che agiscono per un tempo molto breve rispetto al tempo di osservazione del sistema sono chiamate forze *impulsive*.

Le due particelle possono non toccarsi, ma parliamo ugualmente di urto poiché una forza relativamente grande, agente per un tempo breve rispetto a quello di osservazione della particella alfa, ha l'effetto di cambiare sostanzialmente il suo moto.

Possiamo anche parlare di urto tra due galassie, se siamo preparati a osservarle su una scala dei tempi dell'ordine dei milioni o dei bilioni di anni

## Impulso e quantità di moto



Una forza impulsiva  $F(t)$  varia col tempo in modo arbitrario durante un urto che avviene nell'intervallo di tempo da  $t_i$  a  $t_f$ . L'area sotto la curva  $F(t)$  rappresenta l'impulso  $J$ , il rettangolo limitato dalla forza media  $\bar{F}$  ha area uguale alla precedente.

Supponiamo che la curva rappresenti l'andamento in funzione del tempo dell'intensità (modulo) della forza agente su uno dei due corpi durante un urto.

$$d\mathbf{p} = \mathbf{F} dt \quad (2.1)$$

$$\int_{\mathbf{p}_i}^{\mathbf{p}_f} d\mathbf{p} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F} dt \quad (2.2)$$

$$\mathbf{J} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F} dt \quad (2.3)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i \quad (2.4)$$

*teorema dell'impulso-quantità di moto:*

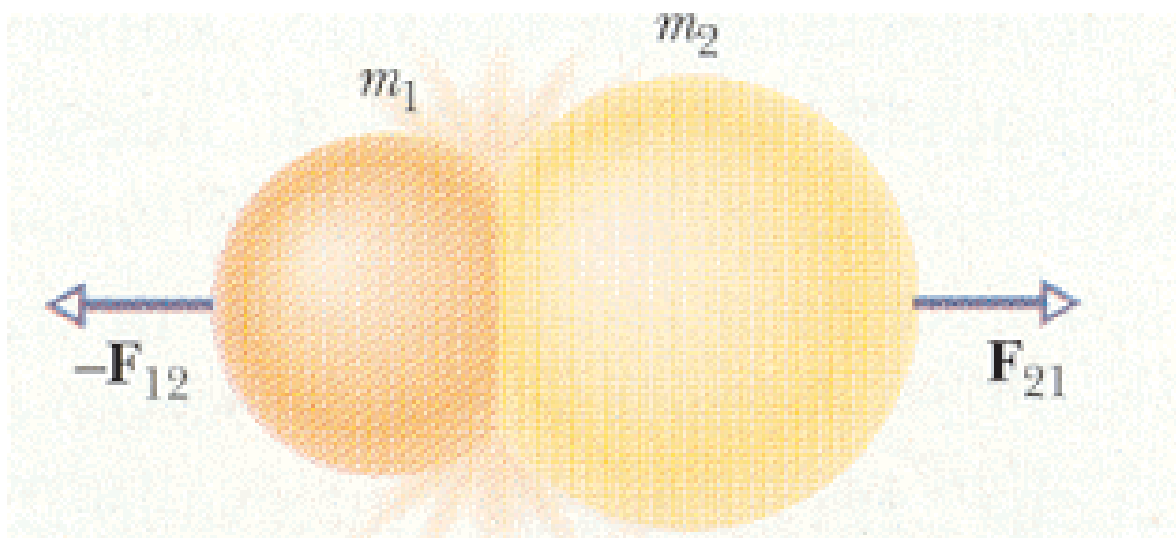
*L'impulso della forza risultante agente su una particella durante un certo intervallo di tempo è uguale alla variazione della quantità di moto della particella nello stesso intervallo di tempo*

Il lavoro implica un integrale sulla posizione della forza risultante, mentre l'impulso implica l'integrale sul tempo della stessa forza

Il modulo dell'impulso di questa forza è uguale all'area sottesa dalla curva  $F(t)$ .

$$J = \bar{F} \Delta t \quad (2.5)$$

## Conservazione della quantità di moto nei processi di urto



Consideriamo ora un urto tra due particelle, come per esempio quelle di massa  $m_1$  e  $m_2$ . In ogni istante siano  $\mathbf{F}_{12}$  la

forza esercitata sulla particella 1 dalla particella 2 e  $\mathbf{F}_{21}$  quella esercitata sulla particella 2 dalla particella 1.

$$\Delta\mathbf{p}_1 = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}_{12} dt = \bar{\mathbf{F}}_{12} \Delta t \quad (2.6)$$

Analogamente per la particella 2

$$\Delta\mathbf{p}_2 = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}_{21} dt = \bar{\mathbf{F}}_{21} \Delta t \quad (2.7)$$

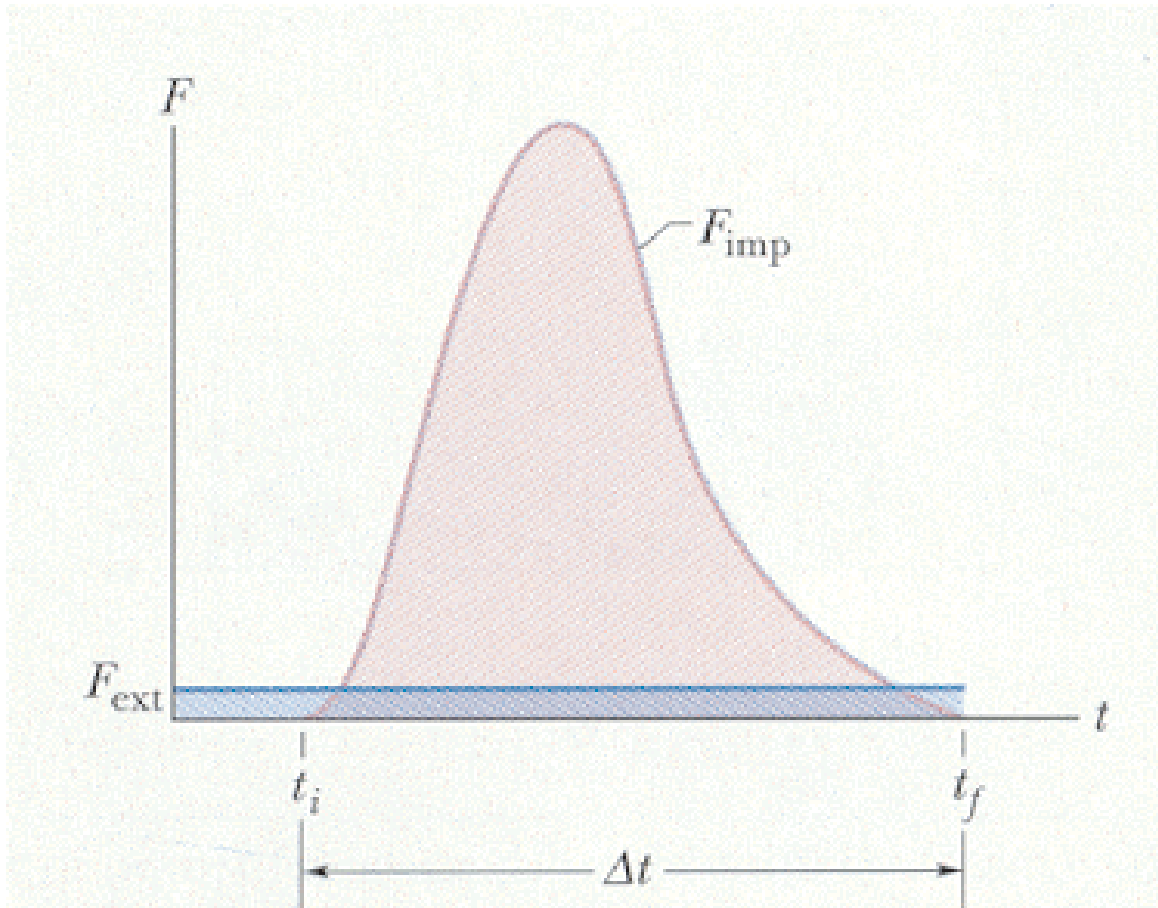
Abbiamo visto che in ogni istante è  $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ , quindi anche  $\bar{\mathbf{F}}_{12} = -\bar{\mathbf{F}}_{21}$ , e di conseguenza

$$\Delta\mathbf{p}_1 = -\Delta\mathbf{p}_2 \quad (2.8)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \quad (2.9)$$

$$\Delta\mathbf{P} = \Delta\mathbf{p}_1 + \Delta\mathbf{p}_2 = 0 \quad (2.10)$$

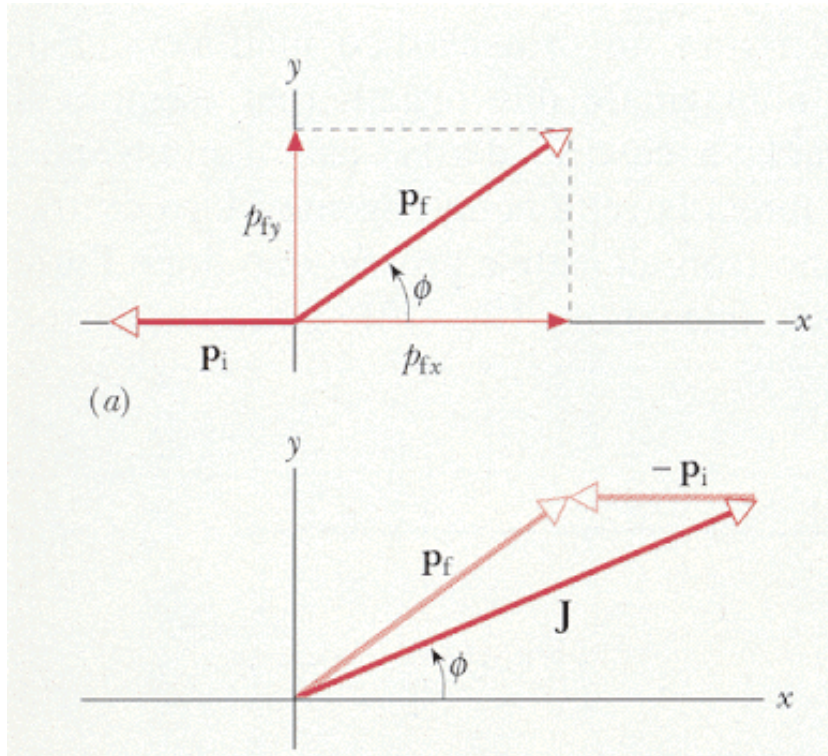
Quindi, se non agiscono forze esterne, la *quantità di moto totale del sistema delle due particelle non viene modificata dall'urto*.



La forza impulsiva  $F_{imp}$  che agisce durante un urto è generalmente molto più intensa di ogni forza esterna  $F_{ext}$  (in questo caso costante) che può agire sul sistema.

La variazione di quantità di moto di una particella dovuta alle forze esterne agenti durante l'urto è trascurabile rispetto a quella dovuta alle forze esterne impulsive

## Esempio



- (a) Le quantità di moto iniziale e finale della palla da baseball.  
 (b) La differenza  $\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i$  è uguale all'impulso  $\mathbf{J}$ .

$$\mathbf{J} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_f + (-\mathbf{p}_i) \quad (2.11)$$

Dalla relazione  $\mathbf{J} = \bar{\mathbf{F}}\Delta t$ , si ha  $\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{J}/\Delta t$ .

$$|\bar{\mathbf{F}}| = (12.3 \text{ Kg} \cdot \text{m/s})/0.0015 \text{ s} = 8200 \text{ N} \quad (2.12)$$

## Urti in una dimensione

In questo paragrafo studieremo l'effetto di un urto fra due corpi. Noti i moti dei due corpi prima dell'urto, si potrebbero sempre calcolare i loro moti dopo l'urto se si conoscessero le forze che agiscono durante l'urto e si sapessero risolvere le equazioni del moto.

È necessario servirsi della legge di conservazione della quantità di moto che è applicabile in ogni urto in cui agiscono solo forze interne, *anche se non sono note*

Poiché durante l'urto anche l'energia totale si deve conservare, l'energia totale iniziale dei corpi prima dell'urto deve essere uguale all'energia totale finale dei prodotti della collisione

In un particolare tipo di urto, chiamato urto *elastico*, tutte le forme di energia, diverse da quella meccanica  $U + K$ , si devono ignorare

*In un urto elastico l'energia cinetica iniziale del sistema  $K_i$  è uguale all'energia cinetica finale  $K_f$*

In un altro tipo di urto, chiamato urto *anelastico*, l'energia appare anche in altre forme e le energie cinetiche iniziale e finale del sistema non sono uguali

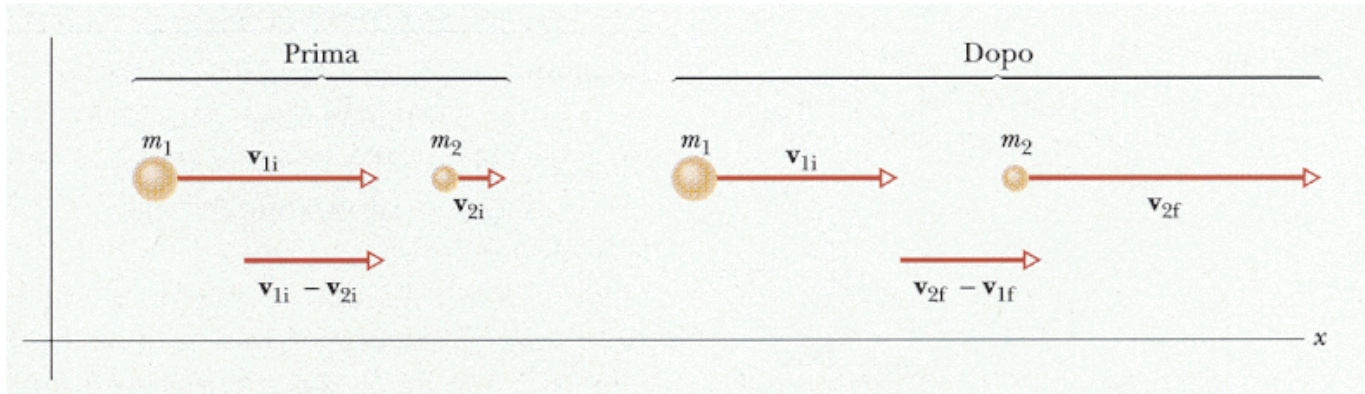
In un urto anelastico l'energia meccanica  $U + K$  *non* è conservata, ma l'energia *totale* lo è sempre

Tutti gli urti tra oggetti reali sono anelastici. Possiamo però trattare alcuni urti come approssimativamente elastici, per esempio, quando gli oggetti sono rigidi come le palle da biliardo

Quando i due corpi dopo l'urto rimangono attaccati, l'urto è detto *completamente anelastico*

## Urti elastici

Consideriamo un urto elastico unidimensionale



Due particelle prima e dopo un urto elastico. Si noti che le velocità relative prima e dopo l'urto sono uguali

Siano  $m_1$  e  $m_2$  le masse dei due corpi,  $v_{1i}$  e  $v_{2i}$  le componenti delle loro velocità prima dell'urto e  $v_{1f}$  e  $v_{2f}$  dopo l'urto. Applicando la conservazione della quantità di moto

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \quad (2.13)$$

Applicando la conservazione dell'energia che, nel caso di urto elastico coincide (per definizione) con la conservazione dell'energia cinetica  $K_i = K_f$ , si ottiene

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \quad (2.14)$$

la (2.13) e (2.14) possono essere scritte

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i}) \quad (2.15)$$

$$m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2(v_{2f}^2 - v_{2i}^2) \quad (2.16)$$

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2i} + v_{2f} \quad (2.17)$$

$$v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f}) \quad (2.18)$$



si ottiene

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i} \quad (2.19)$$

Analogamente, eliminando  $v_{1f}$  e risolvendo rispetto a  $v_{2f}$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i} \quad (2.20)$$

Consideriamo alcuni casi particolari interessanti:

- *Masse uguali*

$$v_{1f} = v_{2i} \quad v_{2f} = v_{1i} \quad (2.21)$$

- *Particella bersaglio in quiete*

In questo caso  $v_{2i} = 0$

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \quad v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} \quad (2.22)$$

Combinando questo caso con il precedente  $m_1 = m_2$  si ottiene  $v_{1f} = 0$  e  $v_{2f} = v_{1i}$

- *Bersaglio di grande massa*

$$v_{1f} \approx -v_{1i} + 2v_{2i} \quad v_{2f} \approx v_{2i} \quad (2.23)$$

Se la particella di massa elevata  $m_2$  si muove molto lentamente o è in quiete

$$v_{1f} \approx -v_{1i} \quad v_{2f} \approx 0 \quad (2.24)$$

- *Proiettile di grande massa* Se  $m_1 \gg m_2$  le (2.19) e (2.20) diventano

$$v_{1f} \approx v_{1i} \quad v_{2f} \approx 2v_{1i} - v_{2i} \quad (2.25)$$

## Urti anelastici

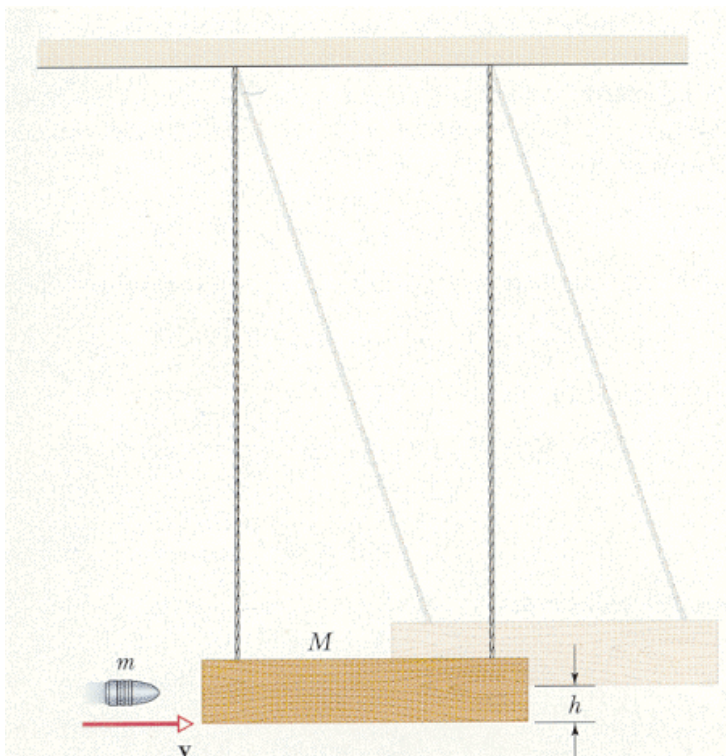
Consideriamo ora gli urti anelastici, nei quali per definizione l'energia cinetica non è conservata. Nel solo caso particolare di un urto completamente anelastico è possibile determinare il moto finale conoscendo solo le condizioni iniziali. In questo caso, i corpi dopo l'urto restano attaccati e si muovono con la stessa velocità  $v_f$ . Si ottiene

$$v_f = \frac{m_1}{m_1 + m_2}v_{1i} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}v_{2i} \quad (2.26)$$

Se  $m_2$  è inizialmente in quiete, questa si riduce a

$$v_f = \frac{m_1}{m_1 + m_2}v_{1i} \quad (2.27)$$

## Il pendolo balistico



Il pendolo balistico viene usato per misurare la velocità di un proiettile

possiamo applicare la conservazione della quantità di moto nella direzione orizzontale

$$mv = (M + m)V \quad (2.28)$$

dove  $v$  è la velocità del proiettile prima dell'urto e  $V$  quella del sistema immediatamente dopo l'urto. Anche se *nell'urto* l'energia meccanica *non* è conservata, essa si conserva durante l'oscillazione del pendolo *dopo* l'urto

$$\frac{1}{2}(M + m)V^2 = (M + m)gh \quad (2.29)$$

Eliminando  $V$

$$v = \frac{M + m}{m} \sqrt{2gh} \quad (2.30)$$

L'energia cinetica del proiettile è

$$K_b = \frac{1}{2}mv^2 = 1900J \quad (2.31)$$

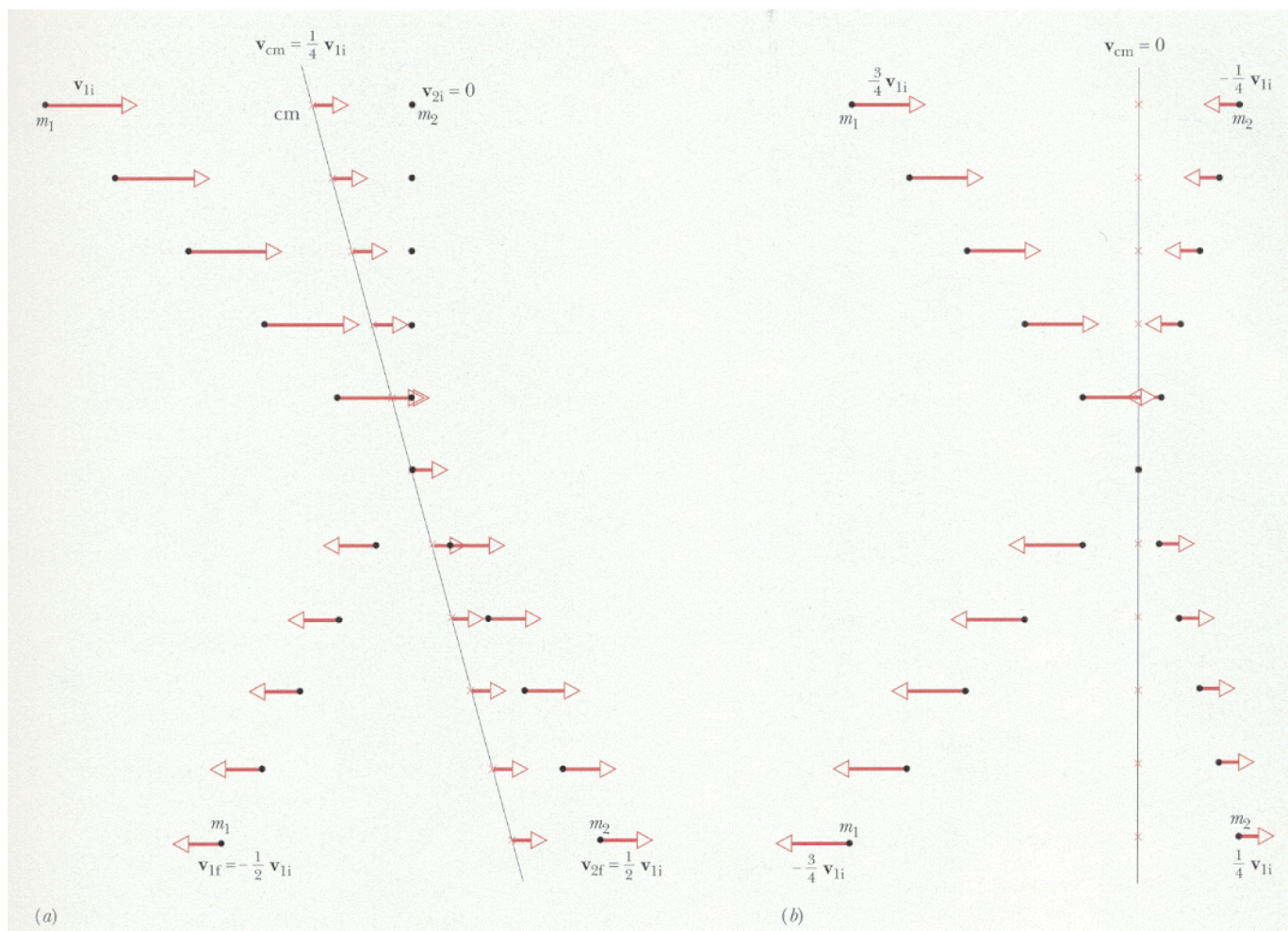
L'energia meccanica del pendolo è uguale alla sua energia potenziale nel punto più alto dell'oscillazione

$$E = (M + m)gh = 3.3J \quad (2.32)$$

## Sistema di riferimento del centro di massa

Quando vengono eseguiti esperimenti d'urto, le misure sono naturalmente effettuate in un sistema di riferimento solidale

con il laboratorio (*sistema del laboratorio*). Indipendentemente dalle modalità dell'esperimento, l'urto viene osservato da un sistema di riferimento solidale con il centro di massa delle particelle collidenti (*sistema del centro di massa*), l'analisi del fenomeno è spesso più semplice e il significato fisico più chiaro.



Una serie di istantanee dell'urto unidimensionale elastico tra due particelle di masse  $m_1$  e  $m_2 = 3m_1$ . Il centro di massa delle due particelle è indicato con  $\times$ . (a) Sistema di riferimento del laboratorio. (b) Sistema di riferimento del centro di massa.

Il centro di massa tra  $m_1$  e  $m_2$ , prima e dopo l'urto si muove con la stessa velocità costante  $v_{cm}$ .

$$v_{cm} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} \quad (2.33)$$

Rappresentiamo ora lo stesso urto da un sistema di riferimento in moto con la velocità  $v_{cm}$  rispetto al laboratorio

$$v = v' + u \quad (2.34)$$

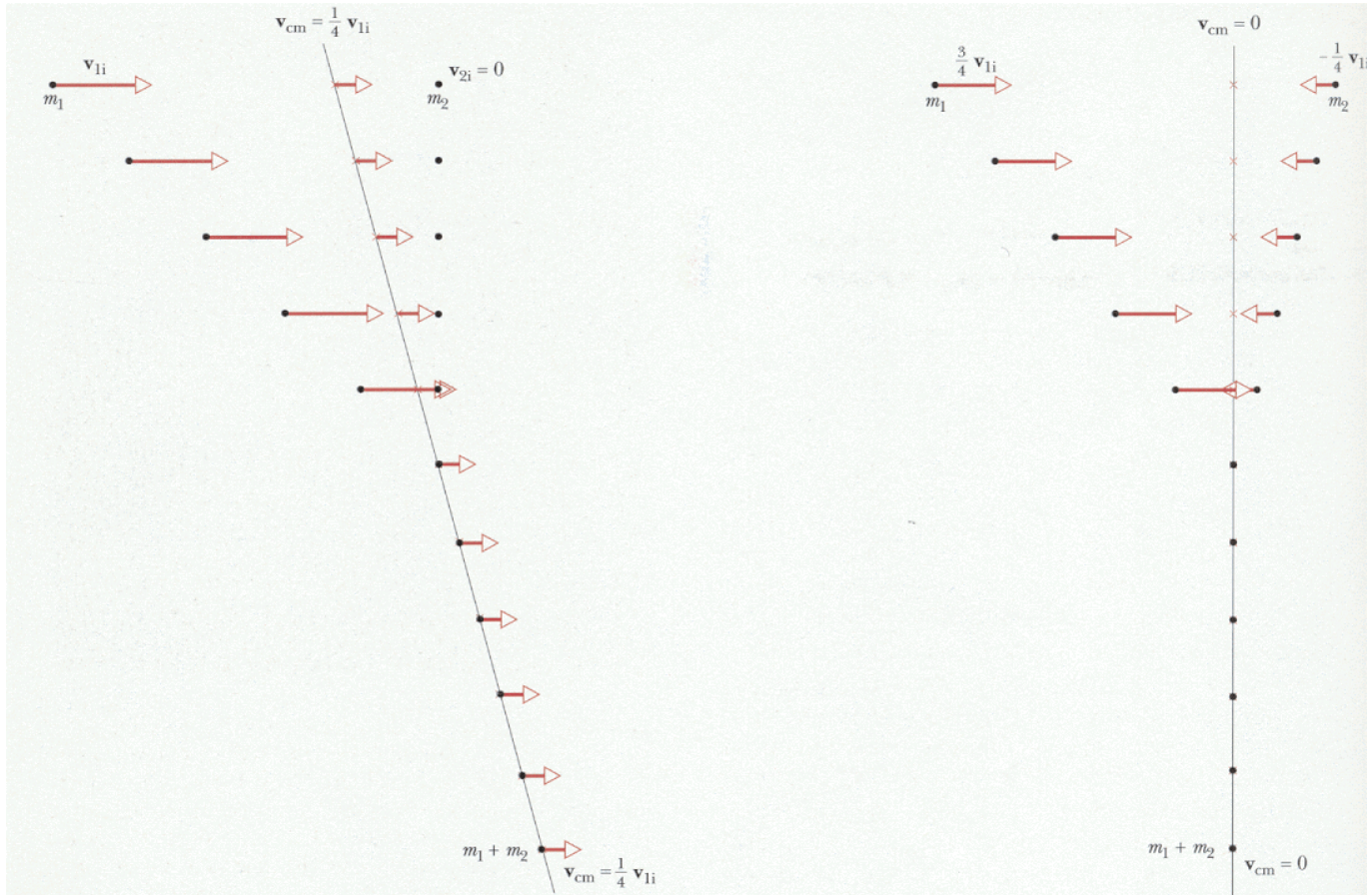
Nel nostro caso, il sistema in moto è quello del centro di massa e quindi  $u = v_{cm}$

$$v'_{1i} = v_{1i} - v_{cm} = v_{1i} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \quad (2.35)$$

$$v'_{2i} = v_{2i} - v_{cm} = 0 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} \quad (2.36)$$

$$v'_{1f} = v_{1f} - v_{cm} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \quad (2.37)$$

$$v'_{2f} = v_{2f} - v_{cm} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} \quad (2.38)$$



Una serie di istantanee dell'urto unidimensionale completamente anelastico tra due particelle di masse  $m_1$  e  $m_2 = 3m_1$ . (a) Sistema di riferimento del laboratorio. (b) Sistema di riferimento del centro di massa.

Consideriamo ora l'urto unidimensionale completamente anelastico nel sistema di riferimento del centro di massa. Supponiamo di nuovo che  $m_1$  incida su  $m_2 = 3m_1$  in quiete nel laboratorio.

Dopo l'urto:

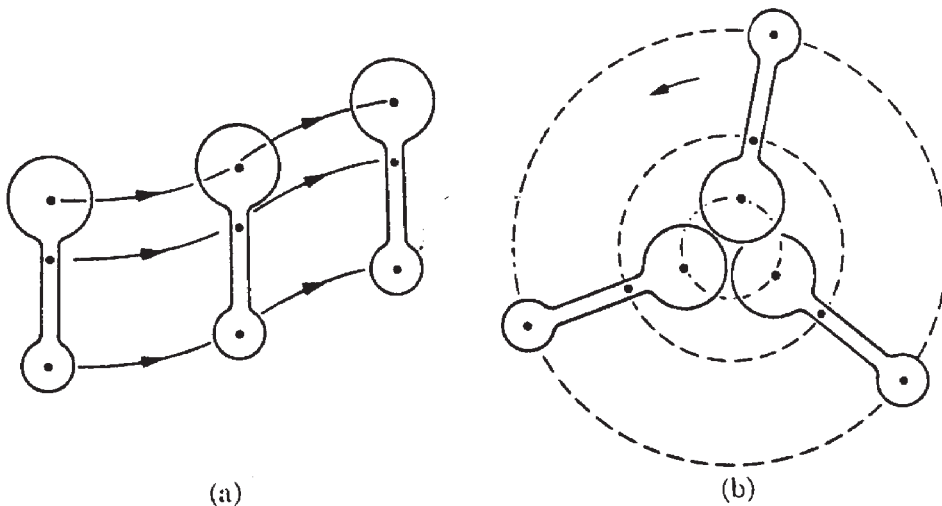
$$v_f' = v_f - v_{cm} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} = 0 \quad (2.39)$$

### 3 Corpo rigido

Si definisce corpo rigido un sistema di punti materiali in cui le distanze fra tutte le particelle che lo compongono rimangono costanti durante l'applicazione di una forza o di un momento esterni

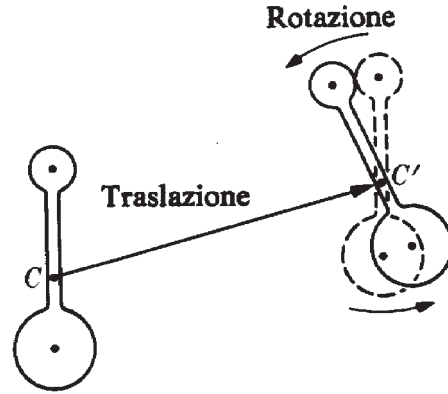
Un corpo rigido conserva la sua forma durante il moto. Non si deforma e non vibra

Possiamo distinguere due tipi di moto di un corpo rigido



- Moto di traslazione (a). Tutte le particelle descrivono traiettorie parallele
- Moto di rotazione (b). Tutte le particelle descrivono traiettorie circolari intorno a una retta chiamata asse di rotazione

Il moto di un corpo rigido si può considerare come la combinazione di una traslazione più una rotazione



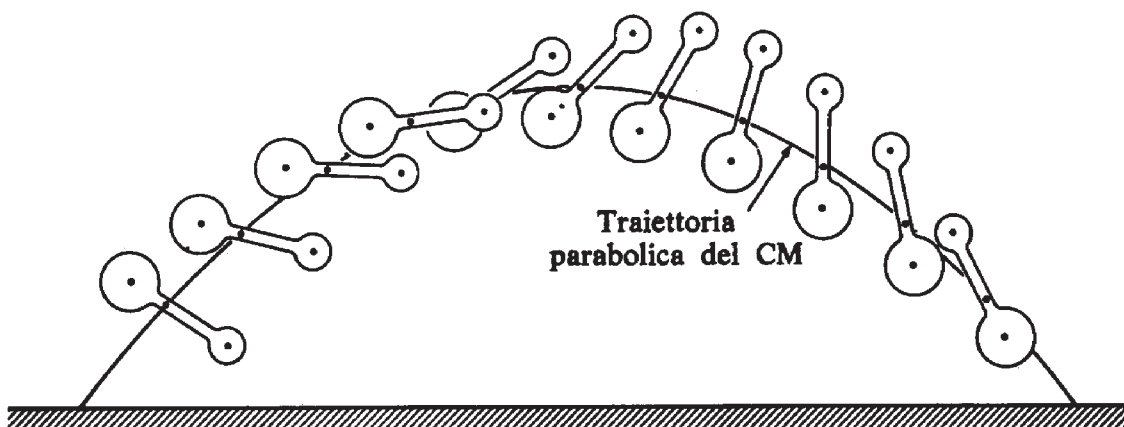
è sempre possibile quindi determinare un sistema di riferimento soltanto traslante rispetto al quale il moto del corpo rigido sia esclusivamente rotatorio

Rispetto a questo sistema di riferimento l'asse di rotazione è il luogo dei punti istantaneamente fissi

L'asse di rotazione può spostarsi rispetto al riferimento o cambiare la direzione rispetto al corpo durante il moto

Il moto di un corpo rigido si studia considerando separatamente il moto traslatorio di un punto del corpo e quello rotatorio intorno al punto stesso

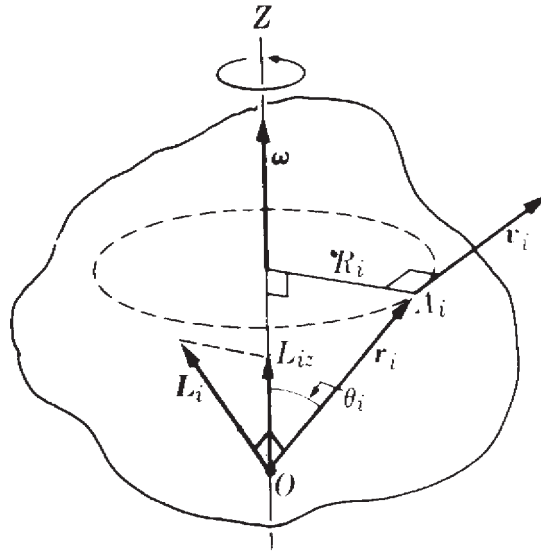
Come origine del sistema di assi solidale con il corpo si sceglie generalmente il  $CM$





## Momento angolare di un corpo rigido

Si abbia un corpo rigido che ruota intorno ad un asse fisso  $z$ , vincolato ad un riferimento inerziale, con velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$



Il momento angolare della particella  $i$ -esima  $A_i$  è

$$\mathbf{L}_i = m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i$$

dove  $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$

Si ha  $|\mathbf{v}_i| = \omega r_i \sin \theta_i = \omega R_i$

$\mathbf{L}_i$  ha una direzione che forma un angolo pari  $(\frac{\pi}{2} - \theta_i)$  con l'asse  $z$  e  $|\mathbf{L}_i| = m_i r_i v_i$

La componente di  $\mathbf{L}_i$  lungo l'asse  $z$  è

$$L_{iz} = (m_i r_i v_i) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) = m_i (r_i \sin \theta_i) (\omega R_i) = m_i R_i^2 \omega$$

Il momento angolare totale di tutte le particelle che compongono il corpo rigido risulta

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 + \dots = \sum_i \mathbf{L}_i$$

In generale  $\mathbf{L}$  non è parallelo all'asse  $z$  perchè i singoli  $\mathbf{L}_i$  non lo sono

La componente di  $\mathbf{L}$  rispetto all'asse di rotazione risulta

$$L_z = L_{1z} + L_{2z} + \dots = \sum_i L_{iz}$$

cioè

$$L_z = \omega(m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + \dots) = \left( \sum_i m_i R_i^2 \right) \omega$$

La quantità

$$\boxed{I = \sum_i m_i R_i^2} \quad (3.1)$$

è definita *momento di inerzia* del corpo rigido *rispetto* all'asse di rotazione  $z$

La componente  $L_z$  di  $\mathbf{L}$  può essere quindi scritta come

$$\boxed{L_z = I\omega}$$

Il momento di inerzia è una grandezza molto importante utilizzata per lo studio del moto di un corpo rigido

Confrontando la definizione di quantità di moto e di momento angolare

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad L_z = I\omega$$

si deduce come il momento di inerzia è l'analogo della massa per quanto concerne le caratteristiche rotatorie di un corpo rigido

Dalla (3.1) si ricava come il valore di  $I$  dipende sia dalle masse che costituiscono il corpo che dal quadrato della distanza rispetto all'asse di rotazione

Mentre la massa è una caratteristica di un corpo, il momento di inerzia dipende dall'asse di rotazione

ESEMPIO: pattinatrice in rotazione rispetto a un asse verticale

Quando la pattinatrice solleva le braccia, modifica il proprio momento di inerzia ( $I_2 < I_1$ )

Per il principio di conservazione del momento angolare del sistema (pattinatrice) risulta

$$L_z = I\omega = \text{costante} \Rightarrow I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

poiché  $I_2 < I_1$  si ha  $\omega_2 > \omega_1$

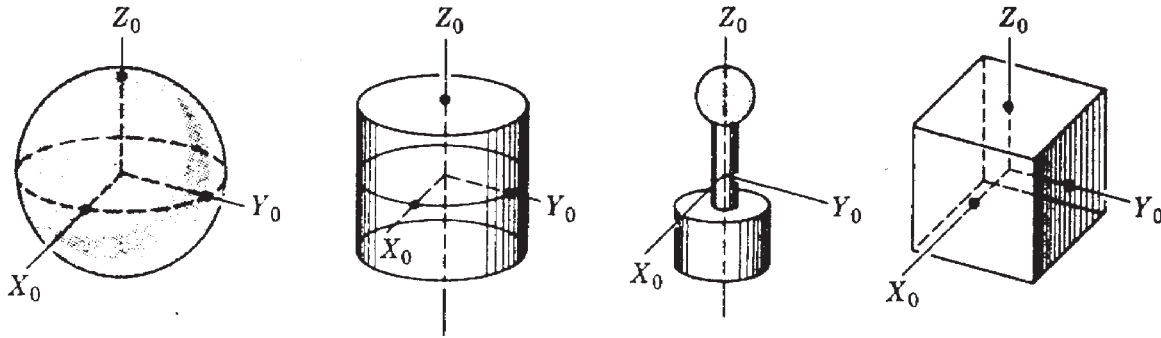
## Assi principali di un corpo rigido

In ogni corpo rigido, indipendentemente dalla forma, esistono *sempre* almeno tre assi di rotazione fra loro mutuamente perpendicolari e passanti per il  $CM$ , per i quali risulta  $\mathbf{L}$  parallelo a  $\boldsymbol{\omega}$

Questi tre assi vengono denominati *assi principali di inerzia*. I momenti di inerzia corrispondenti vengono denominati

- $I_1$  il massimo momento di inerzia
- $I_2$  il minimo momento di inerzia
- $I_3$  il momento di inerzia intermedio

Gli assi principali di inerzia sono solidali con il corpo e quando esistono assi di simmetria sono coincidenti con essi



Quando un corpo ruota attorno ad un principale di inerzia si ha

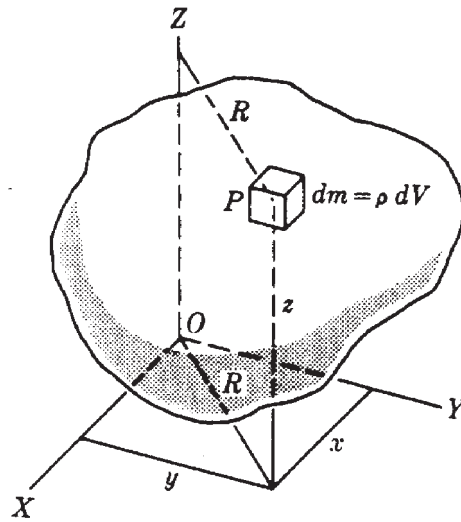
$$\boxed{\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}} \quad (3.2)$$

In generale si utilizza un sistema di riferimento solidale con il corpo rigido così che  $I_1, I_2$  e  $I_3$  sono quantità costanti

## Calcolo dei momenti di inerzia

Un corpo rigido è composto da un numero estremamente elevato di particelle quindi l'eq (3.1) diventa

$$\boxed{I = \int R^2 dm = \int R^2 \rho dV}$$



Il momento di inerzia rispetto all'asse  $Z$  risulta

$$I_Z = \int R^2 \rho dV = \int \rho (X^2 + Y^2) dV$$

Se la densità  $\rho = \frac{dm}{dV}$  è costante

$$I = \rho \int R^2 dV$$

Quando il corpo è omogeneo l'integrale si riduce al calcolo di un fattore geometrico uguale per tutti i corpi con la stessa forma

Dimensionalmente

$$I = [M][L]^2$$

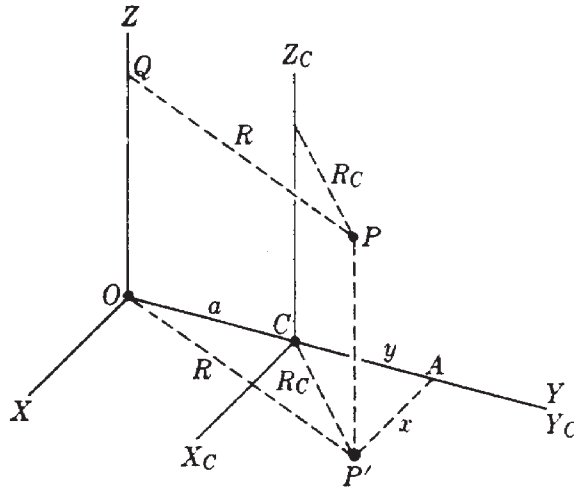
Nel S.I. è espresso in  $m^2 Kg$

### **Teorema di Steiner o degli assi paralleli (Teorema di Lagrange)**

I momenti di inerzia rispetto ad assi paralleli sono legati da una formula molto semplice

Sia dato un asse  $Z$  arbitrario e  $Z_C$  un asse ad esso parallelo e passante per il  $CM$  del corpo. Se  $a$  è la distanza fra i due assi e  $M$  la massa del corpo, si ha

$$\boxed{I_Z = I_{Z_C} + Ma^2} \quad (3.3)$$



### DIMOSTRAZIONE

Si ha

$$R_C^2 = x^2 + y^2$$

$$R^2 = x^2 + (y + a)^2 = R_C^2 + 2ya + a^2$$

Il momento di inerzia rispetto all'asse  $Z$  é

$$\begin{aligned} I_Z &= \sum_i m_i R_i^2 = \sum_i m_i (R_{C_i}^2 + 2y_i a + a^2) = \\ &= \sum_i m_i R_{C_i}^2 + 2a \left( \sum_i m_i y_i \right) + a^2 \sum_i m_i \end{aligned}$$

Dalla definizione di  $CM$  abbiamo  $\sum_i m_i y_i = 0$  Inoltre

$$I_{Z_C} = \sum_i m_i R_{C_i}^2 ; \quad \sum_i m_i = M$$

Si ottiene quindi l'espressione

$$I_Z = I_{Z_C} + Ma^2$$

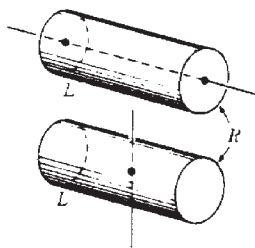
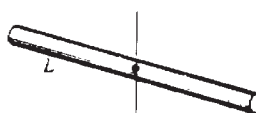
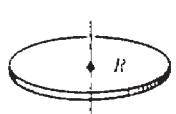
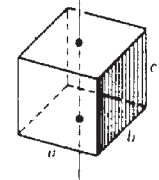
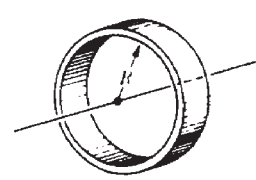
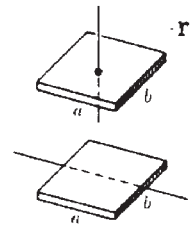

Il teorema di Steiner è molto utile per il calcolo di momenti di inerzia non baricentrali

## Raggio giratore di un corpo

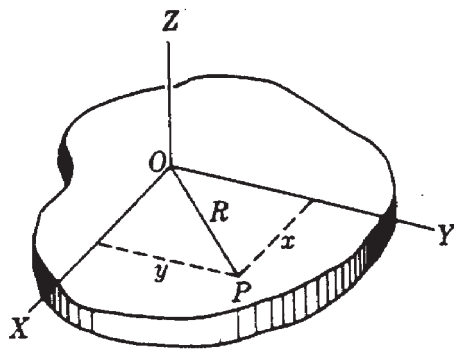
Il Raggio giratore di un corpo  $K$  è definito dalla relazione  $I = MK^2$ ;  $K = \sqrt{\frac{I}{M}}$

è la distanza dall'asse di rotazione alla quale si potrebbe concentrare tutta la massa senza che il momento di inerzia cambi

Per corpi omogenei il raggio giratore dipende soltanto dalla geometria del corpo

$K^2$	Asse	$K^2$	Asse
$\frac{R^2}{2}$	Cilindro 	$\frac{L^2}{12}$	Sbarra sottile 
$\frac{R^2}{4} + \frac{L^2}{12}$		$\frac{R^2}{2}$	Disco 
$\frac{a^2 + b^2}{12}$	Parallelepipedo 	$\frac{R^2}{4}$	Anello 
	Piastra rettangolare 	$R^2$	
$\frac{a^2 + b^2}{12}$		$\frac{2R^2}{5}$	Sfera 
$\frac{b^2}{12}$			

## Momento di inerzia di una lamina piana sottile

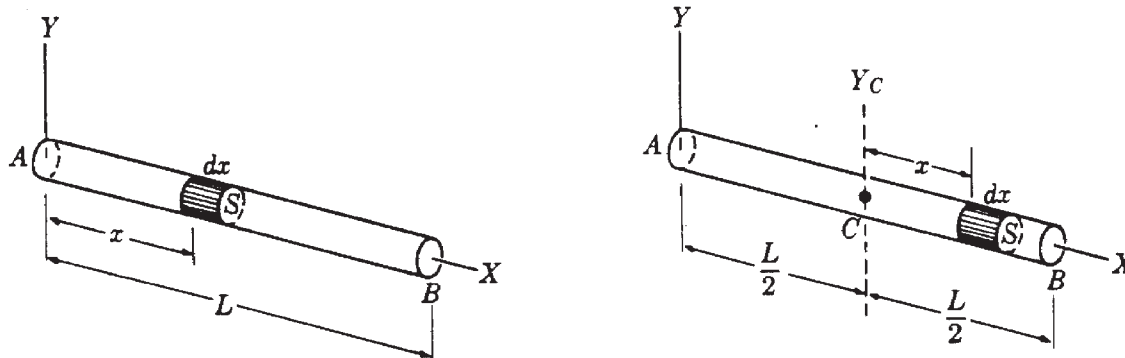


- Rispetto a  $X$ :  $I_X = \int \rho Y^2 dV$
- Rispetto a  $Y$ :  $I_Y = \int \rho X^2 dV$
- Rispetto a  $Z$ :  $I_Z = \int \rho(x^2 + y^2) dV$



$$I_Z = I_X + I_Y$$

## Momento di inerzia di una sbarra sottile omogenea



Calcoliamo il momento di inerzia rispetto ad un asse passante per un estremo

$$I_A = \int_0^L \rho x^2 (S dx) = \rho S \int_0^L x^2 dx = \frac{1}{3} \rho S L^3$$

Poichè  $V = SL$  si ha  $M = \rho SL$  e

$$I_A = \frac{1}{3} M L^2$$

Per calcolare il momento di inerzia rispetto ad un asse baricentrale, si utilizza il teorema di Steiner. Dalla (3.3) si ha

$$I_C = I_A - M a^2 = \frac{1}{3} M L^2 - M \left( \frac{L}{2} \right)^2 = \frac{1}{12} M L^2$$

Lo stesso risultato è ottenuto anche calcolando  $I_C$  tramite la definizione

## Equazione del moto rotatorio

L'equazione fondamentale per il moto rotatorio di un corpo rigido è:

$$\boxed{\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}} \quad (3.4)$$

Il momento meccanico e il momento angolare sono calcolati rispetto ad un punto fisso in un sistema di riferimento inerziale

Quando il corpo rigido ruota intorno ad un asse principale di inerzia risulta  $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$  e quindi

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d(I\boldsymbol{\omega})}{dt} = I \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \boldsymbol{\tau}$$

cioè

$$\boxed{\boldsymbol{\tau} = I\boldsymbol{\alpha}} \quad (3.5)$$

dove  $\boldsymbol{\alpha}$  rappresenta l'accelerazione angolare

L'equazione (3.5) è formalmente simile alla  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$

*legge di inerzia per il moto rotatorio*

Dalla (3.5) se il momento delle forze esterne è nullo, risulta

$$I\boldsymbol{\omega} = \text{cost}$$

Un corpo rigido che ruota intorno ad un asse principale si muove di velocità angolare costante in assenza di momenti meccanici esterni

Se  $I$  si modifica,  $\boldsymbol{\omega}$  cambia per mantenere  $\mathbf{L} = \text{cost}$

Se un corpo rigido è vincolato a ruotare intorno ad un asse  $z$  non principale risulta  $L_z = I\omega$ , quindi

$$I \frac{d\omega}{dt} = \tau_z$$

Non essendo  $\mathbf{L} \parallel \boldsymbol{\omega}$  sono necessari dei momenti meccanici, forniti per esempio dal vincolo rigido, per mantenere il moto rotatorio

Quando l'asse di rotazione non ha un punto fisso in un sistema di riferimento inerziale, si applica l'equazione

$$\boxed{\frac{d\mathbf{L}_C}{dt} = \boldsymbol{\tau}_{CM}} \quad (3.6)$$

## Energia cinetica di rotazione

Dalla definizione di energia cinetica per un sistema di particelle

$$E_K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

quando si tratta di un corpo rigido in rotazione  $v_i = \omega R_i$ , si ha

$$E_K = \sum_i \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \left( \sum_i m_i R_i^2 \right) \omega^2$$

cioè

$$\boxed{E_K = \frac{1}{2} I \omega^2} \quad (3.7)$$

L'equazione (3.7) è formalmente analoga alla  $E_K = \frac{1}{2} m v^2$

Quando il corpo rigido ruota attorno ad un asse principale, utilizzando la (3.2) si ottiene

$$E_K = \frac{L^2}{2I}$$

Consideriamo un corpo rigido che ruota rispetto ad un asse passante per il suo centro di massa ed è dotato di un moto traslatorio rispetto all'osservatore

Nel sistema di riferimento  $L$  l'energia cinetica di un sistema è

$$E_K = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + E_{K_C}$$

quindi

$$\boxed{E_K = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2} \quad (3.8)$$

Poichè in un corpo rigido la mutua distanza fra le particelle non può variare, le forze interne non lavorano e l'energia potenziale interna rimane costante

$$E_K - E_{K_0} = W_{ext} + W_{int} = W_{ext}$$

In presenza di forze esterne conservative risulta

$$W_{ext} = E_{P,ext_0} - E_{P,ext}$$

quindi

$$E = E_K + E_P = (E_K + E_P)_0 = \textit{costante}$$

L'energia totale è costante

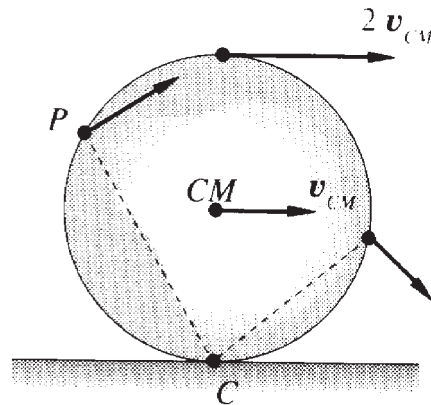
$$\boxed{E = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2 + E_P = \textit{costante}} \quad (3.9)$$

Un corpo rigido che cade sotto l'azione della forza di gravità ha

$$E = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2 + Mgy = \textit{costante}$$

dove  $y$  è l'altezza del  $CM$  del corpo rigido rispetto al riferimento orizzontale

## Moto di rotolamento senza strisciamento



In ogni istante il punto  $C$  è fermo. Il cilindro ruota intorno ad un asse passante per  $C$  definito asse di istantanea rotazione

Se il cilindro ruota con velocità angolare  $\omega$  e accelerazione  $\alpha$  risulta

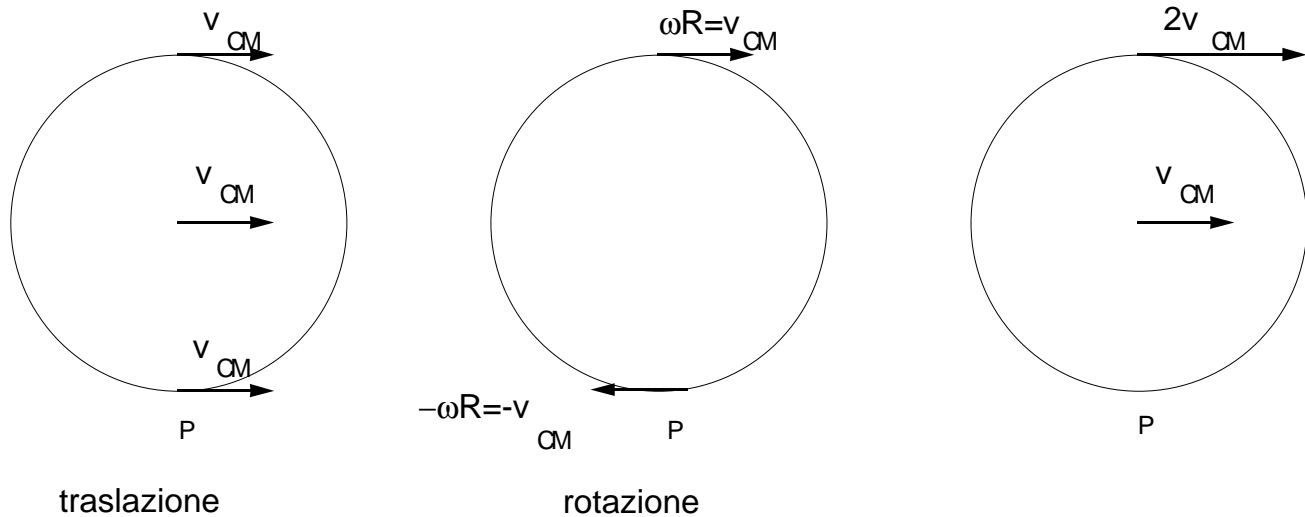
$$v_{CM} = \omega r ; \quad a_{CM} = \alpha r$$

Il punto  $C$  è istantaneamente mantenuto fermo da una forza di attrito statica  $f_s$  che si esercita tra il piano ed il corpo

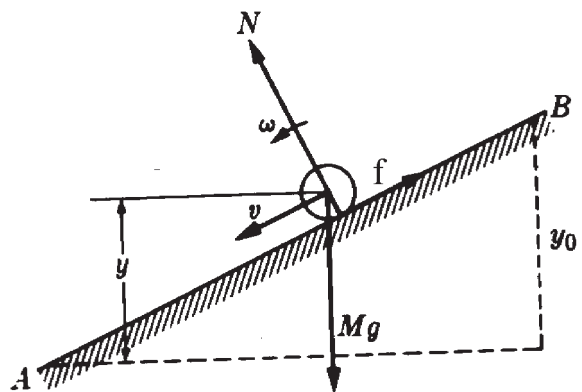
Il massimo valore che  $f_s$  può assumere è  $\mu_s N$

Per valori maggiori di  $f_s$  si produce strisciamento

Il rotolamento può essere studiato come una combinazione di traslazione del  $CM$  e una rotazione attorno ad un asse per  $CM$  con velocità angolare  $\omega$  e accelerazione  $\alpha$



ESEMPIO: Cilindro omogeneo di raggio  $R$  che rotola lungo un piano inclinato



### Metodo dinamico

Il moto traslatorio è determinato assumendo tutte le forze esterne applicate  $CM$

$$N - Mg \cos \theta = 0 \quad (3.10)$$

$$Mg \sin \theta - f = ma_{CM} \quad (3.11)$$

Il moto di rotazione è determinato dalla  $\tau_{CM} = I_{CM}\alpha$

Per la composizione di forze parallele, la risultante delle forze peso è applicata nel baricentro che coincide con il  $CM$  e quindi non può originare rotazioni

Il momento di  $\mathbf{N}$  rispetto a  $CM$  è nullo perché la sua retta di azione passa per  $CM$

Risulta quindi

$$fR = I_C \alpha$$

Applicando la relazione cinematica  $a_{CM} = \alpha R$  e  $I_C = \frac{1}{2}MR^2$  si determina

$$f = \frac{I_C \alpha}{R} = \frac{Ma}{2} \quad (3.12)$$

$$a_{CM} = \frac{Mg \sin \theta}{M + \frac{I_C}{R^2}} = \frac{2}{3}g \sin \theta \quad (3.13)$$

Il moto è possibile se  $f \leq \mu_s Mg \cos \theta$

Diversamente il corpo rotolerà strisciando con forza di attrito

$$f = \mu_d N$$

La velocità è ricavata dalla

$$v^2 = 2al = \frac{2ay_0}{\sin \theta} = \frac{4}{3}gh$$

cioè  $v = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$

### *Conservazione dell'energia*

Nell'ipotesi di moto di rotolamento senza strisciamento la forza di attrito non compie lavoro in quanto applicata ad un punto che rimane fermo

Applicando il principio di conservazione dell'energia (3.9)

$$Mgy_0 = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2$$

Poiché  $v_{CM} = \omega R$  si ha

$$Mgy_0 = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_C \frac{v_{CM}^2}{R^2}$$

si ricava  $v = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$

L'energia potenziale gravitazionale si trasforma in energia cinetica di traslazione e di rotazione

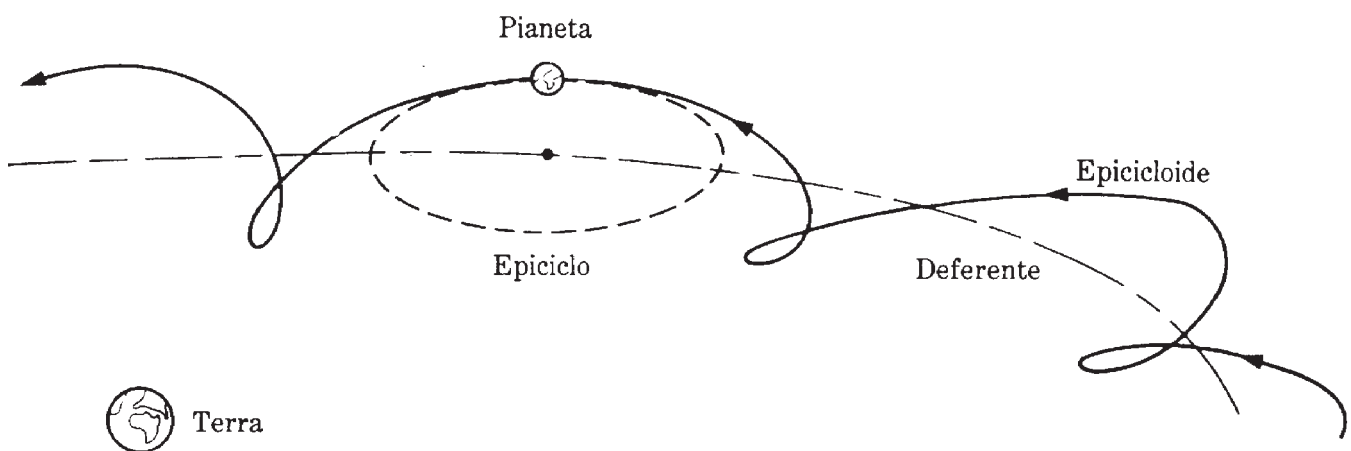


## 4 Gravitazione

I Greci supponevano che la Terra fosse il centro geometrico dell'Universo e che tutti i corpi celesti si muovessero attorno ad essa

Tolomeo di Alessandria (II° d.C.) propose per i pianeti il moto epicicloidale: I pianeti descrivevano con moto uniforme una circonferenza chiamata epiciclo. Il centro della circonferenza a sua volta si muoveva su una circonferenza più grande concentrica con la terra

Descriveva il moto planetario in un sistema di riferimento solidale con la Terra

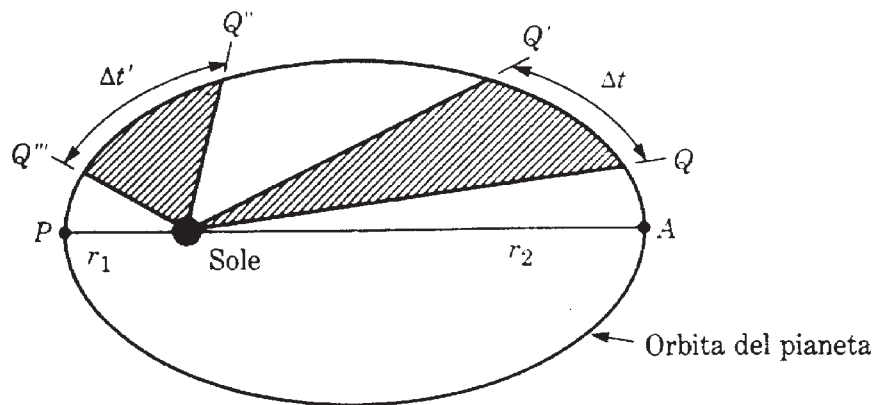


Copernico (XVI° d.C) propose un modello eliocentrico in cui il moto dei pianeti era descritto rispetto al Sole, considerato come il centro. Descriveva il moto planetario in un sistema di riferimento solidale con il Sole

Keplero (XVI° d.C) scoprì le leggi del moto planetario:

1. *I pianeti descrivono orbite ellittiche di cui il sole occupa uno dei fuochi*

2. *Il vettore posizione di ogni pianeta rispetto al Sole descrive aree uguali in tempi uguali della sua orbita ellittica*



Legge delle aree:

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\Delta A'}{\Delta t'} = \text{cost}$$

3. *I quadrati dei periodi di rivoluzione sono proporzionali ai cubi delle distanze medie dei pianeti dal Sole*

La terza legge può essere espressa come

$$\boxed{P^2 = kr_{medio}^3} \quad (4.1)$$

dove

- $P$  = periodo di rivoluzione
- $k$  = costante di proporzionalità
- $r_{medio}$  = semisomma della distanza minima e massima dal Sole

Dati fondamentali sul sistema solare

Corpo	Raggio equatoriale (m)	Massa (kg)	Periodo di rotazione (s)	Semiasse maggiore dell'orbita (m)	Periodo del moto orbitale (s)	Eccentricità dell'orbita
Sole	$6.69 \times 10^8$	$1.99 \times 10^{30}$	$2.4 \times 10^6$	---	---	---
Mercurio	$2.44 \times 10^6$	$3.30 \times 10^{23}$	$5.07 \times 10^6$	$5.79 \times 10^{10}$	$7.60 \times 10^6$	0.2056
Venere	$6.05 \times 10^6$	$4.87 \times 10^{24}$	$2.10 \times 10^7 \dagger$	$1.08 \times 10^{11}$	$1.94 \times 10^7$	0.0068
Terra	$6.38 \times 10^6$	$5.97 \times 10^{24}$	$8.62 \times 10^4$	$1.50 \times 10^{11}$	$3.16 \times 10^7$	0.0167
Marte	$3.39 \times 10^6$	$6.42 \times 10^{23}$	$8.86 \times 10^4$	$2.28 \times 10^{11}$	$5.94 \times 10^7$	0.0934
Giove	$7.14 \times 10^7$	$1.90 \times 10^{27}$	$3.54 \times 10^4$	$7.78 \times 10^{11}$	$3.75 \times 10^8$	0.0483
Saturno	$6.00 \times 10^7$	$5.69 \times 10^{26}$	$3.84 \times 10^4$	$1.43 \times 10^{12}$	$9.30 \times 10^8$	0.0560
Urano	$2.61 \times 10^7$	$8.70 \times 10^{25}$	$6.20 \times 10^4$	$2.87 \times 10^{12}$	$2.65 \times 10^9$	0.0461
Nettuno	$2.43 \times 10^7$	$1.03 \times 10^{26}$	$6.48 \times 10^4$	$4.59 \times 10^{12}$	$5.20 \times 10^9$	0.0100
Plutone	$1.14 \times 10^6$	$1.20 \times 10^{22}$	$5.52 \times 10^5$	$5.91 \times 10^{12}$	$7.84 \times 10^9$	0.2484
Luna*	$1.74 \times 10^6$	$7.35 \times 10^{22}$	$2.36 \times 10^6$	$3.84 \times 10^8$	$2.36 \times 10^6$	0.0550

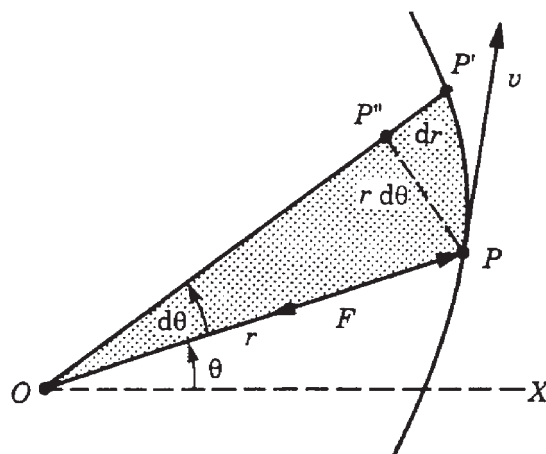
\* I dati orbitali della Luna sono riferiti alla Terra - † Venere mostra un moto di rotazione retrogrado

## Dinamica planetaria

Le leggi di Keplero forniscono una descrizione cinematica del moto dei pianeti

Newton (1642-1727) enunciò la *Legge di gravitazione universale*

Dalla legge delle aree



Nell'intervallo di tempo  $dt$  la particella si sposta da  $P$  a  $P'$ , si ha

$$dA \approx \frac{1}{2}r(rd\theta) = \frac{1}{2}r^2d\theta$$

L'area spazzata nell'unità di tempo è

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}$$

Se il moto della particella è prodotto da una forza centrale, il momento angolare  $\mathbf{L}$  è costante

$$L = mr^2\frac{d\theta}{dt}$$

cioè

$$L = 2m\frac{dA}{dt}$$

La legge delle aree di Keplero equivale alla affermazione che il momento angolare è costante e quindi che la forza applicata al pianeta è centrale:

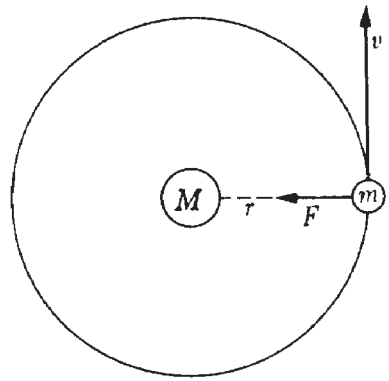
*La forza associata all'interazione gravitazionale è centrale*

Se ammettiamo che l'interazione gravitazionale sia una proprietà universale della materia deve essere

$$\mathbf{F} = Mmf(\mathbf{r})$$

La forma di  $f(\mathbf{r})$  è stata determinata da Newton attraverso la prima legge di Keplero

Un caso particolare della prima legge di Keplero è quando una particella si muove di moto circolare uniforme



La forza che agisce sulla massa è

$$F = m \frac{v^2}{r}$$

Poichè  $v = \frac{2\pi r}{P}$  risulta

$$F = 4\pi^2 \frac{mr}{P^2}$$

Applicando la terza legge di Keplero nel caso di orbita circolare  $P^2 = kr^3$  si ha

$$F = 4\pi^2 \frac{m}{kr^2} \propto \frac{1}{r^2} \quad (4.2)$$

*L'interazione gravitazionale è attrattiva e varia inversamente al quadrato della distanza fra i due corpi*

Newton verificò la correttezza della sua legge ipotizzando che l'accelerazione di gravità  $\mathbf{g}$  in prossimità della superficie terrestre fosse prodotta dallo stesso tipo di forza che la Terra esercita sulla Luna Confrontando

$$g = \frac{F}{m} = \frac{4\pi^2 \frac{m}{kR_T^2}}{m} = \frac{4\pi^2}{kR_T^2}$$

dove  $R_T$  è il raggio della Terra, con l'accelerazione centripeta della luna  $a_L = 2.72 \cdot 10^{-3} \text{ ms}^{-2}$ , ottenne

$$\frac{g}{a_L} \approx (60)^2$$

coincidente con il rapporto

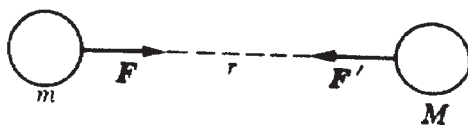
$$\left(\frac{r}{R_T}\right)^2 \approx (60)^2$$

dove  $r$  è la distanza della Luna dal centro della Terra

Poichè le due accelerazioni sono inversamente proporzionali al quadrato della distanza dal centro della Terra, la stessa relazione è valida per le rispettive forze

Newton enunciò la **Legge di gravitazione universale**:

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

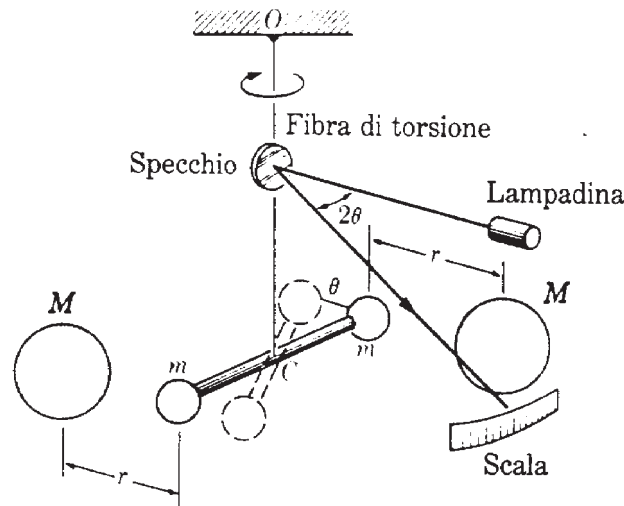


*L'interazione gravitazionale fra due corpi si può esprimere mediante una forza centrale attrattiva proporzionale alle masse dei corpi e inversamente proporzionale al quadrato della distanza fra essi*

$G$  è denominata *costante di Gravitazione universale*

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

Il valore accurato di  $G$  venne misurato da Cavendish nel 1798 utilizzando una bilancia di torsione



L'attrazione gravitazionale produce un momento sulla sbarra orizzontale e quindi una torsione del filo

## Massa inerziale e massa gravitazionale

La massa inerziale di un corpo può essere misurata attraverso la rilevazione della accelerazione prodotta su di essa da una forza nota

$$m_i = \frac{F}{a}$$

La massa gravitazionale di un corpo può essere determinata misurando la forza gravitazionale esercitata su di essa dalla terra

$$m_g = \frac{F R_T^2}{G M_T}$$

La massa inerziale e la massa gravitazionale sono fra loro proporzionali

Supponiamo che due corpi cadano in prossimità della superfi-

cie terrestre, si ha

$$m_{1_i} a_1 = G \frac{M m_{1_g}}{R_T^2}$$

$$m_{2_i} a_2 = G \frac{M m_{2_g}}{R_T^2}$$

dividendo le due equazioni

$$\frac{m_{1_i} a_1}{m_{2_i} a_2} = \frac{m_{1_g}}{m_{2_g}}$$

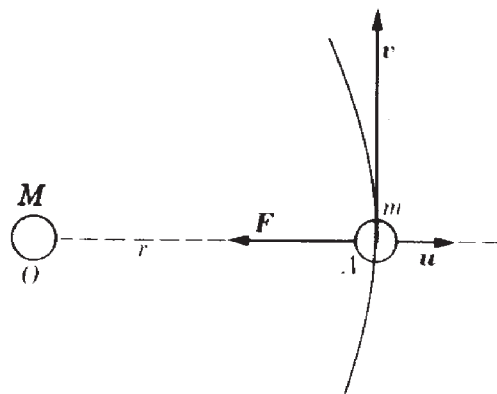
ma  $a_1 = a_2 = g$  quindi

$$\frac{m_{1_i}}{m_{1_g}} = \frac{m_{2_i}}{m_{2_g}}$$

Il valore di  $G$  è stato implicitamente scelto tale da porre uguale a uno il rapporto fra la massa inerziale e la massa gravitazionale

## Energia potenziale gravitazionale

La forza gravitazionale, essendo centrale e dipendendo soltanto dalla distanza, è una forza conservativa





La forza che agisce su  $m$  è

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{u}$$

L'energia potenziale dipende soltanto da  $r$

Dalla  $F = -\frac{dE_P}{dr}$  si ricava

$$\frac{dE_P}{dr} = \frac{GMm}{r^2}$$

Integrando e attribuendo valore nullo all'energia potenziale per  $r \rightarrow \infty$  si ottiene

$$E_P = \int_0^{E_P} dE_P = GMm \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2}$$

cioè

$$\boxed{E_P(r) = -\frac{GMm}{r}} \quad (4.3)$$

L'energia totale del sistema è

$$E = \frac{1}{2}Mv_M^2 + \frac{1}{2}mv_m^2 - \frac{GMm}{r}$$

Quando  $M \gg m$  possiamo supporre che  $M$  sia in quiete in un sistema di riferimento inerziale, quindi

$$\boxed{E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}} \quad (4.4)$$

dove  $v$  è la velocità della massa  $m$  rispetto al  $CM$

Quando l'orbita è circolare si ha  $F = m\frac{v^2}{r}$  e quindi

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{GMm}{r}$$

Introducendo l'espressione dell' $E_C$  nella (4.4) si ottiene

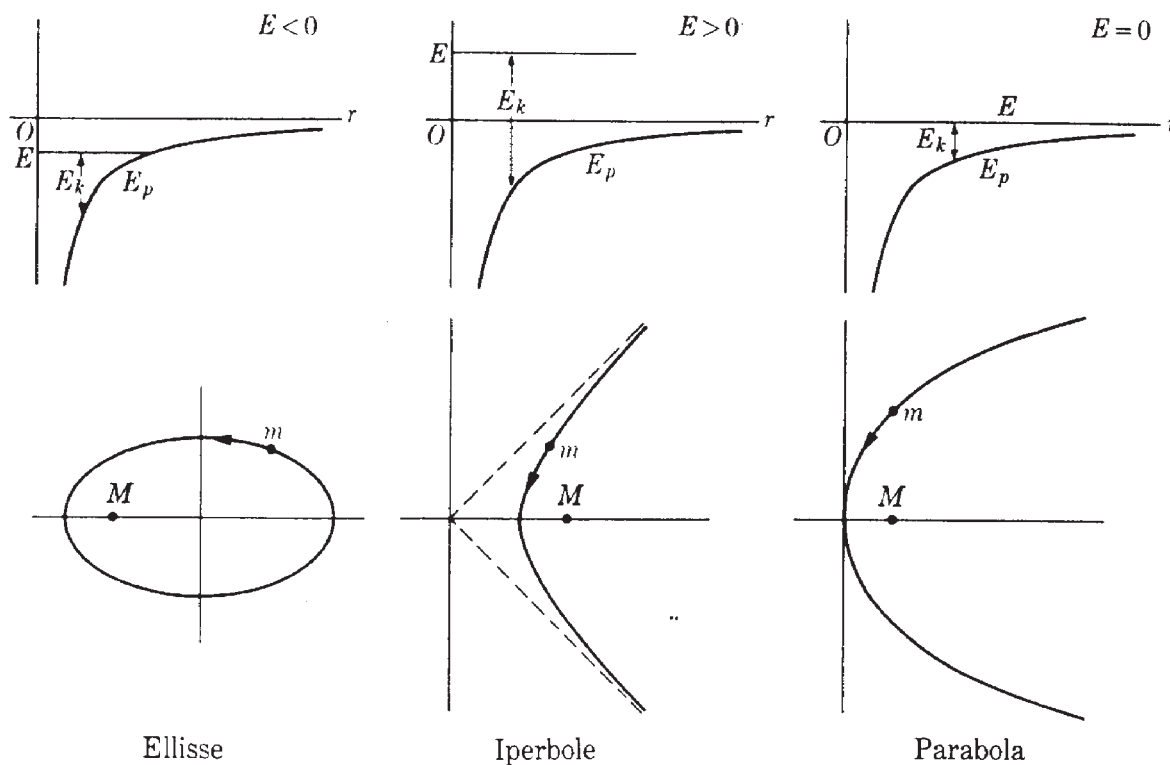
$$E = -\frac{GMm}{2r} \quad (4.5)$$

L'energia totale è negativa

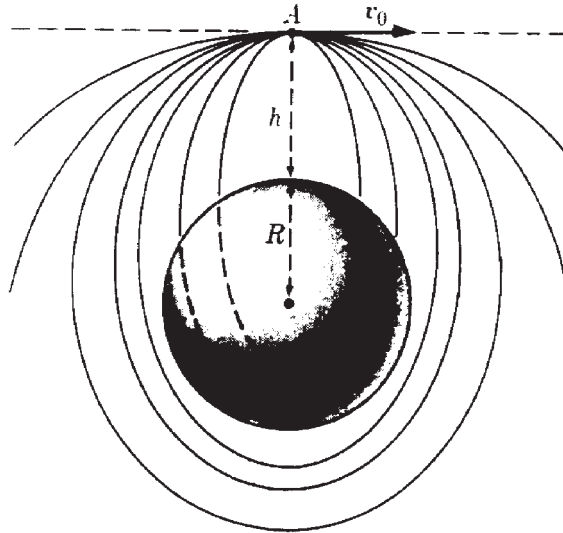
Questa proprietà è di validità generale per tutte le orbite ellittiche (o chiuse)

La natura chiusa dell'orbita significa che l'energia cinetica non è sufficiente a far allontanare la particella sino all'infinito

La relazione fra l'energia totale e la traiettoria è



ESEMPIO: Un satellite posto ad una altezza  $h$  riceve una spinta che produce una velocità iniziale  $v_0$ . Determinare la traiettoria in funzione dell'energia totale



$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GM_T m}{R + h}$$

Quando l'orbita è chiusa, la Terra occupa uno dei due fuochi. Per i satelliti interplanetari, deve risultare  $E > 0$

ESEMPIO: *Velocità di fuga* di un corpo dalla terra

La velocità di fuga è la minima velocità con cui un corpo deve essere lanciato dalla superficie terrestre per potersi allontanare indefinitamente dalla Terra

Deve essere

$$E = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{GM_T m}{R_T} = 0$$

si ricava

$$v_f = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = 1.12 \cdot 10^4 \text{ m s}^{-1}$$

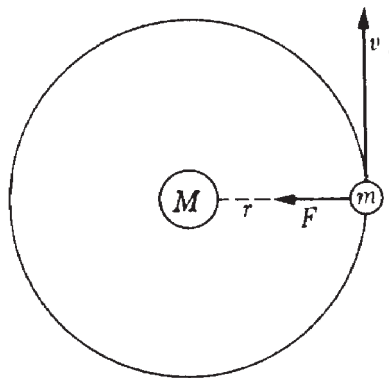
Per un gas la velocità di agitazione termica risulta

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

Quindi le molecole di gas leggeri ( $H_2$ ,  $He$ ) sfuggono più rapidamente dalla atmosfera terrestre

ESEMPIO: *orbita geostazionaria*

Si abbia un satellite dotato di orbita concentrica e coplanare con il piano equatoriale terrestre. Determinare l'altezza  $h$  per la quale il satellite appare fermo visto dalla superficie terrestre, cioè dotato di orbita geostazionaria



Il satellite è attratto dalla forza gravitazionale  $\mathbf{F}$

Poichè il moto è circolare uniforme deve essere  $a = \omega^2 r$

Quindi

$$\frac{GMm}{r^2} = m\omega^2 r$$

da cui

$$r^3 = \frac{GM}{\omega^2}$$

La velocità angolare coincide con la velocità angolare di spin della Terra

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{1 \text{ giorno}} = \frac{2\pi}{60 \cdot 60 \cdot 24} = 7.3 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

Si ricava  $r \approx 4.2 \cdot 10^7 \text{ m}$ , circa 1/10 della distanza Terra-Luna  
Risulta

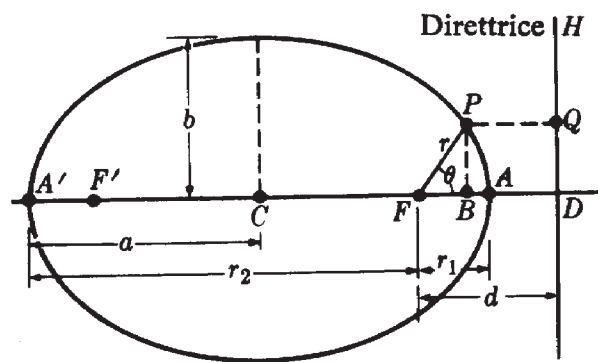
$$h = r - R_T = 3.5 \cdot 10^7 \text{ m}$$

## Moto generale gravitazionale

### Sezioni coniche

Una sezione conica è una curva generata da un punto che si muove in modo tale che il rapporto fra la distanza da un punto  $F$  (detto *fuoco*) e una retta  $H$  (detta *direttrice*) sia costante. Questa costante è definita *eccentricità*  $\epsilon$ .

Esistono tre tipi di coniche: ellisse ( $\epsilon < 1$ ), parabola ( $\epsilon = 1$ ) e iperbole ( $\epsilon > 1$ )



Risulta

$$\epsilon = \frac{PF}{PQ}$$

Ponendo  $PF = r$  e  $FD = d$ , si ha  $PQ = FD - FB = d - r \cos \theta$

Quindi

$$\epsilon = \frac{r}{d - r \cos \theta}$$

Risolvendo rispetto a  $r$

$$\boxed{\frac{\epsilon d}{r} = 1 + \epsilon \cos \theta} \quad (4.6)$$

Nel caso di una ellisse il punto  $A$  corrisponde a  $\theta = 0$  e il punto  $A'$  corrisponde a  $\theta = \pi$ , per cui

$$r_1 = \frac{\epsilon d}{1 + \epsilon} \quad r_2 = \frac{\epsilon d}{1 - \epsilon}$$

Poiché  $r_1 + r_2 = 2a$ , il semiasse maggiore risulta

$$a = \frac{\epsilon d}{1 - \epsilon^2} \quad (4.7)$$

Il semiasse minore è

$$b = a\sqrt{1 - \epsilon^2} \quad (4.8)$$

## Eccentricità in funzione dei parametri fisici del moto gravitazionale

Introducendo il potenziale efficace

$$E_{P_{eff}}(r) = E_P(r) + \frac{L^2}{2mr^2} \quad (4.9)$$

dove il momento angolare  $L = mr^2 \frac{d\theta}{dt}$ , l'espressione della energia totale diventa

$$E = \frac{1}{2}m \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + E_{P_{eff}}$$

risolvendo rispetto a  $\frac{dr}{dt}$  si ha

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2(E - E_{P_{eff}})}{m}} \quad (4.10)$$

Poiché  $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$ , dalla (4.10) si ha

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\sqrt{\frac{2(E - E_{P_{eff}})}{m}}}{\frac{d\theta}{dt}} = \frac{mr^2}{L} \sqrt{\frac{2(E - E_{P_{eff}})}{m}}$$

elevando al quadrato e introducendo la (4.9)

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{m^2 r^4}{L^2} \left\{ \frac{2[E - E_P(r)]}{m} - \frac{L^2}{m^2 r^2} \right\} \quad (4.11)$$

Derivando la (4.6) rispetto a  $\theta$  risulta

$$\frac{\epsilon d}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -\epsilon \sin \theta$$

quindi

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{r^4 \sin^2 \theta}{d^2}$$

Sostituendo nella (4.11) ed eliminando  $r^4$  da ambo i membri, si ha

$$\sin^2 \theta = \frac{d^2 m^2}{L^2} \left\{ \frac{2[E - E_P(r)]}{m} - \frac{L^2}{m^2 r^2} \right\} \quad (4.12)$$

Dalla (4.6) si ha  $\cos \theta = \frac{d}{r} - \frac{1}{\epsilon}$  inoltre

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{d}{r} - \frac{1}{\epsilon}\right)^2 = 1 - \frac{d^2}{r^2} + \frac{2d}{\epsilon r} - \frac{1}{\epsilon^2}$$

sostituendo nella (4.12) si ottiene

$$1 - \frac{d^2}{r^2} + \frac{2d}{\epsilon r} - \frac{1}{\epsilon^2} = \frac{2d^2 m E}{L^2} - \frac{2d^2 m E_P(r)}{L^2} - \frac{d^2}{r^2}$$

Eliminando  $-\frac{d^2}{r^2}$  ed uguagliando i termini che dipendono da  $r$  otteniamo

$$-\frac{2d^2 m E_P(r)}{L^2} = \frac{2d}{\epsilon r}$$

cioé

$$\boxed{E_P(r) = -\frac{L^2}{m d \epsilon r}} \quad (4.13)$$

Per descrivere una sezione conica con centro di forza in un fuoco, l'energia potenziale deve variare con la distanza come  $1/r$ , quindi la forza deve variare come  $1/r^2$

Uguagliando i termini costanti si ottiene

$$\frac{2d^2 m E}{L^2} = 1 - \frac{1}{\epsilon^2}$$

cioé

$$E = \frac{L^2}{2d^2 m} \left( 1 - \frac{1}{\epsilon^2} \right)$$

Introducendo l'espressione del semiasse maggiore (4.7) si ottiene

$$E = -\frac{L^2}{2\epsilon d m a} \quad (4.14)$$

Introducendo l'espressione dell' $E_P(r)$  (4.3) nella (4.13) si ottiene

$$-\frac{GMm}{r} = -\frac{L^2}{m d \epsilon r}$$



quindi

$$\frac{L^2}{md\epsilon} = GMm \quad (4.15)$$

Per cui la (4.14) diventa

$$\boxed{E = -G\frac{Mm}{2a}} \quad (4.16)$$

L'energia totale è negativa e funzione soltanto del semiasse maggiore

Dalle (4.15) e (4.7) si ricava

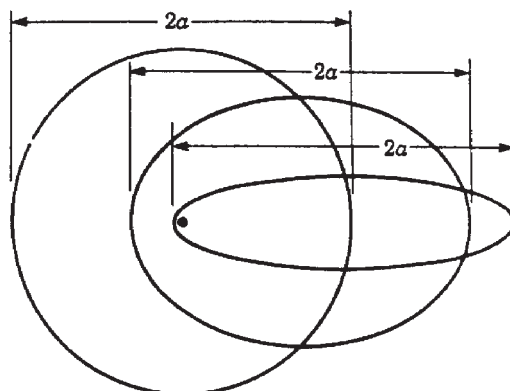
$$L^2 = GMm^2\epsilon d = GMm^2a(1 - \epsilon^2)$$

Ricavando  $a$  dalla (4.16) e risolvendo rispetto a  $\epsilon$ , si ottiene

$$\boxed{\epsilon^2 = 1 + \frac{2E}{m} \left( \frac{L}{GMm} \right)^2} \quad (4.17)$$

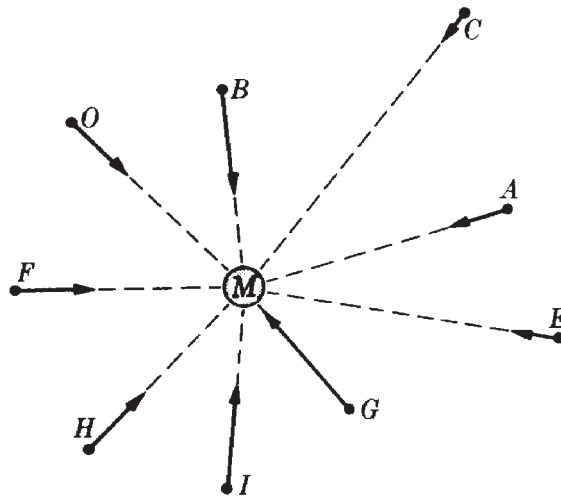
L'eccentricità dell'orbita dipende dalla energia totale e dal momento angolare

A una data energia totale possono corrispondere molti stati con momento angolare ed eccentricità differenti



*La dimensione dell'orbita è determinata dall'energia mentre, per una data energia, la forma dell'orbita è determinata dal momento angolare*

## Campo Gravitazionale



La massa  $M$  produce nello spazio che la circonda una situazione fisica che chiamiamo campo gravitazionale  $\mathbf{\Gamma}$



L'intensità del campo gravitazionale prodotto da  $M$  nel punto  $P$  è definita come la forza per unità di massa posta nel punto  $P$

$$\mathbf{\Gamma} = \frac{\mathbf{F}}{m} = -\frac{GM}{r^2}\hat{u} \quad (4.18)$$

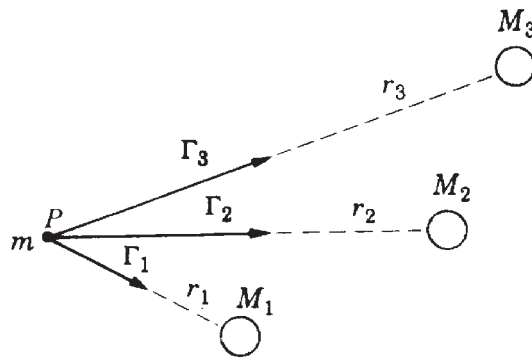
Il campo gravitazionale è sempre diretto verso la massa che lo produce

Risulta dalla (4.18)

$$\mathbf{F} = massa\mathbf{\Gamma}$$

Il campo gravitazionale si misura in  $m s^{-2}$  ed è dimensionalmente equivalente ad una accelerazione

Supponiamo di avere diverse masse  $M_1, M_2, M_3, \dots$  ciascuna delle quali produca il campo gravitazionale  $\mathbf{\Gamma}_1, \mathbf{\Gamma}_2, \mathbf{\Gamma}_3, \dots$

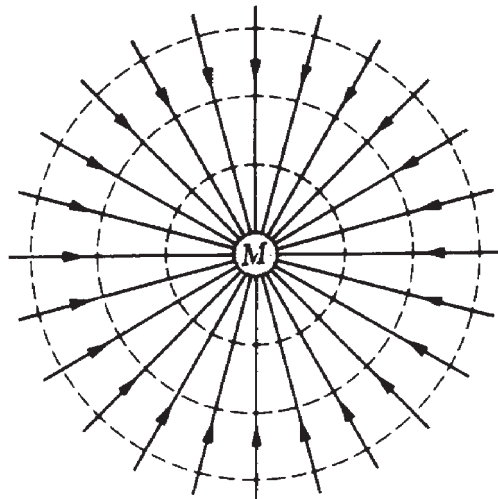


La forza totale che agisce sulla massa  $m$  è

$$\mathbf{F} = m\mathbf{\Gamma}_1 + m\mathbf{\Gamma}_2 + m\mathbf{\Gamma}_3 + \dots = m(\mathbf{\Gamma}_1 + \mathbf{\Gamma}_2 + \mathbf{\Gamma}_3 + \dots) = m\mathbf{\Gamma}$$

I campi gravitazionali sono linearmente additivi

Un campo gravitazionale è rappresentato attraverso le *linee di forza*



Una linea di forza è disegnata in modo che in ciascun punto la direzione del campo sia tangente alla linea di forza

Le linee di forza sono disegnate con densità proporzionale all'intensità del campo gravitazionale

## Potenziale gravitazionale

Il potenziale gravitazionale in un punto è definito come l'energia potenziale per unità di massa posta nel campo gravitazionale

$$\Phi = \frac{E_P}{m}$$

Introducendo l'espressione di  $E_P$  dalla (4.3)

$$\boxed{\Phi = \frac{-GM}{r}} \quad (4.19)$$

In presenza di diverse masse  $M_1, M_2, M_3, \dots$  si ha

$$\Phi = -G \left( \frac{M_1}{r_1} + \frac{M_2}{r_2} + \frac{M_3}{r_3} + \dots \right) = -G \sum_i \frac{M_i}{r_i}$$

Poiché  $\mathbf{F} = m\mathbf{\Gamma}$  e  $E_P = m\Phi$ , si ha

$$\mathbf{\Gamma} = -\nabla\Phi \quad (4.20)$$

Il campo gravitazionale è l'opposto del gradiente del potenziale gravitazionale

Se una particella di massa  $m$  si sposta da un punto  $A$  a un punto  $B$ , il lavoro del campo gravitazionale risulta

$$W = -\Delta E_P = -m\Delta\Phi$$

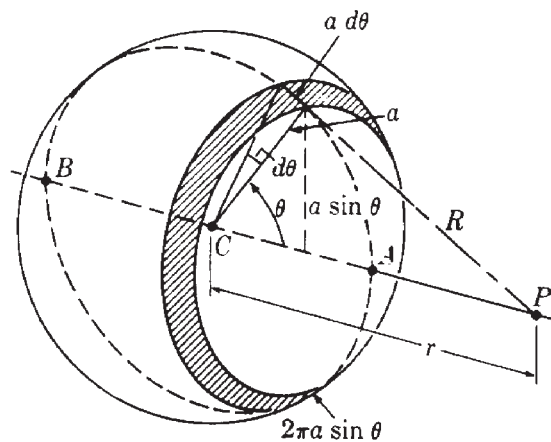
Le superfici per le quali il potenziale gravitazionale assume lo stesso valore sono definite *superfici equipotenziali*

La direzione del campo gravitazionale è perpendicolare alle superfici equipotenziali

## Campo gravitazionale di un guscio sferico

Tutte le formule riportate sino a qui sono valide rigorosamente per corpi puntiformi

Ci proponiamo di calcolare il campo gravitazionale prodotto da una massa distribuita uniformemente sulla superficie di una sfera cava



Consideriamo un punto  $P$  posto all'esterno del guscio

Dividiamo la superficie della sfera in tante strette strisce circolari aventi centro sulla retta  $AB$ . Il raggio di ogni striscia è  $a \sin \theta$  e la larghezza  $a d\theta$

L'area della striscia è

$$Area = (2\pi a \sin \theta)(a d\theta) = 2\pi a^2 \sin \theta d\theta$$

Se  $M$  è la massa totale, la massa per unità di area è  $M/4\pi a^2$  e la massa contenuta in una striscia circolare

$$\frac{M}{4\pi a^2}(2\pi a^2 \sin \theta d\theta) = \frac{1}{2}M \sin \theta d\theta$$

Tutti i punti della striscia si trovano alla stessa distanza  $R$  da  $P$ . Il potenziale gravitazionale prodotto dalla striscia in  $P$  risulta

$$d\Phi = -G \frac{\frac{1}{2}M \sin \theta d\theta}{R} = -\frac{GM}{2R} \sin \theta d\theta$$

Poiché si ha per la legge dei coseni

$$R^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta$$

Differenziando otteniamo

$$2R dR = 2ar \sin \theta d\theta$$

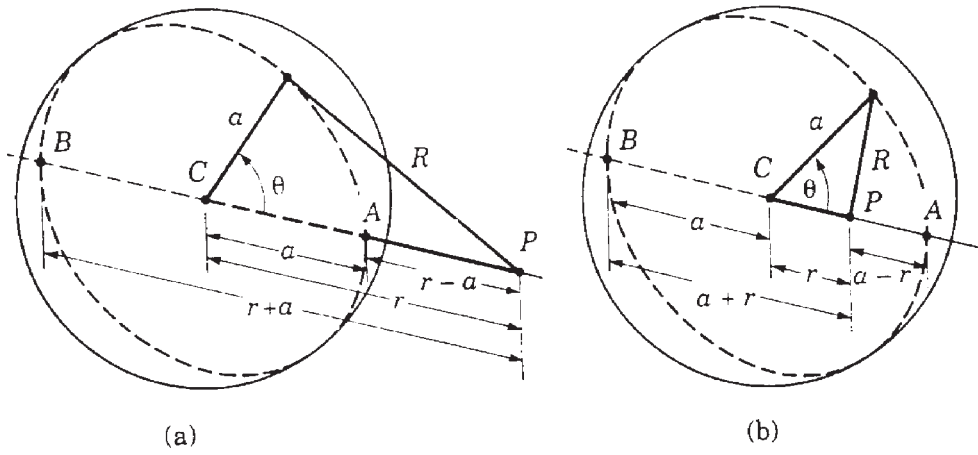
cioé

$$\sin \theta d\theta = \frac{R dR}{ar}$$

Per cui

$$d\Phi = -\frac{GM}{2ar} dR$$

Per ottenere il potenziale gravitazionale totale dobbiamo integrare su tutta la superficie della sfera



Per un punto  $P$  esterno alla sfera i limiti di  $R$  sono  $r - a$  corrispondente al punto  $A$  e  $r + a$  corrispondente al punto  $B$   
Per cui

$$\Phi = -\frac{GM}{2ar} \int_{r-a}^{r+a} dR = -\frac{GM}{2ar} 2a = -\frac{GM}{r} \quad (r > a)$$

Per un punto  $P$  interno alla sfera i limiti di  $R$  sono  $a - r$  e  $a + r$   
Per cui

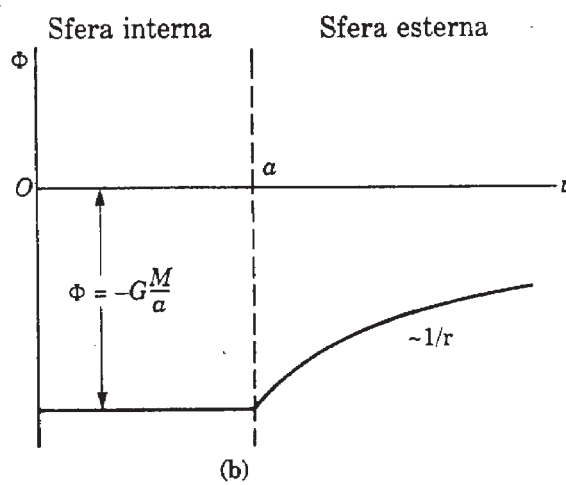
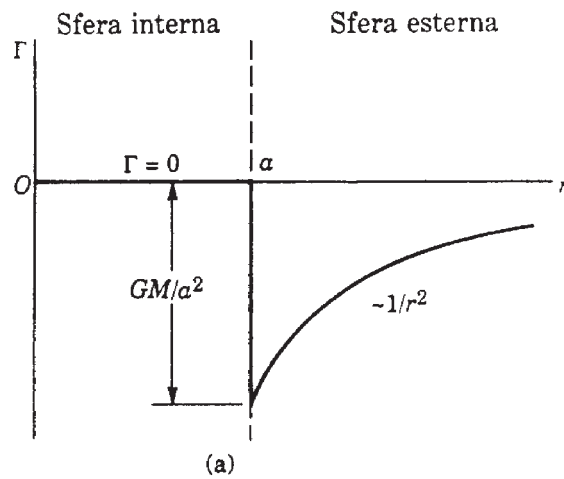
$$\Phi = -\frac{GM}{2ar} \int_{a-r}^{a+r} dR = -\frac{GM}{2ar} 2r = -\frac{GM}{a} \quad (r < a)$$

Il potenziale gravitazionale per punti interni al guscio sferico è costante

Il campo gravitazionale si ricava dalla (4.20)

$$\mathbf{\Gamma} = -\frac{GM}{r^2} \hat{u} \quad (r > a) \quad (4.21)$$

$$\mathbf{\Gamma} = 0 \quad (r < a) \quad (4.22)$$

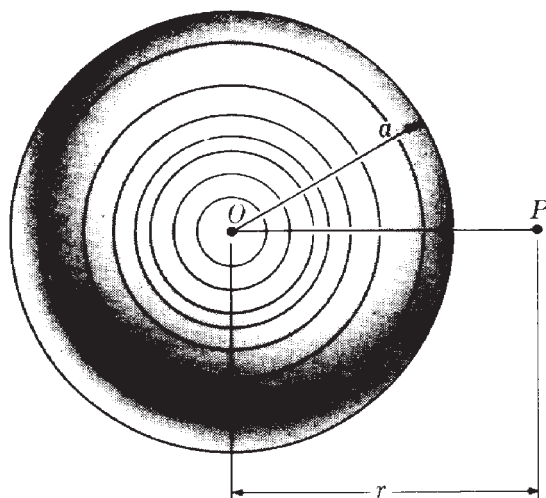


## Campo gravitazionale di una sfera piena

Consideriamo una sfera solida omogenea

Possiamo considerare la sfera costituita da una sovrapposizione 'a cipolla' di sottili gusci sferici

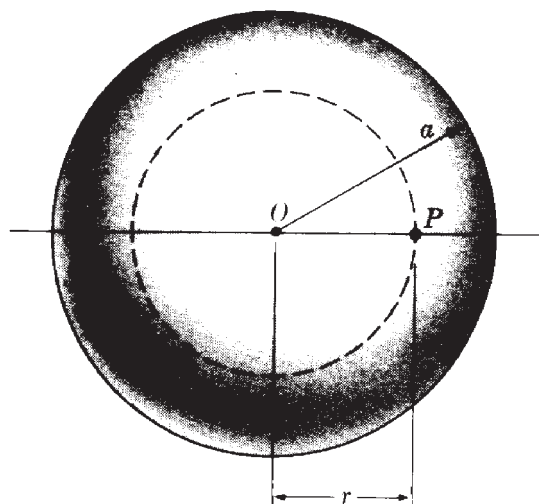




Al di fuori della sfera, ciascuno strato produce un campo dato dalla (4.21) Poiché per  $P$  la distanza  $r$  dal centro della sfera è la stessa per tutti gli strati le masse si sommano e si ottiene di nuovo il risultato della (4.21)

*Una sfera piena omogenea produce nei punti esterni un campo e un potenziale gravitazionale identici a quelli di una particella della stessa massa situata nel centro della sfera*

Per ottenere il campo internamente alla sfera omogenea consideriamo un punto  $P$  a distanza  $r$



I gusci con raggio maggiore di  $r$  non contribuiscono al campo in  $P$ , in accordo con la (4.22)

I gusci con raggio minore di  $r$  producono un campo in accordo con la (4.21)

Detta  $m'$  la massa all'interno della sfera tratteggiata

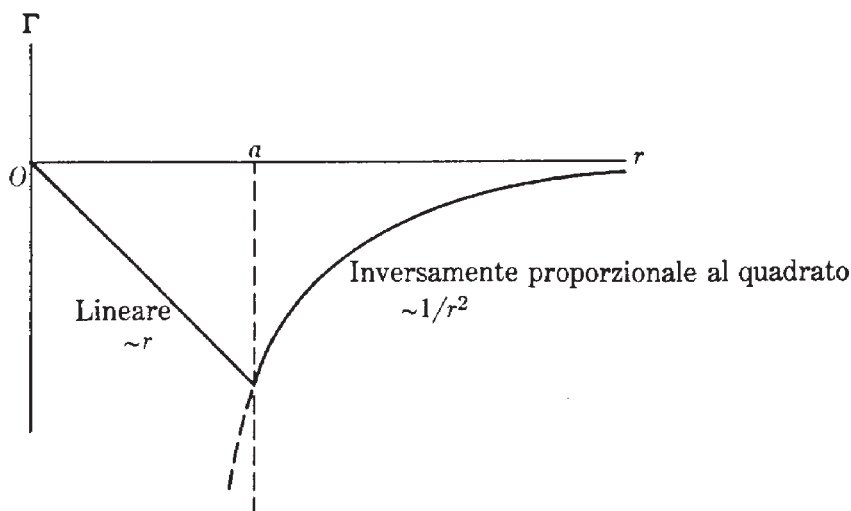
$$\mathbf{\Gamma} = -\frac{Gm'}{r^2}\hat{u}$$

Poiché la sfera é omogenea la densità é  $M/(4\pi a^3/3)$ , quindi

$$m' = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi a^3} \left( \frac{4}{3}\pi r^3 \right) = \frac{Mr^3}{a^3}$$

Risulta

$$\mathbf{\Gamma} = -\frac{GMr}{a^3}\hat{u} \quad (r < a)$$



Il campo gravitazionale varia linearmente all'interno di una sfera piena

## Principio di equivalenza

Poiché la massa inerziale e la massa gravitazionale sono uguali si ha che

*Tutti i corpi posti nel medesimo luogo sono soggetti alla stessa accelerazione*

Consideriamo un punto dove il campo è  $\mathbf{\Gamma}$ , l'accelerazione per un corpo di massa  $m$  posto in quel punto è

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \mathbf{\Gamma}$$

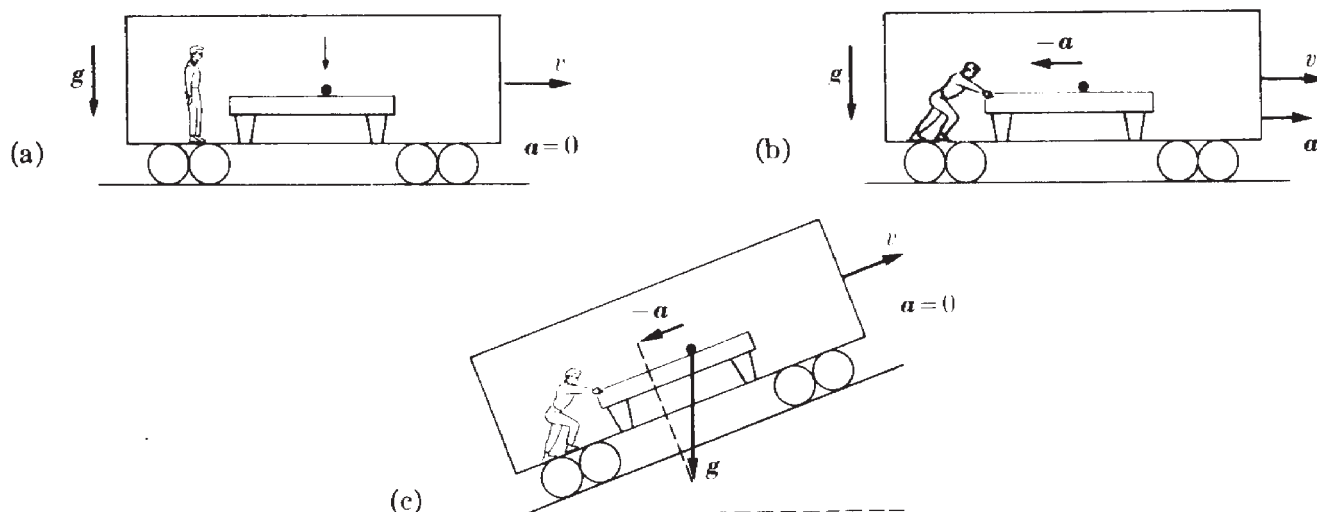
indipendentemente dalla massa  $m$

Consideriamo due sistemi di riferimento

1.  $S$  non accelerato (inerziale) immerso in un campo gravitazionale uniforme
2.  $S'$  uniformemente accelerato rispetto ad esso con  $\mathbf{a} = -\mathbf{g}$  ma non immerso in un campo gravitazionale

Vale il *principio di equivalenza*:

*Un osservatore non è in grado di distinguere se il suo laboratorio è solidale con  $S$  o con  $S'$*



*principio di relatività generale*

*Le leggi della natura si devono scrivere in modo tale che sia impossibile distinguere fra un campo gravitazionale uniforme e un sistema accelerato*

## Gravitazione e forze intermolecolari

Le forze gravitazionali permettono di descrivere in modo accurato il moto dei pianeti. A livello molecolare l' $E_P$  della molecola di  $H_2$

$$E_P = -G \frac{mm'}{r} = 2.22 \cdot 10^{-54} \text{ J} = 1.39 \cdot 10^{-35} \text{ eV}$$

dove  $m = m' = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}$  e  $r = 0.745 \cdot 10^{-10} \text{ m}$

L'energia effettiva del legame risulta

$$E = 7.18 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 4.48 \text{ eV}$$

L'energia gravitazionale non è responsabile della formazione della molecola di idrogeno

Le forze presenti a livello atomico sono del tipo elettromagnetico e sono enormemente maggiori della forza gravitazionale  
La forza gravitazionale diventa importante in presenza di grandi masse elettricamente neutre

## 5 Termodinamica

### Aspetti microscopici e macroscopici

Lo studio dei sistemi fisici contenenti un numero elevato di particelle non può essere affrontato con le equazioni usuali della dinamica dei sistemi.

Ad esempio 1g di acqua contiene  $N = 3 \cdot 10^{22}$  molecole e lo studio dettagliato richiederebbe  $3N$  equazioni differenziali interdipendenti e la conoscenza di  $6N$  condizioni iniziali. Lo studio si può affrontare sia mediante la meccanica statistica (che tratteremo brevemente più avanti) sia mediante l'approccio macroscopico inteso come studio del sistema con grandezze di tipo globale cioè riassuntive di ciò che avviene a livello microscopico

### Il metodo termodinamico

Il metodo termodinamico o macroscopico consiste nel definire operativamente poche osservabili fisiche dette variabili termodinamiche o coordinate macroscopiche e nel trovare equazioni generali che le collegano.

Ad esempio, se consideriamo come sistema il contenuto di un cilindro di un motore a scoppio, possiamo descrivere il sistema in termini di: composizione, volume, pressione e temperatura. Queste possono essere le variabili del sistema. Le loro caratteristiche principali:

1. Sono suggerite più o meno direttamente dai nostri sensi

2. Sono in numero relativamente piccolo
3. Possono essere misurate direttamente
4. Non implicano alcuna ipotesi sulla struttura della materia

I sistemi termodinamici di interesse sono numerosi: il vapore d'acqua che compie lavoro in un impianto di produzione d'energia, l'ammoniaca che vaporizzando raffredda un corpo, ecc.

## Sistema, ambiente, frontiera

Prima di procedere diamo alcune definizioni:

- *Sistema termodinamico*: una qualsiasi porzione di materia che contenga un numero  $n \rightarrow \infty$  di particelle. Ogni oggetto che sia percepibile dai sensi di un essere umano è un sistema termodinamico.
- *frontiera*: è una superficie chiusa contenente tutte le particelle del sistema e nessuna ad essa estranea.
- *ambiente*: la porzione dell'universo circostante il sistema (e non facente parte del sistema stesso) è l'ambiente.

## Stati termodinamici e variabili di stato

Le condizioni in cui si trova un sistema termodinamico rappresentano lo stato del sistema stesso. Esse sono individuate da

un certo numero di grandezze macroscopiche dette *variabili termodinamiche*.

Poichè in termodinamica ci si occupa principalmente di scambi energetici si sceglieranno quelle variabili termodinamiche tali che una loro variazione sia legata ad uno scambio energetico.

Le variabili termodinamiche possono essere:

- *estensive*: quando il loro valore, per un sistema costituito dall'unione di due sottosistemi, è dato dalla somma dei due valori dei sottosistemi. Esempio: Volume, Massa, Energia Cinetica.
- *intensive*: quando il loro valore, per un sistema costituito dall'unione di due sottosistemi, è lo stesso valore per i due sottoinsiemi. Esempio: Pressione, Temperatura, Forze.

Vedremo che uno scambio energetico si può esprimere mediante il prodotto di due variabili termodinamiche: una estensiva ed una intensiva.

Noi ci occuperemo soprattutto di scambi di energia termica e meccanica; come conseguenza avremo solo due variabili termodinamiche indipendenti.

## Equilibrio termodinamico

Un sistema in equilibrio termodinamico soddisfa alle seguenti condizioni:

1. Equilibrio meccanico: non esistono forze non equilibrate che agiscono sul sistema o su singole parti di esso.



2. Equilibrio chimico: non hanno luogo reazioni chimiche all'interno del sistema, né movimenti di costituenti chimici da una parte all'altra del sistema.
3. Equilibrio termico: non esistono differenze finite di temperature fra le varie parti del sistema, né fra il sistema e l'ambiente circostante. Si ammettono differenze infinitesime.

In un sistema termodinamico in equilibrio le variabili termodinamiche non variano nel tempo.

## Funzioni di stato ed equazioni di stato

Scelte le variabili termodinamiche caratteristiche di uno stato di equilibrio termodinamico, si possono definire un certo altro numero di grandezze termodinamiche dipendenti dalle prime. Queste variabili dipendenti possono essere *funzioni di stato* nel senso che il loro valore dipende solo dallo stato del sistema e non dalla storia precedente.

Se consideriamo una certa quantità di gas racchiuso in un recipiente e misuriamo  $P$ ,  $V$ ,  $T$ , ci accorgiamo che fissate due funzioni di stato la terza è sempre determinata.

Questo significa che delle tre funzioni di stato solo due sono indipendenti.

L'equazione che connette le tre funzioni all'equilibrio prende il nome di *equazione di stato*.

Supponiamo di avere ad esempio:  $V$  funzione di  $T$  e  $P$ , ossia  $V = V(T, P)$

Il passaggio tra due condizioni di equilibrio infinitamente vicine implica in generale una variazione  $dV$ ,  $dT$  e  $dP$ .

Un teorema del calcolo differenziale permette di scrivere

$$dV = \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dT + \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T dP$$

cioè siamo in presenza di differenziali esatti per  $dV$ ,  $dT$  e  $dP$ .

Per queste si può scrivere se  $z = z(x, y)$

$$dz = \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_y dx + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)_x dy$$

Nota:

Ogni infinitesimo in termodinamica deve rappresentare una variazione piccola della grandezza considerata (rispetto al suo valore) ma deve allo stesso tempo essere sufficientemente grande in modo da potersi riferire ad un numero di molecole talmente elevato da giustificare l'approccio macroscopico.

## Trasformazioni termodinamiche

Quando un sistema termodinamico cambia di stato si dice che il sistema effettua una trasformazione.

Le trasformazioni più importanti sono:

1. *Trasformazioni tra stati di equilibrio*: Sono quelle trasformazioni che avvengono tra due stati di equilibrio (iniziale e finale). Poiché un sistema isolato in equilibrio permane nel suo stato occorre che questo sistema scambi energia con l'ambiente per poter cambiare stato.

2. *Trasformazioni cicliche*: Sono trasformazioni cicliche quelle che hanno lo stesso stato termodinamico come stato iniziale e come stato finale.
3. *Trasformazioni quasi statiche*: Trasformazioni che avvengono solo attraverso stati di equilibrio. In natura non esistono e sono un caso limite delle trasformazioni reali. Esempio: gas in un cilindro verticale con pistone sul quale si mettono una alla volta granelli di sabbia.
4. *Trasformazioni reversibili*: Trasformazioni percorribili nei due sensi. Le tre condizioni per le trasformazioni inverse sono:
  - le sorgenti di calore recuperano le quantità di calore
  - i dispositivi esterni recuperano l'energia
  - non avvengono altri fenomeni
5. *Trasformazioni irreversibili*: Il sistema termodinamico e l'ambiente esterno non possono essere ricondotti alla situazione iniziale: si hanno in questo caso:
  - trasformazioni *non* tra stati di equilibrio
  - presenza di effetti dissipativi (attriti, viscosità,...)
  - entrambi i casi precedenti

Quindi le trasformazioni reversibili devono avvenire in un *modo quasi statico e senza effetti dissipativi*.

Esempio: volano con freno in una scatola isolata con gas.

6. *Trasformazioni spontanee*: Quando un sistema isolato lontano dall'equilibrio si porta in un *stato di equilibrio* si ha una trasformazione spontanea. Esempio: sbarretta metallica con temperature diverse all'estremità.
7. *Trasformazioni lontane dall'equilibrio*: Sistema non isolato che si trasforma rimanendo lontano dall'equilibrio.

## Rappresentazione grafica di stati e trasformazioni

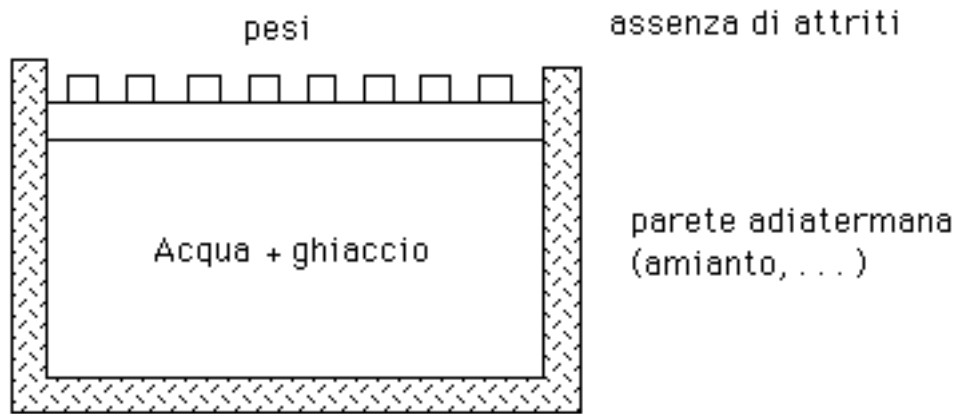
Uno stato di equilibrio di un sistema termodinamico caratterizzabile mediante  $n$  variabili di stato indipendenti si può rappresentare mediante un punto in uno spazio  $n$  dimensionale.

Nel caso di scambi energetici di due tipi (termico e meccanico) è  $n = 2$ .

Quindi le trasformazioni reversibili sono rappresentabili da linee nel piano ( $n = 2$ ). Le trasformazioni irreversibili non possono essere descritte da linee nel piano perché non si conoscono le coordinate termodinamiche. A volte si usa rappresentarle con una linea tratteggiata.

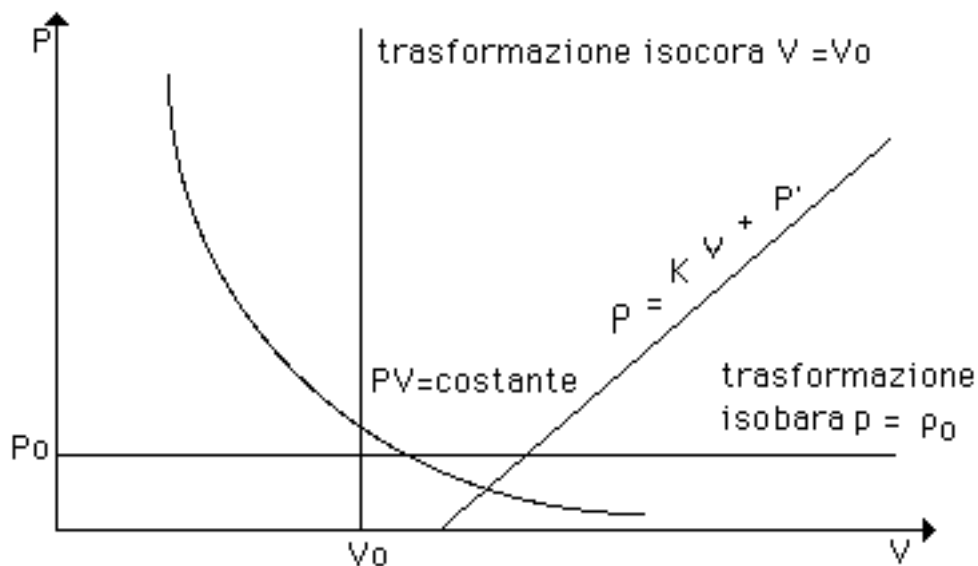
## Esempio di trasformazione reversibile

Si abbia un recipiente con pareti adiabatermane con un pistone adiabatermano, contenente un miscuglio di acqua e di ghiaccio.



- A. Aumento i pesi  $\rightarrow$  diminuisce il ghiaccio
- B. Riduco i pesi  $\rightarrow$  aumenta il ghiaccio

Nota: l'acqua (come il Bi, Ag...) solidificando aumenta il volume Molto spesso si usa il piano  $p - V$  o piano di Clapeyron per descrivere i sistemi gassosi.

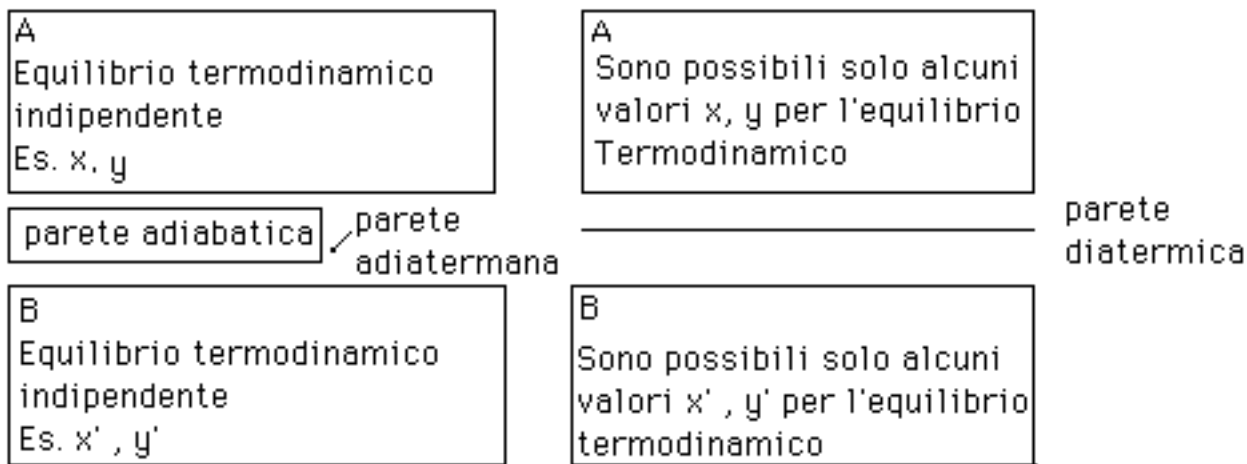


## Equilibrio termico

Gli esperimenti mostrano che lo stato di equilibrio di un sistema dipende dalla vicinanza di altri sistemi o dalla natura

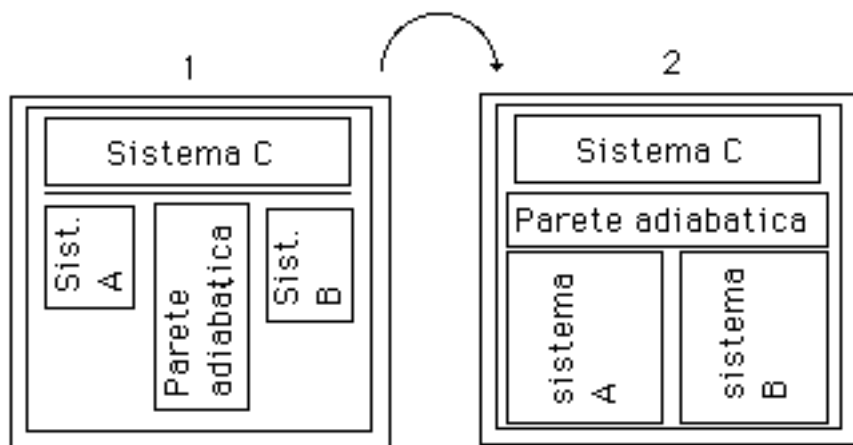
delle pareti di separazione che possono essere: *adiatermane* o *diatermiche* (*diatermane*).

Si abbiamo i seguenti sistemi  $A$  e  $B$  posti a contatto:



Con la parete diatermica i valori  $x, y$  e  $x', y'$  cambiano spontaneamente fino a che il sistema complessivo non raggiunge uno stato di equilibrio. Si dice che i due sistemi sono in equilibrio termico. In altre parole: L'equilibrio termico è quello stato, caratterizzato da certi valori delle variabili, che due o più sistemi raggiungono quando vengono posti a contatto tramite una parete diatermica.

Consideriamo ora due sistemi  $A$  e  $B$  separati da una parete adiatermana ma singolarmente a contatto con un terzo sistema  $C$  per mezzo di pareti diatermiche.



L'esperienza mostra che se  $A$  e  $B$  sono separatamente in equilibrio termico con  $C$  nel caso 1 essi allora sono in equilibrio termico tra loro (caso 2).

Si può allora enunciare *il principio zero della termodinamica*:

Due sistemi in equilibrio termico con un terzo sono in equilibrio termico tra loro.

In pratica viene utilizzato per misurare la temperatura di oggetti ( $A$ ,  $B$ ) mediante un termometro ( $C$ ).

## Temperatura

Possiamo usare il sistema  $C$  (termoscopio) per classificare gli stati di equilibrio termico purché  $C$  subisca delle variazioni vistose dei suoi parametri.

Esempio: l'immersione di una barretta metallica ( $C$ ) in due recipienti separati ( $A$ ) e ( $B$ ) con la misura dell'allungamento della barretta. L'indice di stato di equilibrio termico viene chiamato temperatura. In altre parole:

La temperatura di un sistema è quella proprietà che determina se un sistema è in equilibrio termico o meno con altri sistemi.

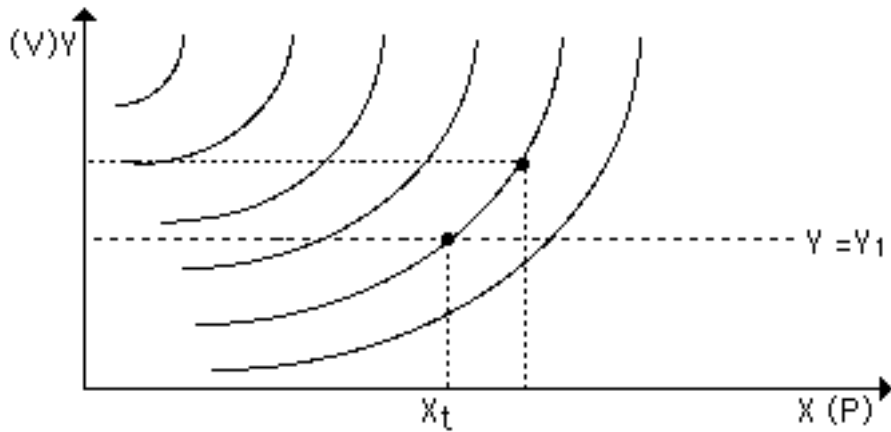
## Misura della temperatura

Per stabilire una scala empirica della temperatura dobbiamo scegliere un sistema descritto dalle coordinate  $x$  e  $y$  che chiameremo termometro. Consideriamo un sistema  $A$ , descritto dalle due coordinate termodinamiche  $x_1, y_1$  in equilibrio termico con un sistema  $B$  descritto dalle due coordinate  $x'_1, y'_1$ . Prendiamo ora il sistema  $A$ , allontaniamolo da  $B$ , che abbiamo mantenuto nel suo stato iniziale; riportiamolo in contatto diatermano con  $B$  entro breve tempo si raggiungerà un nuovo stato di equilibrio termico del sistema  $A$  con lo stato del sistema  $B$  sempre rappresentato da  $x'_1, y'_1$ : siano  $x_2$  e  $y_2$  le due nuove coordinate che descrivono il nuovo stato di equilibrio del sistema  $A$ . Riprendiamo ora il sistema  $A$ , allontaniamolo nuovamente da  $B$ , modifichiamolo e riportiamolo in contatto diatermano con  $B$ , ripetendo più volte l'esperimento: tutte le volte il sistema  $A$  si riporterà in equilibrio termico col sistema  $B$  e di volta in volta sarà descritto dalle coppie di coordinate  $x_3, y_3; x_4, y_4; \dots$

I vari stati del sistema  $A$  rappresentati dalle coppie di coordinate  $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; \dots$ , essendo tutti in equilibrio col sistema  $B$  nello stato  $x'_1, y'_1$  per il principio zero della termodinamica, sono anche in equilibrio termico tra loro. Rappresentando i diversi stati del sistema  $A$  in equilibrio col sistema  $B$  nel piano  $(x, y)$  la linea che congiunge i vari punti  $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; \dots$  si chiama *isoterma*; definiamo perciò una isoterma come il luogo dei punti del piano  $(x, y)$  che rappresentano i vari stati di equilibrio di un sistema con un determinato stato di un altro sistema. Per ottenere una indicazione univoca si



procede scegliendo nel piano  $(x, y)$  la linea  $y = y'$  che interseca le isoterme in punti con la stessa  $y$  ma coordinata  $x$  diversa.

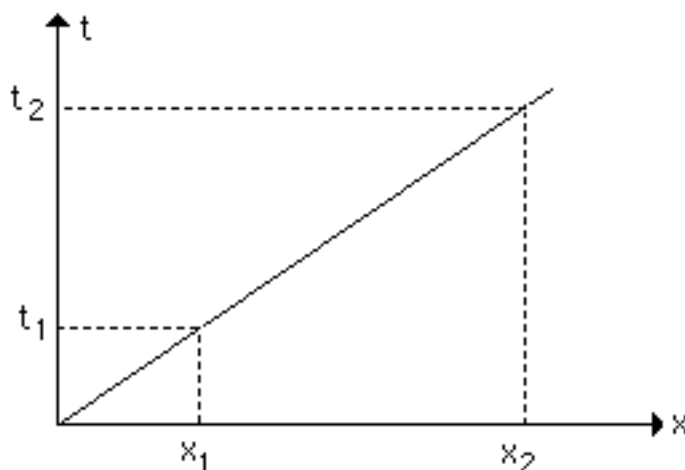


La temperatura associata a ogni isoterma è una funzione di  $x$  nei punti di intersecazione. Si definisce:

- $x =$  grandezza termometrica
- $t =$  temperatura

e si può scrivere quando un fenomeno dipende linearmente da  $t$ :

$$t = ax + b$$



Esempi:

Gas a volume costante;  $x =$  Pressione ( $P$ )

Resistore elettrico;  $x =$  Resistenza elettrica ( $R$ )

Liquido in un capillare;  $x =$  Lunghezza ( $L$ )

Termocoppia;  $x =$  f. e. m. ( $e$ )

Occorre scegliere un sistema termodinamico campione per avere un riferimento preciso e determinare le costanti  $a$  e  $b$ .

O meglio poiché per due punti nel piano passa una sola retta occorre trovare due particolari fenomeni fisici che definiscono i due punti di riferimento.

Le scale di temperatura attualmente più usate sono tre: *la scala Celsius* (centigrada), *la scala Fahrenheit*, *la scala Kelvin*.

Nella scala Celsius i due punti fissano la temperatura del ghiaccio fondente (valore 0) e la temperatura di ebollizione dell'acqua (valore 100); dividendo per 100 l'intervallo si ottiene il grado Celsius ( $^{\circ}C$ ).

La scala Kelvin o scala assoluta ha gli stessi punti fissi ma gli attribuisce i valori 273.15 e 373.15. Dividendo sempre per 100 l'intervallo si ottiene il grado kelvin ( $K$ ). Lo zero di questa scala si chiama zero assoluto ed è la più bassa temperatura raggiungibile da qualsiasi fenomeno fisico.

Si hanno le relazioni:

$$1^{\circ}C = 1^{\circ}K = \frac{9}{5}^{\circ}F$$

$$t^{\circ}C = 32 + \frac{9}{5}t^{\circ}F$$

## L'equazione di stato dei gas ideali

Supponiamo di essere nelle condizioni di gas ideale o gas perfetto e cioè:

Si considera che:

1. Il gas è composto da un numero enorme di molecole.
2. Esse si muovono in maniera casuale con varie velocità. Si suppone valida la meccanica di Newton a livello atomico.
3. Il volume delle molecole è trascurabile rispetto a quello occupato dal gas
4. Le molecole interagiscono solo durante gli urti altrimenti si muovono come particelle isolate.
5. Gli urti sono perfettamente elastici e di durata trascurabile.

Le leggi di questo gas sono le seguenti:

### Legge di Charles

A pressione costante, la relazione che lega la temperatura e il volume di un qualunque gas è lineare:

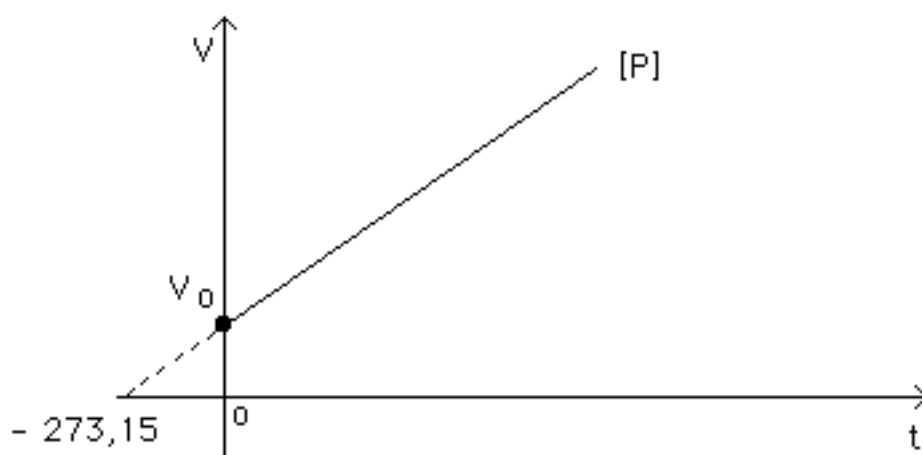
$$V = V_0(1 + \alpha t)$$

$\alpha = \text{coefficiente}$  di dilatazione termica

Dove  $V_0$  è il volume del gas quando  $t = 0^\circ\text{C}$  e dove  $\alpha$  rappresenta la variazione di volume del gas rispetto al volume

unitario  $V_0$  quando la temperatura è aumentata di  $1\text{ }^\circ\text{C}$ . Se come riferimento viene preso  $t_0 = 0\text{ }^\circ\text{C}$  il valore di  $\alpha$  è di  $\frac{1}{273.15}\text{ }^\circ\text{C}^{-1}$  e quindi si può scrivere:

$$V = V_0\left(1 + \frac{t}{273.15}\right)$$



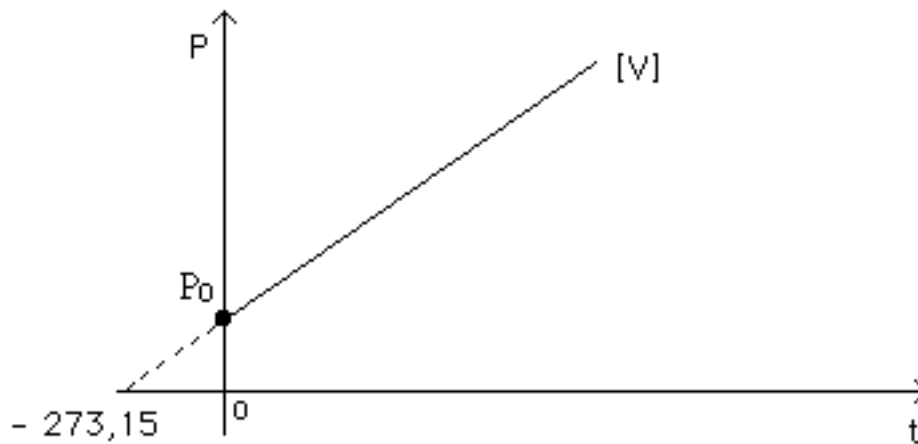
## Legge di Gay - Lussac

A volume costante, la relazione che lega la temperatura e la pressione di un qualunque gas è lineare:

$$P = P_0(1 + \alpha t)$$

Se  $t_0 = 0\text{ }^\circ\text{C}$  allora si ha ancora che  $\alpha = \frac{1}{273.15}\text{ }^\circ\text{C}^{-1}$  e

$$P = P_0\left(1 + \frac{t}{273.15}\right)$$



Estrapolando le due rette  $(V, t)$  e  $(P, t)$  si ottiene il valore di temperatura  $(-273,15)$  alla quale il gas non occupa volume e la sua pressione è nulla.

Questo valore di temperatura viene chiamato zero assoluto che corrisponde a  $-273,15\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Si può perciò utilizzare una scala termometrica che ha come zero proprio lo zero assoluto:

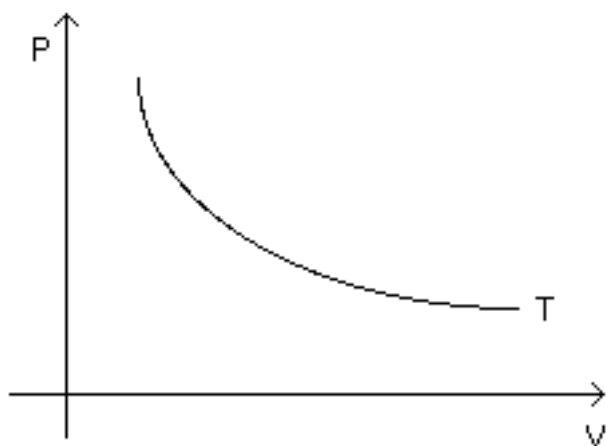
$$T = t + 273,15$$

e viene misurata in Kelvin (K)

## Legge di Boyle

A  $T$  costante tutti i gas, considerati perfetti, seguono la seguente legge:

$$\boxed{P V = \text{costante}}$$

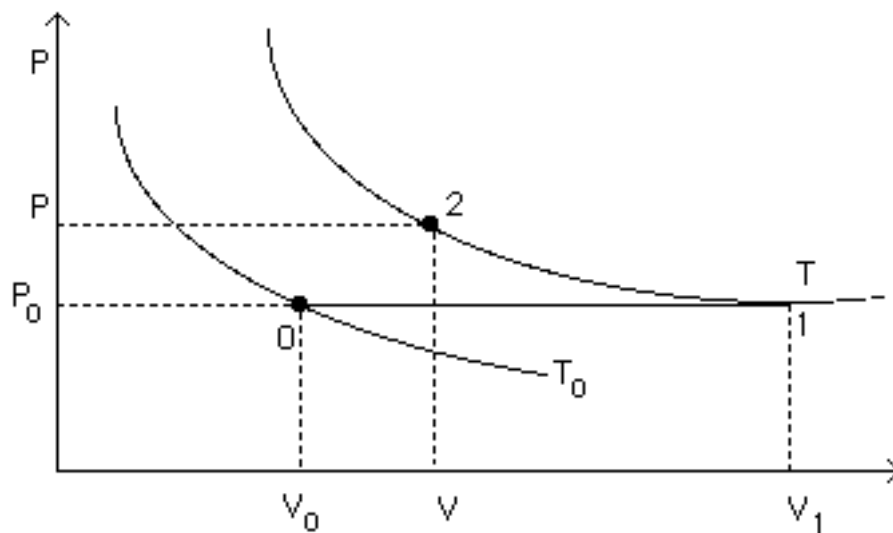


Le leggi sperimentali riportate mettono in relazione solo due variabili termodinamiche mentre una rimane costante. Ora ci proponiamo di trovare una legge che leghi tutte e tre le variabili. Cioé l'equazione di stato del gas perfetto. Si consideri una mole di un gas perfetto alle condizioni normali cioè  $P_0 = 1 \text{ atm}$  e  $t_0 = 0^\circ \text{C}$ .

Per mole si intende un numero di entità pari al numero di Avogadro  $N_A = 6.02 \cdot 10^{23}$ .

Una mole di gas perfetto a condizioni normali occupa un volume  $V_e$  di  $22.414 \text{ l}$ .

Attraverso le trasformazioni che conosciamo, per esempio isobara (legge di Charles) e isoterma (legge di Boyle) portiamo il gas alle condizioni generiche  $P$ ,  $V$  e  $T$ .



tratto 0-1

$$V_1 = V_0 \left( 1 + \frac{t}{273.15} \right) = V_0 \left( \frac{t + 273.15}{273.15} \right) \quad (5.1)$$

$$V_1 = \frac{V_0 T}{273.15} \quad (5.2)$$

tratto 1-2

$$PV = P_0 V_1$$

Introducendo la (5.2)

$$PV = \frac{P_0 V_0}{273.15} T$$

$\frac{P_0 V_0}{273.15}$  = costante il cui valore non dipende dal tipo di gas ma solo dalle unità di misura utilizzate

$$\frac{P_0 V_0}{273.15} = R = 8.31 \frac{J}{mole K} \approx 2 \frac{cal}{mole K} = 0.08206 \frac{l atm}{mole K}$$

$PV = RT$  mentre per  $n$  moli:

$$\boxed{PV = nRT} \quad (5.3)$$

che è proprio la relazione che cercavamo che prende il nome di *legge dei gas perfetti od equazione di stato dei gas perfetti*.

Si può anche scrivere  $n = \frac{N}{N_A}$  e quindi

$$PV = N \left( \frac{R}{N_A} \right) T$$

introducendo la costante  $k = 1.3807 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$  detta *costante di Boltzmann* si ha:

$$\boxed{pV = kNT}$$

quindi per bassi rapporti  $\frac{N}{V}$  si può ricavare  $T$  dalla misura della pressione del gas.

## Unità di misura della pressione

L'unità di misura della pressione si esprime come il rapporto tra una unità di forza e una unità di superficie.

$$P = \frac{F_{\perp}}{A}$$

Nel S. I. si avrà  $N/m^2$  che in onore di B. Pascal è stata chiamata Pascal ( $Pa$ ) quindi:

$$\boxed{1 \frac{N}{m^2} = 1 Pa}$$

La pressione viene talvolta misurata in unità di altezza equivalente di un dato liquido.

Consideriamo una colonna di fluido di altezza  $h$  e sezione  $A$ . Il peso sarà

$$F = mg = \rho Ahg$$



mentre la pressione è

$$P = \frac{F}{A} = \rho gh$$

La più comune unità di questo tipo è il *mm* di Hg detto (torr) definito come: la pressione esercitata da una colonna di mercurio liquido alta *1mm* posta in un campo gravitazionale standard a  $0^{\circ}C$

Quindi essendo  $g = 9.806 \frac{m}{s^2}$  e  $\rho = 13.59 \cdot 10^3 \frac{Kg}{m^3}$  si ha:

$$P = 133.3 \frac{Kg}{ms^2} = 133.3 \frac{N}{m^2} = 133.3 Pa = 1 mmHg$$

Altra unità di misura è l'atmosfera:

$$1 atm = 1.013 \cdot 10^5 Pa = 760 mmHg$$

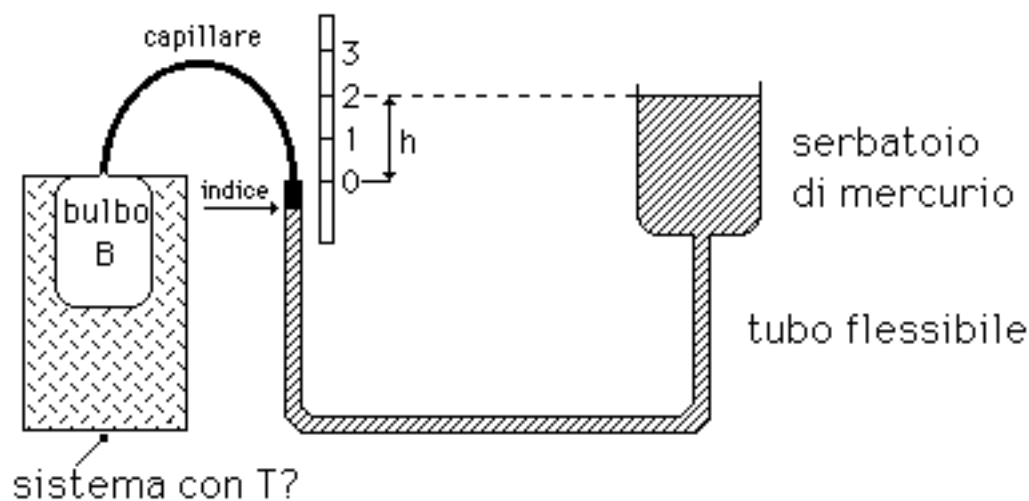
Si ha inoltre:

$$\boxed{10^5 Pa = 1 bar}$$

## Termometri

### Termometro a gas

Uno schema semplificato è il seguente:



Il serbatoio del mercurio viene alzato ed abbassato in modo da mantenere il livello a sinistra nell'indice costante.

La pressione del bulbo è uguale a  $h$  più la pressione atmosferica.

Si misura la differenza di quota  $h$  quando il bulbo è a contatto con il punto triplo dell'acqua e poi con il sistema da misurare, quindi si ha da  $h$  la misura della temperatura:

## Termometro a resistenza

Sono termometri piuttosto precisi. Il più usato è il termometro a resistenza di platino.

Si tratta di un lungo e sottile filo avvolto su un supporto. Si misura la resistenza elettrica del filo. Si usa tra 20 e 1500  $K$ .

Con intervalli di  $T$  non ampi si ha:

$$R = R_0(1 + \alpha T + \beta T^2)$$

## Termometro a liquido in capillare di vetro

E' costituito da un capillare a sezione costante connesso a un serbatoio (bulbo) pieno di liquido.

Poichè:  $T = aL + b$  dove:  $a$  e  $b$  sono costanti nel termometro e  $L =$  lunghezza del liquido nel capillare

Poiché ci sono due costanti si scelgono due  $T$  note:

$$T_1 = aL_1 + b \quad e \quad T_2 = aL_2 + b$$

quindi si ottiene:

$$T = \frac{T_2(L - L_1) + T_1(L_2 - L)}{L_2 - L_1}$$

I termometri di questo tipo più utilizzati sono:

- termometro a mercurio (da  $-38.9^\circ C$  solidificazione Hg a  $+356.6^\circ C$  ebollizione Hg)
- termometro ad alcool etilico (da  $-115^\circ C$  a  $78^\circ C$ )

Questi termometri non sono molto precisi perché la legge di dilatazione non è perfettamente lineare.

## Classificazione delle trasformazioni termodinamiche

Modalità della trasformazione	Denominazione della trasformazione
Differiscono lo stato iniziale da quello finale	Aperta
A volume costante; $V = \text{cost}$	Isocora
A pressione costante; $P = \text{cost}$	Isobara
A temperatura costante; $T = \text{cost}$	Isoterma
Sistema termicamente isolato, cioè delimitato da pareti adiabatiche	Adiabatica
Stato finale = stato iniziale	Ciclica (o chiusa)

## Il calore

Come è ben noto due corpi posti a contatto raggiungono una temperatura intermedia fra quelle di partenza.

Fin al XIX sec. il fenomeno veniva spiegato con una sostanza detta calorico. Oggi sappiamo che il calore è una forma di energia che viene scambiata.

Diciamo che l'interazione termica ha trasferito un'entità fisica misurabile chiamata calore o quantità di calore  $Q$ .

Per definizione si ha:

1. Il calore passa dal corpo più caldo al corpo più freddo.

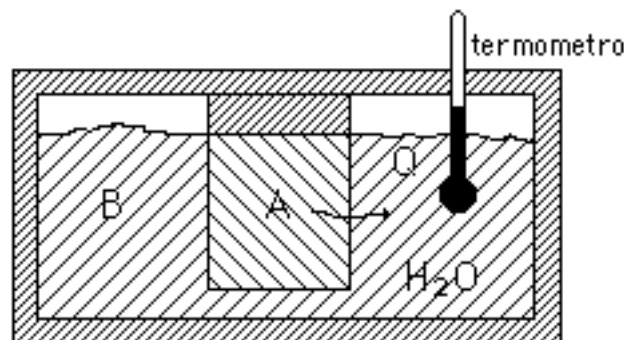
2. L'unità di misura é: caloria (cal) è la quantità di calore per riscaldare 1 g di  $H_2O$  da  $14.5 \rightarrow 15.5^\circ C$  a pressione atmosferica.

$$1 \text{ cal} = 4.186 \text{ J}$$

3. Per  $n$  grammi di  $H_2O$  occorrono  $n$  calorie per la stessa trasformazione termica del 2).

Per misurare il calore si usa il calorimetro.

Uno schema semplificato é:



La quantità di calore non è una funzione di stato. Cioè la quantità di calore scambiata da un sistema non dipende solo dagli stati iniziali e finali ma da tutta la trasformazione.

Le variazioni delle funzioni non di stato si indicano con  $d^*$  oppure  $\delta$  per distinguerle dai differenziali esatti. Si adotta la convenzione:

- $Q > 0$  quando il calore entra nel sistema
- $Q < 0$  quando il calore esce dal sistema

## Capacità termica e calore specifico

Si definisce *capacità termica media* di un sistema durante una trasformazione  $\Lambda$ ,

$$C_{M,\Lambda} = \left( \frac{Q}{T_2 - T_1} \right)_{\Lambda} = \left( \frac{Q}{\Delta T} \right)_{\Lambda}$$

Si definisce *capacità termica istantanea* la quantità di calore ( $\delta Q$ ) che deve entrare nel sistema per variare la sua temperatura di  $dT$ . Si ha

$$C_{\Lambda} = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} C_{M,\Lambda} = \left( \frac{\delta Q}{dT} \right)_{\Lambda}$$

- $C_P = \left( \frac{\delta Q}{dT} \right)_P$   
capacità termica a pressione costante
- $C_V = \left( \frac{\delta Q}{dT} \right)_V$   
capacità termica a volume costante

E' utile definire le capacità termiche per unità di massa che vengono chiamati *calori specifici*: è la quantità di calore che si deve fornire all'unità di massa di una sostanza per aumentare di un grado la sua temperatura

- $c_{M,\Lambda} = \frac{1}{m} C_{M,\Lambda} = \frac{1}{m} \frac{Q}{\Delta T} \left[ \frac{\text{cal}}{\text{gK}} \right]$   
calore specifico medio

- $c_{\Lambda} = \frac{1}{m} C_{\Lambda} = \frac{1}{m} \left( \frac{\delta Q}{dT} \right)_{\Lambda}$   
calore specifico istantaneo

Da quest'ultima si può definire inoltre:

$$\delta Q = mc_{\Lambda}dT \quad Q = m \int_{T_1}^{T_2} c_{\Lambda} dT$$

Questa relazione prende il nome di *Relazione fondamentale della termologia*.

## Sorgenti di calore

Sorgente di calore = termostato, scambia calore senza cambiare la sua temperatura

$$dT = \frac{\delta TQ}{mc} = 0$$

deve essere  $m \rightarrow \infty$

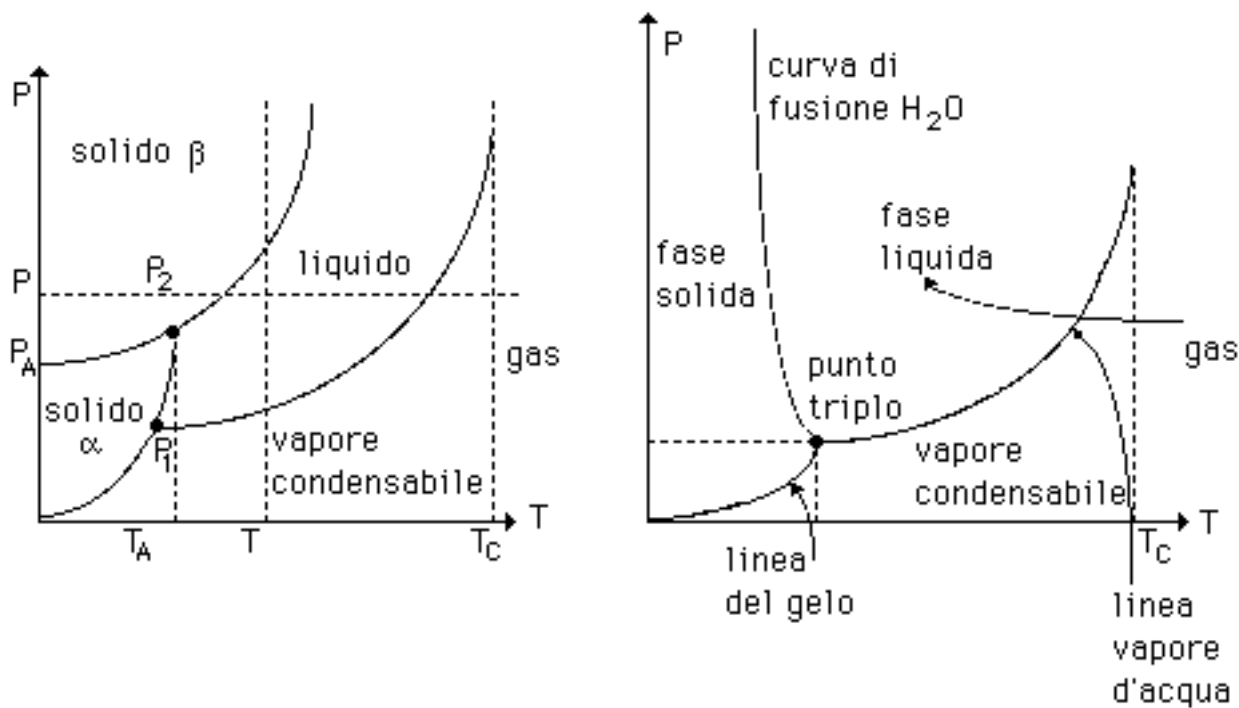
Esempi: oggetti di grande massa

## Transizioni di fase e calori latenti

I materiali si possono presentare a seconda delle variabili di stato in diverse *fasi o stati di aggregazione*

1. Stato solido
2. Stato liquido
3. Stato gassoso

Un modo di rappresentare le fasi è il diagramma  $P - T$



$T_C$  = temperatura critica

Le transizioni di fase richiedono un assorbimento di calore che viene restituito nella trasformazione inversa.

Si definisce calore latente di transizione la quantità di calore, per unità di massa, che deve essere scambiata nella transizione.

Si definisce in particolare:

- a calore latente di sublimazione  
transizione solido  $\rightarrow$  gas
- b calore latente di fusione  
transizione solido  $\rightarrow$  liquido
- c calore latente di solidificazione  
transizione liquido  $\rightarrow$  solido
- d calore latente di vaporizzazione  
transizione liquido  $\rightarrow$  vapore



Esempio:

Acqua: calore latente di fusione  $80 \text{ Kcal/Kg}$  calore latente di vaporizzazione  $540 \text{ Kcal/Kg}$

## Bilanci termici. Equilibri termici

Supponiamo di avere all'interno di un recipiente adiabatico (calorimetro) due corpi (o liquidi) che si trovano inizialmente a temperature diverse.

Nel caso non ci siano transizioni di fase mentre i due corpi si scambiano calore si ha:

calore uscito da  $A$  ( $Q_A$ ) = calore entrato in  $B$  ( $Q_B$ )

$$\boxed{-Q_A = Q_B}$$

$$Q_A = m_A \int_{T_{i,A}}^{T_f} c_A dT \quad Q_B = m_B \int_{T_{i,B}}^{T_f} c_B dT$$

Nel caso  $c_A = \text{costante}$  e  $c_B = \text{costante}$ , si ha :

$$Q_A = m_A c_A (T_f - T_{i,A}) \quad Q_B = m_B c_B (T_f - T_{i,B})$$

e quindi

$$T_f = \frac{T_{i,A} m_A c_A + T_{i,B} m_B c_B}{m_A c_A + m_B c_B}$$

Nel caso che uno dei due corpi subisca una transizione di fase di calore latente  $\lambda$ , tra  $T_i$  ed  $T_f$ , il suo calore assorbito nella transizione sarà:

$$Q = m \int_{T_i}^{T_t} c dT + m\lambda + m \int_{T_t}^{T_f} c' dT$$

dove  $T_t$ =temperatura della transizione,  $c$ =calore specifico prima della transizione,  $c'$ =calore specifico dopo la transizione

## Il Lavoro in termodinamica

Se un sistema esercita una forza sull'ambiente e ha luogo uno spostamento della frontiera il lavoro compiuto dal o sul sistema prende il nome di lavoro esterno.

Esempio: gas in un cilindro che si espande facendo muovere un pistone. Non è compreso nel lavoro esterno:

- a il lavoro compiuto dalle forze interne (lavoro interno)
- b lavoro scambiato con l'esterno che non provoca uno spostamento della frontiera a livello macroscopico

Calcoliamo il lavoro esterno scambiato tra un sistema e l'ambiente nel caso che:  $dF$  =forza *normale* all'elemento di frontiera  $d\sigma$

Si ha:

$$\boxed{dF = p_F d\sigma}$$

dove  $p_F$ = pressione alla frontiera

Si assume, per convenzione, che il lavoro sia

- *positivo*: lavoro compiuto dal sistema termodinamico sull'ambiente
- *negativo*: lavoro compiuto dall'ambiente sul sistema termodinamico

Si ha quando  $d\sigma$  si sposta di  $d\mathbf{l}$ :

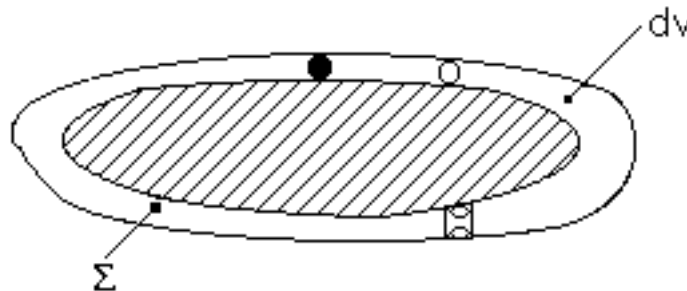
$$\delta L = d\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = p_F d\sigma d\mathbf{l}\cos\theta$$

dove  $\theta$  è l'angolo tra  $d\mathbf{l}$  e la normale uscente da  $d\sigma$

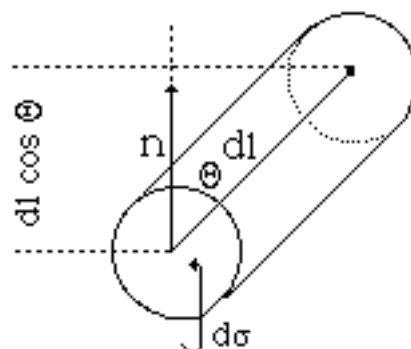
Per ottenere il lavoro totale per uno spostamento infinitesimo di tutta la frontiera si ha:

$$\delta L = \int_{\Sigma} p_F d\sigma d\mathbf{l}\cos\theta$$

Graficamente:



Notiamo che  $d\sigma (d\mathbf{l}\cos\theta)$  è il volume del cilindroide di base  $d\sigma$  e altezza  $d\mathbf{l}\cos\theta$  descritto da  $d\sigma$  nel suo spostamento.



Se  $p_F = \text{costante}$  si ha inoltre

$$\delta L = p_F \int_{\Sigma} d\sigma d\mathbf{l}\cos\theta = p_F dV$$

dove  $dV$  =variazione del volume di tutto il sistema

Se poi  $p_F = p$  si ha:

$$\boxed{\delta L = p dV}$$

Questa relazione vale solo per trasformazioni reversibili in quanto bisogna conoscere il percorso della trasformazione per calcolare il lavoro .

*Il lavoro non è una funzione di stato* e se abbiamo una trasformazione reversibile da A a B il lavoro é:

$$\boxed{L_{A \rightarrow B} = \int_A^B p dV}$$

## Esempio

Calcolo del lavoro in una *trasformazione politropica*. Calcolo del lavoro esterno compiuto da un gas lungo una trasformazione reversibile

$$pV^x = cost$$

dove  $x$  = numero (reale) della trasformazione politropica

$$L_{A \rightarrow B} = \int_A^B p dV = \int_A^B \frac{cost}{V^x} dV$$

Poiché  $p_A V_A^x = p_B V_B^x = cost$  per  $x \neq 1$  si ottiene

$$L_{AB} = \frac{p_B V_B - p_A V_A}{1 - x}$$

mentre per  $x = 1$

$$L_{AB} = p_A V_A \ln \frac{V_B}{V_A}$$

Se siamo nella condizione di *gas ideale*  $pV = nRT$  si ha *curva isoterma* e:

$$L_{AB} = nRT \ln \frac{V_B}{V_A}$$

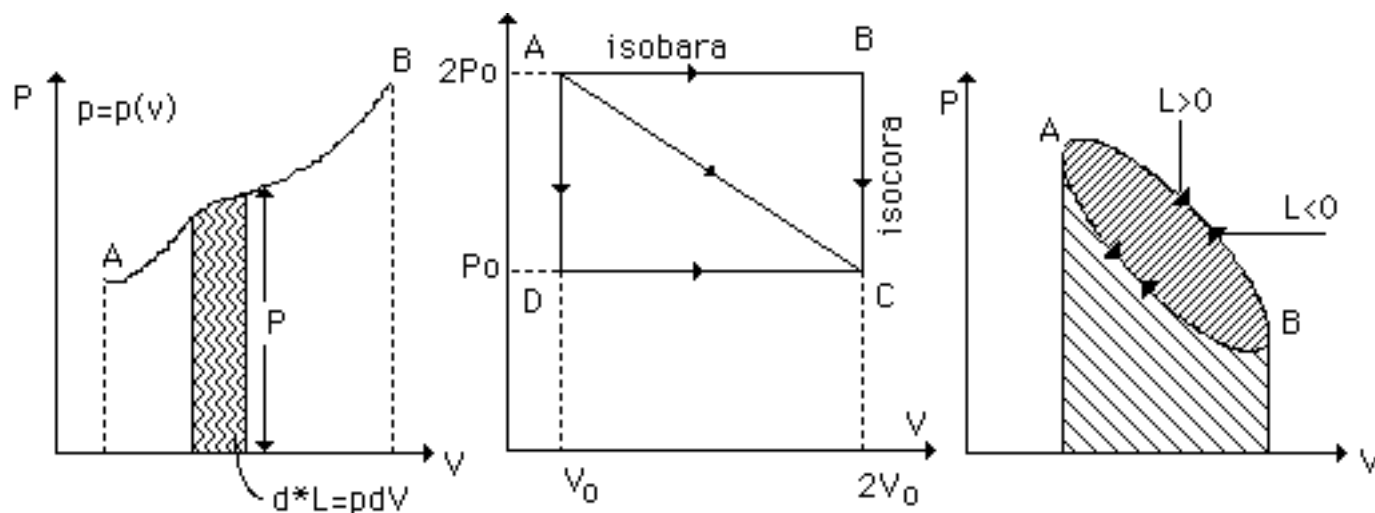
Nel caso  $x = 0$  si ha  $pV^0 = p = \text{cost}$  *curva isobara*

$$L_{AB} = p_A(V_B - V_A)$$

Nel caso  $x \rightarrow \infty$  si ha  $p^{1/x}V = p^0V = V = \text{cost}$  *curva isocora*

$$L_{AB} = 0$$

Una rappresentazione grafica del lavoro è la seguente:



Nella figura centrale

$$L_{ABC} = 2P_0V_0$$

$$L_{ADC} = P_0V_0$$

$$L_{AC} = \frac{3}{2}P_0V_0$$

## Unità di misura del lavoro

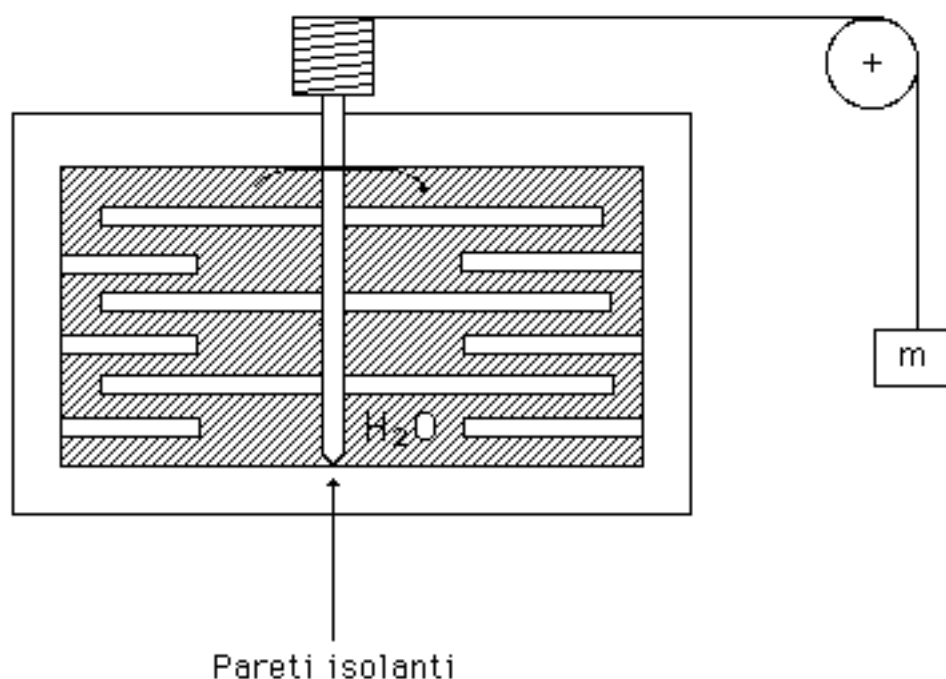
Dalla equazione  $L_{A \rightarrow B} = \int_A^B p dV$  si può definire l'unità litro  $\times$  atmosfera ( $l atm$ ).

Poiché  $1 atm = 1.01 \cdot 10^5 Pa$  e  $1 l = 10^{-3} m^3$  si calcola nel sistema S.I.

$$l atm = 1.01 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3} = 1.01 \cdot 10^2 Nm = 101 Joule$$

## Mulinello di Joule

Descriviamo la seguente esperienza ideata da J.P. Joule



Si dissipa il lavoro meccanico  $L$  durante la discesa facendo aumentare la temperatura.

Si fa tornare il sistema alla temperatura iniziale sottraendo il calore  $Q$  al sistema.

Si osserva che nella trasformazione chiusa effettuata:

$$\boxed{\frac{L}{Q} = J \text{ costante}}$$

Più in generale si osserva che in tutte le trasformazioni chiuse che scambiano solo  $L$  e  $Q$ ,  $J$  è costante.

Si può ad esempio introdurre calore ed estrarre lavoro da un sistema termodinamico e ritornare nello stesso stato termodinamico.

Quindi Lavoro e Calore sono due modi di trasferire energia. Imponendo che il rapporto  $L/Q = 1$  si ottiene

$$\boxed{1 \text{ cal} = 4.186 \text{ Joule}}$$

Esiste anche la caloria termochimica pari a 4,1840 Joule

## **Primo principio della termodinamica (nelle trasformazioni chiuse)**

Nelle trasformazioni chiuse risulta

$$Q = L \quad (5.4)$$

Cioè un sistema può assorbire calore dall'ambiente e trasformarlo integralmente in Lavoro.

In generale si ha:

$$Q = Q_1 - Q_2$$

Dove:

- $Q$  = Calore netto entrato nel sistema

- $Q_1$  = Calore entrato nel sistema
- $Q_2$  = Calore uscito dal sistema

Si definisce il rendimento ( $\eta$ ) come

$$\eta = \frac{L}{Q_1}$$

che si può scrivere come

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} < 1$$

L'uguaglianza (5.4) esprime il 1° principio della termodinamica per trasformazioni chiuse. Questo implica che:

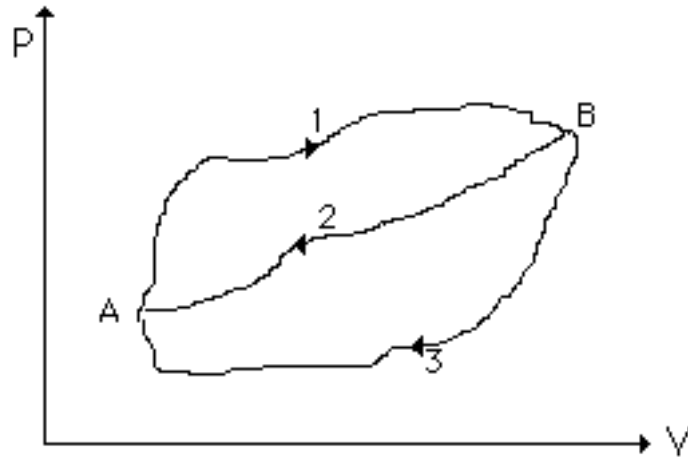
- a non è possibile produrre lavoro senza assorbire calore
- b il rendimento  $\eta$  di una macchina termica è sempre  $< 1$

Il 1° P.T. non è altro che il principio di conservazione dell'energia applicato a un sistema termodinamico.

## Primo principio della termodinamica

Si constata sperimentalmente e si dimostra che la quantità  $(Q - L)$  scambiata da un sistema in una trasformazione  $A \rightarrow B$  non dipende dalla particolare trasformazione ma dagli stati  $A$  e  $B$ .





Dalla (5.4) si ha:

- $(Q - L)_1 + (Q - L)_2 = 0$     trasf.ciclo 1-2
- $(Q - L)_1 + (Q - L)_3 = 0$     trasf.ciclo 1-3

sottraendo si ottiene:

$$(Q - L)_2 - (Q - L)_3 = 0$$

ovvero  $(Q - L)_2 = (Q - L)_3$  cioè la quantità  $(Q - L)$  non dipende dal percorso ma solo dagli estremi  $A$  e  $B$ . Sarà quindi:

$$(Q - L) = U(A, B)$$

Si ha dunque che  $U = U(A, B)$  é una funzione di stato detta *energia interna termodinamica*. Si ha di conseguenza che  $Q - L = \Delta U$  ovvero

$$\boxed{Q = \Delta U + L} \quad (5.5)$$

*1° principio della termodinamica (1° PT)*

dove  $\Delta U = U_B - U_A$

La variazione di energia interna di un sistema è uguale alla differenza tra il calore assorbito (energia termica) e il lavoro esterno (energia meccanica) compiuto dal sistema. Cioè il 1° P.T. non è altro che il principio di conservazione dell'energia esteso ai sistemi termodinamici. In forma differenziale si ha:

$$dU + \delta L = \delta Q$$

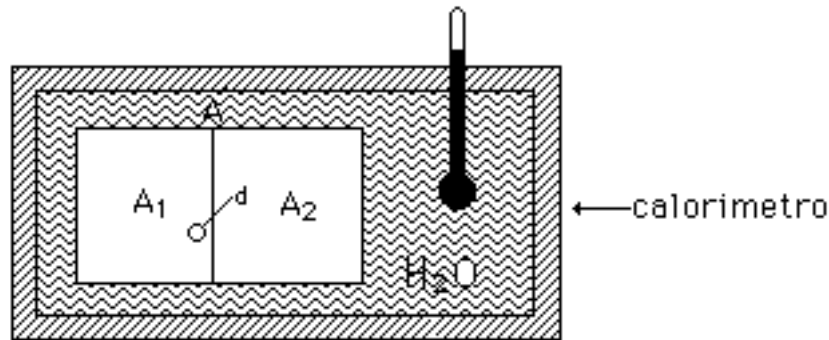
Da notare che  $dU$  può essere espressa in questo modo solo per stati di equilibrio e che  $\delta L$  e  $\delta Q$  dipendono dalla trasformazione. La  $U$  è la somma dell'energia cinetica dovuta ai moti caotici delle particelle del sistema più l'energia potenziale delle forze interne.

## Energia interna di un gas

Per ogni sistema termodinamico caratterizzato dalle variabili  $x$  e  $y$  si ha una definizione univoca dell'energia interna.  $U = U(P, T) = U(V, T)$  Nei gas rarefatti si ha un'equazione matematica molto semplice che vedremo più avanti.

## Espansione libera di un gas perfetto (rarefatto)

Analizziamo l'espansione libera di un gas rarefatto con l'esperimento di Joule.



- Gas in  $A_1$
- Gas espanso tramite  $d$  anche in  $A_2$

Cioè nell'espansione libera se il gas è rarefatto non si osserva trasmissione di calore al calorimetro. L'espansione libera:

- è un processo irreversibile
- il lavoro esterno  $L$  è nullo ( $\delta L = 0$ )
- $\delta Q = 0$  (tramite misura del calorimetro)

Per il 1° P. T. si ha  $\Delta U = 0$  quindi se  $T = cost$  la  $U$  non varia, cioè:

$$U = U(T)$$

### Applicazioni del 1° P.T. ad un gas perfetto

Dal 1° P. T.:  $\delta Q = dU + p dV$

Se poniamo  $dV = 0$  (trasformazione isocora) si ha:

$$(\delta Q)_{V=cost} = dU$$

che possiamo scrivere come (dividendo per  $n dT$ ):

$$c_v = \frac{1}{n} \left( \frac{\delta Q}{dT} \right)_V = \frac{1}{n} \left( \frac{dU}{dT} \right)_V$$

dove  $c_v$  = calore specifico molare

ovvero:

$$\boxed{dU = n c_v dT}$$

Integrando tale espressione con  $c_v = cost$  si ottiene:

$$U = n c_v T + U_0$$

Per i gas monoatomici si ha (se rarefatti):

$$\boxed{c_v = \frac{3}{2} R}$$

Per i gas biatomici si ha (se rarefatti):

$$\boxed{c_v = \frac{5}{2} R}$$

### Relazione di Mayer:

Esprimendo la massa in moli i calori specifici si possono esprimere come calori molari  $c_p$  e  $c_v$ . Li lega la seguente *relazione di Mayer*

$$\boxed{c_p = c_v + R}$$

Dimostrazione: Si ha:

$$c_p = \frac{1}{n} \left( \frac{\delta Q}{dT} \right)_{p=cost} = \frac{1}{n} \left( \frac{dU + p dV}{dT} \right)_p \quad (5.6)$$

poiché  $p dV + V dp = nR dT$ , essendo  $dp = 0$  si ha  $p dV = nR dT$

inoltre  $dU = nc_v dT$

sostituendo nella (5.6) risulta:

$$c_p = \frac{1}{n} \left( \frac{nc_v dT + nR dT}{dT} \right)_p = c_v + R$$

## Gas perfetto

Riassumendo si ha con buona approssimazione per i gas rarefatti:

- $pV = nRT$
- $U = nc_v T$
- $c_v = \frac{3}{2}R$  per i gas monoatomici
- $c_v = \frac{5}{2}R$  per i gas biatomici
- $c_p = c_v + R$

## Trasformazione isoterma reversibile

poiché

$$pV = \text{cost}$$

$$U = nC_v T = \text{cost}$$

Si ha

$$Q = \Delta U + L = L = \int_1^2 p dV = nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

## Trasformazione adiabatica reversibile (Equazioni di Poisson)

Per definizione  $\delta Q = 0$

Le relazioni tra le variabili di stato risultano essere:

- *prima equazione di Poisson:*

$$\boxed{pV^\gamma = \text{cost}}$$

- *seconda equazione di Poisson:*

$$\boxed{TV^{\gamma-1} = \text{cost}}$$

- *terza equazione di Poisson:*

$$\boxed{p^{1-\gamma}T^\gamma = \text{cost}}$$

dove

$$\boxed{\gamma = \frac{c_p}{c_v}}$$

quindi

- $\gamma = \frac{5}{3}R$  per gas monoatomico
- $\gamma = \frac{7}{5}R$  per gas biatomico

## Diagramma delle trasformazioni nel piano di Clapeyron

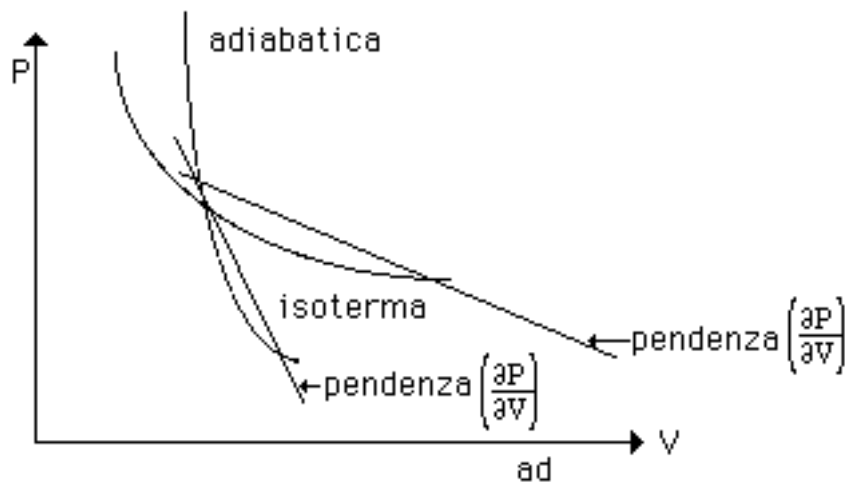
trasformazione isoterma: da  $pV = K$  si ha

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -\frac{K}{V^2} = -\frac{P}{V}$$

trasformazione adiabatica: da  $pV^\gamma = K$  si ha

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{adiab} = -\gamma \frac{K}{V^{\gamma+1}} = -\gamma \frac{P}{V}$$

poiché  $\gamma > 1$  la pendenza della curva adiabatica è maggiore dell'isoterma. Graficamente si ha:



## Calore specifico di una politropica $\Lambda$ di equazione $pV^x = K$

Si ha dalla definizione di calore specifico molare

$$c_\Lambda = \frac{1}{n} \left(\frac{\delta Q}{dT}\right)$$

Nel caso di gas perfetto e di trasformazione reversibile si trova che:

$$c_\Lambda = c_v + \frac{R}{1-x}$$

che riassume i seguenti casi:

- $x = 1$  (isoterma)

$$c_\Lambda = \infty$$

- $x = 0$  (isobara)

$$c_\Lambda = c_p = c_v + R$$

- $x = \pm\infty$  (isocora)

$$c_\Lambda = c_v$$

- $x = \frac{c_p}{c_v} = \gamma$  (adiabatica)

$$c_\Lambda = c_v + \frac{R}{1 - \frac{c_v + R}{c_v}} = 0$$

## Entropia del gas perfetto

Si discuterà ampiamente più avanti che l'entropia  $S$  è una funzione di stato. La sua definizione è:

$$dS = \frac{\delta Q_{rev}}{T} \Rightarrow \Delta S = S_B - S_A = \int_A^B \frac{\delta Q_{rev}}{T}$$

dove  $\delta Q$  è la quantità infinitesima di calore scambiata dal sistema durante la trasformazione reversibile.

Integrando nel caso di gas perfetto si trova che:

$$S = nc_v \ln \frac{pV^\gamma}{p_0V_0^\gamma} + S_0 = nR \ln \frac{V}{V_0} + nc_v \ln \frac{T}{T_0} + S_0$$

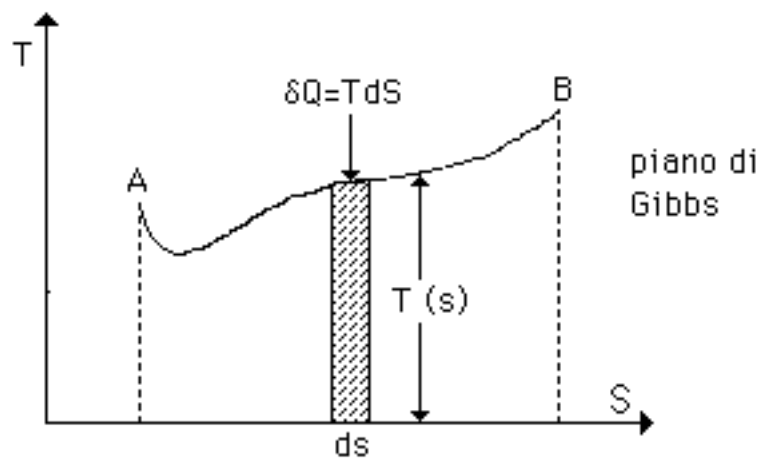
dove  $p_0$  e  $V_0$  sono i valori di uno stato termodinamico arbitrariamente scelto ed  $S_0$  è il valore dell'entropia scelto arbitrariamente per questo stato.

Le conseguenze della relazione di  $S$  sono:



- per una trasformazione adiabatica reversibile e con  $pV^\gamma = \text{cost}$  si ha  $S = \text{cost}$
- l'entropia risulta una variabile estensiva coniugata alla temperatura, in una trasformazione reversibile poiché  $\delta Q_{rev} = T dS$

Nel piano  $TS$  (piano di Gibbs) si ha:



Cioè il calore scambiato in una trasformazione reversibile da uno stato  $A$  ad uno stato  $B$  é:

$$Q_{rev} = \int_A^B T dS$$

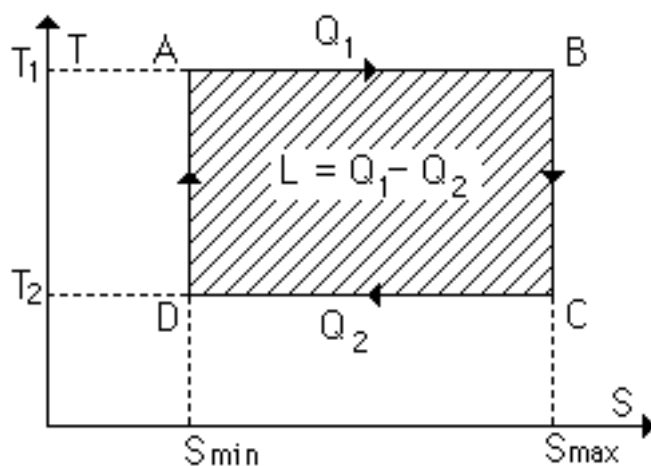
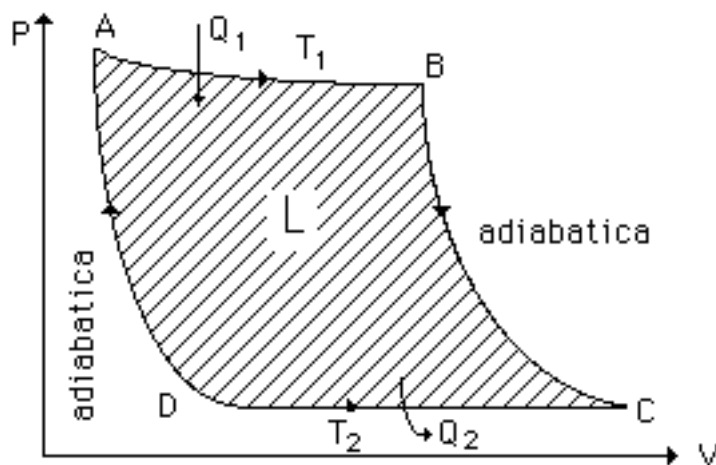
risulta quindi coincidente con l'area sottesa dalla curva  $A \rightarrow B$ .

## Ciclo di Carnot per un gas perfetto

Si tratta di un ciclo reversibile (trasformazione chiusa) limitata da due isoterme e da due adiabatiche. Si suppone di avere:

- trasformazioni reversibili

- gas ideale



Nel ciclo

$$L = Q_1 - Q_2 = T_1 \Delta S_1 - T_2 \Delta S_2 = (T_1 - T_2) \Delta S_1 = (T_1 - T_2)(S_2 - S_1)$$

Calcoliamo il rendimento del ciclo di Carnot

$$\eta = \frac{L}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 \Delta S - T_2 \Delta S}{T_1 \Delta S} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

In realtà vedremo che questa espressione è valida anche per gas non perfetto. Il rendimento  $\eta$  dipende solo dalle temperature

delle isoterme ed è indipendente dalle sostanze e dalle aree delle trasformazioni. Vedremo che il ciclo di Carnot è quello dotato del massimo rendimento tra tutti quelli operanti tra  $T_1$  e  $T_2$ .

## Macchine termiche

Tutto il lavoro può essere convertito in calore

Esempio: si sfregano due pietre sott'acqua e si ottiene una completa trasformazione di lavoro in calore ( $L = Q$ ) ed il rendimento sarà del 100%

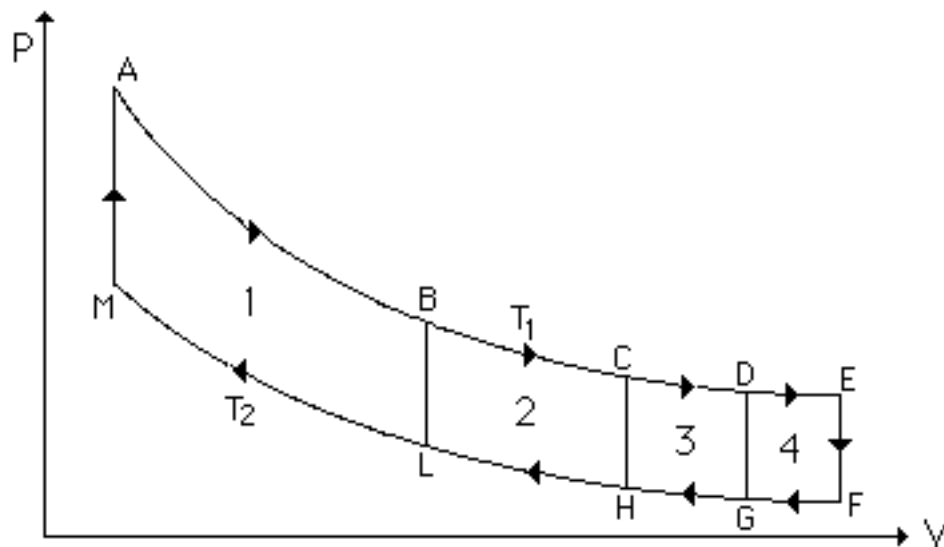
La trasformazione del calore in lavoro si può fare con:

- *trasformazioni non cicliche*

Esempio: Espansione isoterma di un gas, con  $\Delta U = 0$  e  $Q = L$  ma  $p$  diminuisce e la trasformazione finisce.

- *trasformazione cicliche*

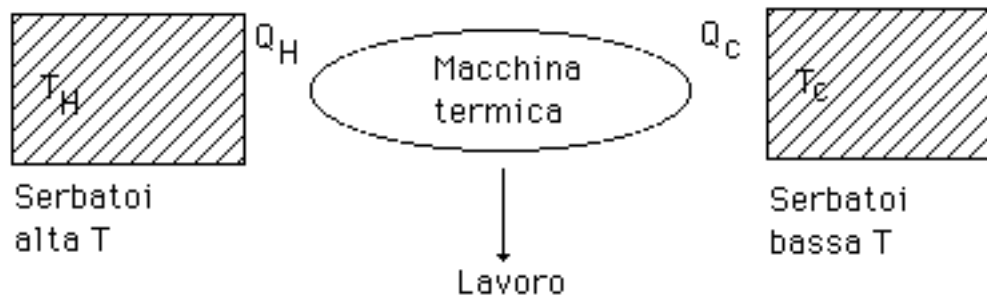
Il sistema viene riportato allo stato iniziale. Il dispositivo che fa compiere al sistema la trasformazione ciclica si chiama macchina termica o motore termico. Cioè il sistema è la sostanza che lavora e la macchina lavora su un ciclo. Essa compie lavoro verso l'esterno eseguendo sempre lo stesso ciclo.



$$\eta_{ABLM} = \eta_{ACHM} = \eta_{ACDGM} = \eta_{AEFM}$$

perché si tratta di cicli di Carnot che operano tra le stesse isoterme

Lo schema di principio di una macchina termica é:



si ha  $L = Q_H - Q_C$  dove  $L$  = lavoro netto eseguito dalla macchina per ogni ciclo

Il rendimento é:

$$\eta = \frac{L_{netto}}{Q_H} = \frac{Q_H - Q_C}{Q_H} = 1 - \frac{Q_C}{Q_H}$$

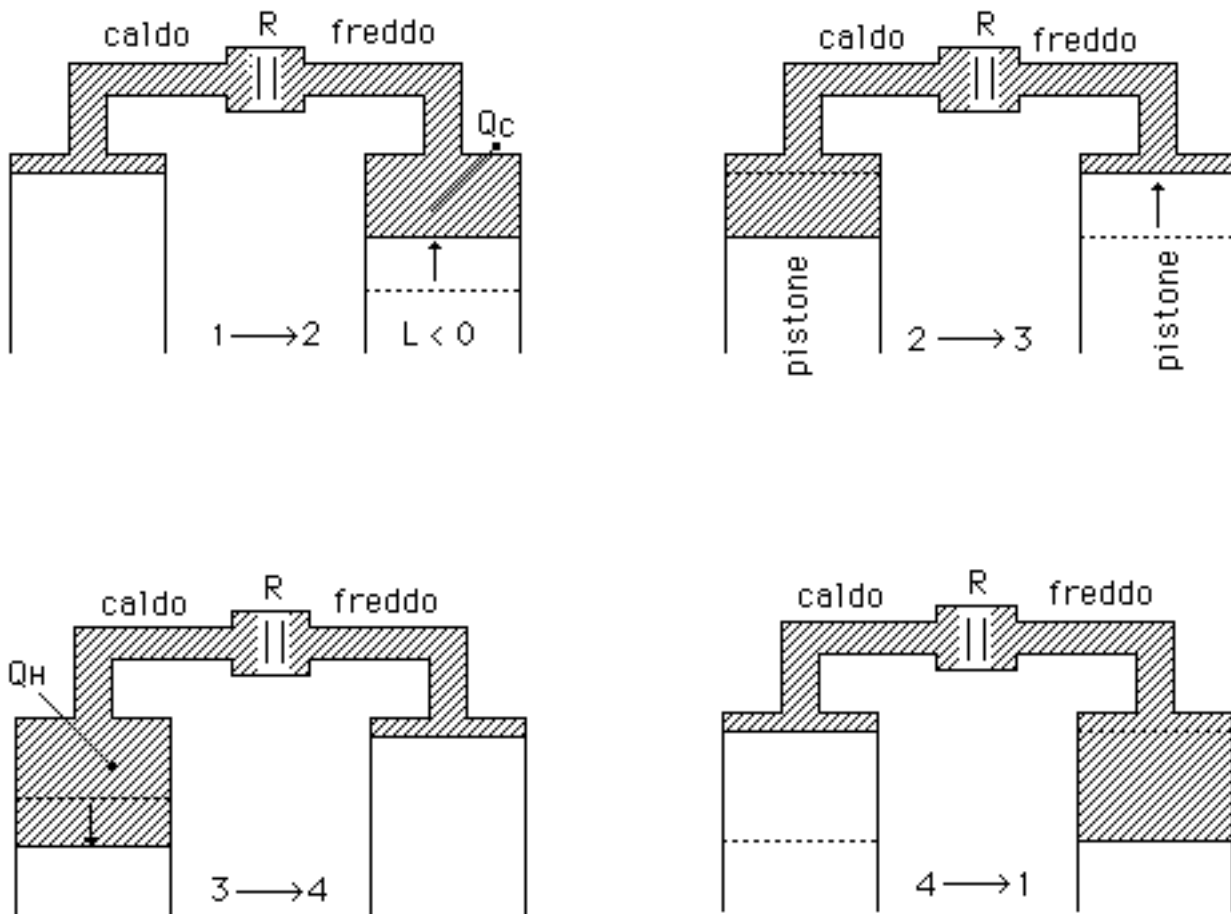
per avere  $\eta = 1$  (efficienza 100%) occorre che  $Q_C = 0$  che risulta impossibile per il 2° P. T. come vedremo in seguito.

Tipi di macchine termiche:

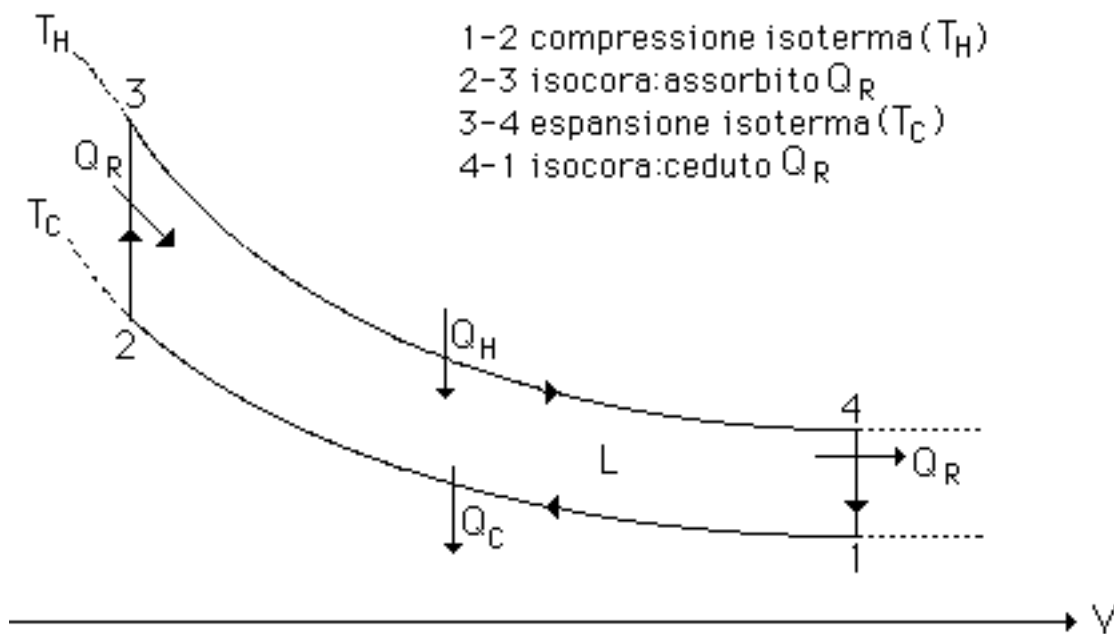
- macchine a combustione esterna
  - macchina di Stirling
  - macchina a vapore
  
- macchine a combustione interna
  - motore a benzina (ciclo Otto)
  - motore Diesel (ciclo Diesel)

## Macchina di Stirling

Nel 1816 Stirling progettò una macchina che bruciando benzina eseguiva del lavoro. Il ciclo è costituito da 4 fasi:



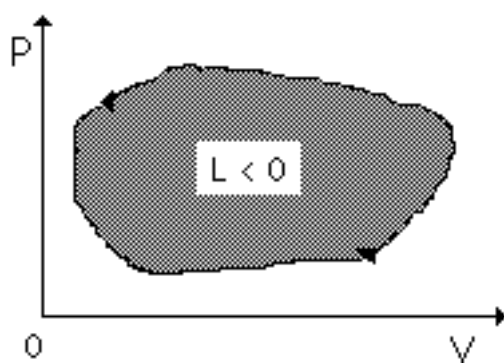
dove  $R$  =rigeneratore. E' di bassa conducibilità termica



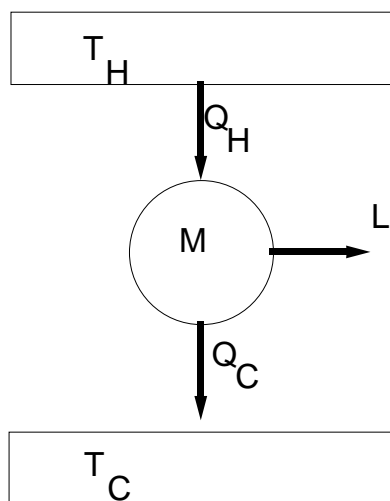
Si ha  $L = Q_H - Q_C > 0$

## Macchine frigorifere

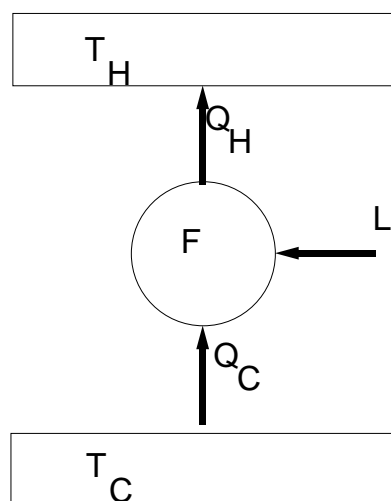
Oltre alle macchine termiche, che trasformano calore in lavoro, esistono anche le macchine frigorifere. Queste ultime hanno lo scopo di raffreddare un corpo. In pratica una macchina termica fatta funzionare, nel piano di Clapeyron, in senso antiorario risulta essere una macchina frigorifera. Cioé si ha:



Una macchina termica può essere schematizzata:



L'obiettivo è il lavoro che produce mentre il costo è  $Q_H$  è quindi naturale definire il rendimento  $\eta = \frac{L}{Q_H}$ . Invece un frigorifero può essere schematizzato nel seguente modo:



l'obiettivo è prelevare  $Q_C$  dall'ambiente (l'interno del frigorifero) il calore a bassa temperatura mentre il costo è  $L$  (energia elettrica consumata) quindi si deve definire il coefficiente di prestazione  $f$  (fattore di qualità):

$$f = \frac{Q_C}{L} = \frac{Q_C}{Q_H - Q_C}$$

Il fattore di qualità può risultare maggiore di 1. Non è opportuno chiamarlo rendimento frigorifero.

La relazione tra il rendimento ed il fattore di qualità risulta:

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

quindi  $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{1}{1-\eta}$   
ma poiché

$$f = \frac{Q_2}{L} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} = \frac{1 - \eta}{\eta}$$

si ottiene:

$$\eta = \frac{1}{1 + f}$$



Dalla relazione  $\eta = \frac{1}{1+f}$  o quella inversa  $f = \frac{1-\eta}{\eta}$  si può concludere che un ciclo termico che abbia un alto rendimento, funzionando come frigorifero ha un fattore di qualità molto basso.

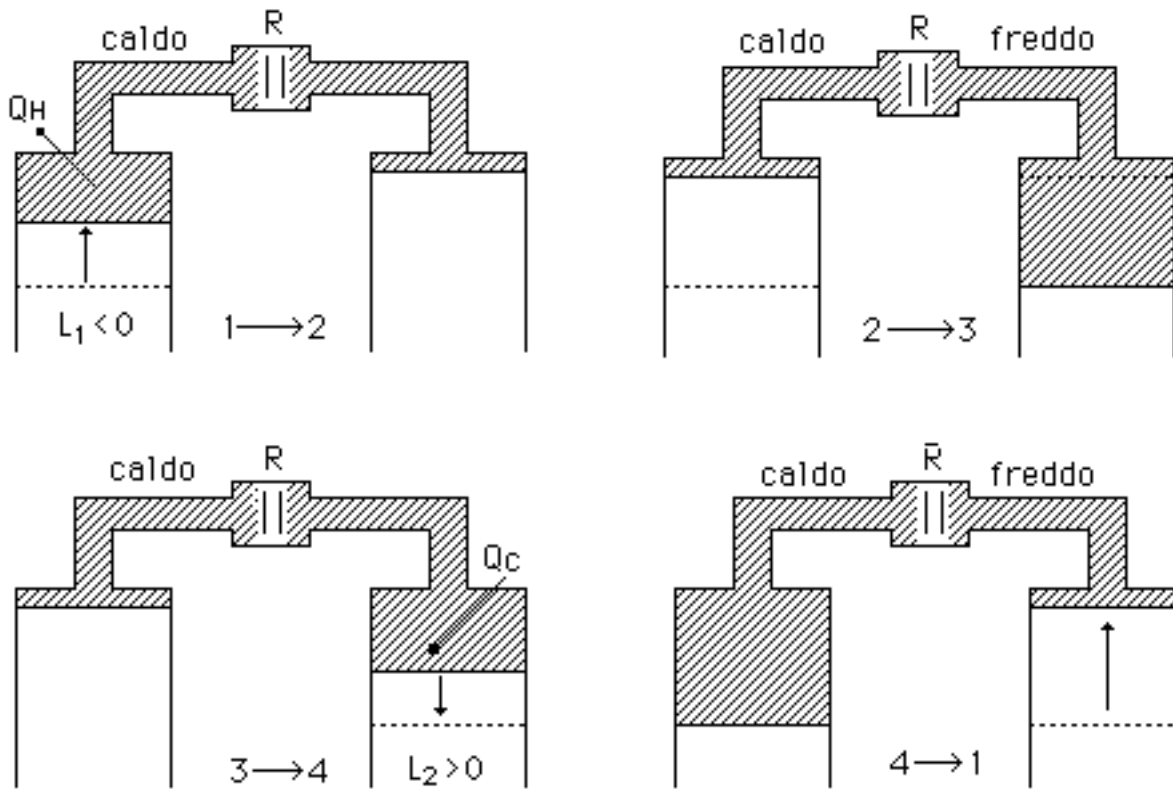
In pratica vorrebbe dire che il ciclo di Carnot funzionante da macchina termica va bene mentre funzionante da frigorifero sarebbe da scartare. E' chiaro che queste conclusioni non possono essere accettate. Infatti anche se altri cicli danno un  $f$  più alto, non garantiscono a differenza del ciclo di Carnot una temperatura veramente bassa e costante e quindi solo con il ciclo di Carnot siamo sicuri di aver all'interno del frigorifero quella determinata temperatura.

## Il frigorifero di Stirling

Supponiamo di percorrere in senso inverso il ciclo della macchina di Stirling. Si avrà l'assorbimento di calore a bassa temperatura e la cessione di una quantità di calore più grande ad alta  $T$  e l'esecuzione di lavoro sul sistema.

Questo dispositivo si chiama frigorifero o macchina frigorifera mentre la sostanza si chiama refrigerante

Analizziamo come esempio il frigorifero di Stirling.

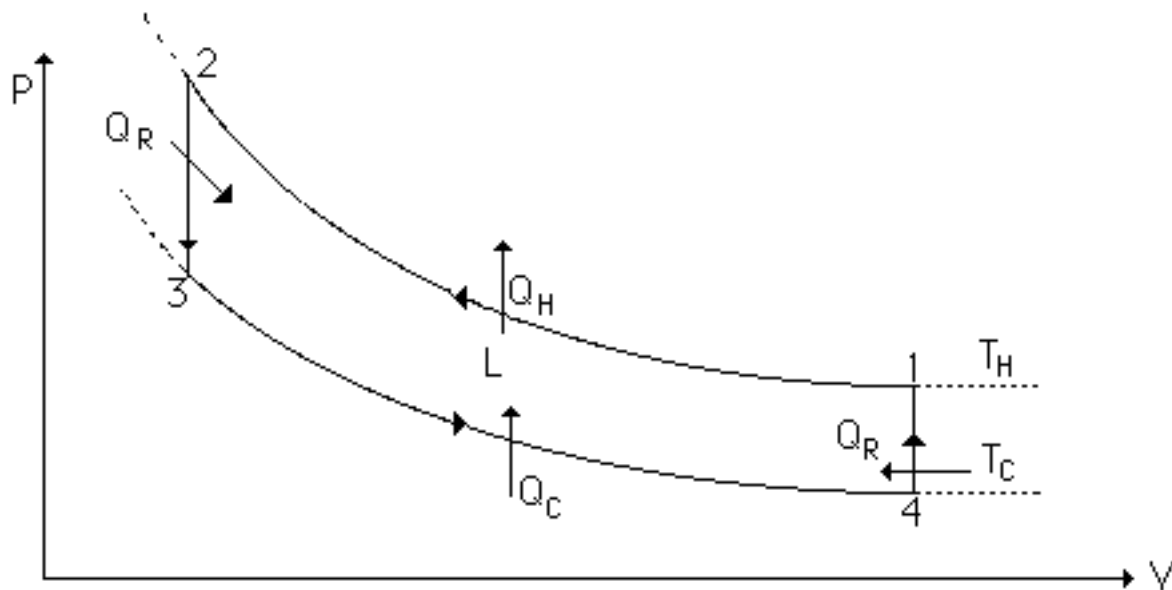


- $1 \rightarrow 2$  compressione isoterma a  $T_H$ ,  $Q_H$  ceduto a  $T_H$
- $2 \rightarrow 3$  isocora, ceduto  $Q_R$
- $3 \rightarrow 4$  espansione isoterma a  $T_C$ ,  $Q_C$  assorbito a  $T_C$
- $4 \rightarrow 1$  isocora, assorbito  $Q_R$

Risultato:  $Q_C$  assorbito a  $T_C$ ,  $Q_H$  ceduto a  $T_H$ ,  $L = Q_C - Q_H < 0$

Viene trasferito calore dal serbatoio più freddo a quello più caldo con l'impiego di lavoro meccanico.

Il diagramma  $p - V$  é:



## Secondo principio della termodinamica

Si verifica che non è possibile convertire completamente in lavoro il calore assorbito da un solo serbatoio; sempre una certa quantità di calore viene ceduta a un serbatoio a temperatura più bassa. Si ha l'*enunciato di Kelvin-Planck* del secondo principio:

E' impossibile realizzare una trasformazione termodinamica il cui unico risultato sia quello di assorbire calore da un serbatoio caldo e convertirlo completamente in lavoro.

Se non fosse vero si potrebbe, ad esempio, far muovere una nave estraendo calore dall'oceano senza violare il 1° P. T. Infatti il 1° P. T. non vieta di trasformare completamente il calore in lavoro.

Il 1° P. T. nega la possibilità di creare o distruggere energia.

Il 2° P. T. nega la possibilità di impiegare l'energia in certi modi.

Il moto perpetuo di prima specie, cioè il funzionamento continuo di una macchina che crea energia, non è possibile per il 1° P. T.

Mentre il moto perpetuo di seconda specie, cioè il funzionamento di una macchina che scambia calore con un unico serbatoio, non è possibile per il 2° P. T.

Le macchine termiche hanno sempre bisogno per funzionare di scambiare calore almeno con due sorgenti a diversa temperatura.

Si preleva  $Q_1$  alla  $T$  maggiore, se ne trasforma una parte in lavoro e si cede il resto  $Q_2$  alla  $T$  minore. Si ha:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

Si ha l'*enunciato Clausius* del 2° P.T.:

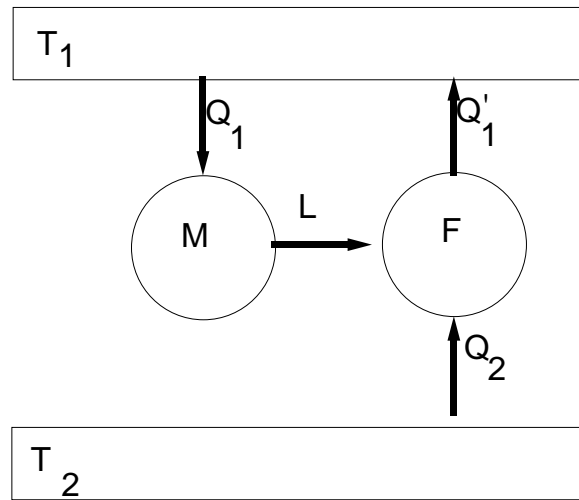
E' impossibile realizzare una trasformazione il cui unico risultato sia quello di far passare calore da un corpo freddo ad uno caldo.

L'enunciato di Clausius affronta in maniera diretta il problema dell'irreversibilità come legge di natura.

Non è mai stato osservato, ad esempio, che un cubetto in un bicchiere d'acqua aumenti di massa scaldando l'acqua rimasta (reazione possibile per il 1° P. T.).

I due enunciati sono equivalenti poiché la violazione dell'uno implica la violazione dell'altro.

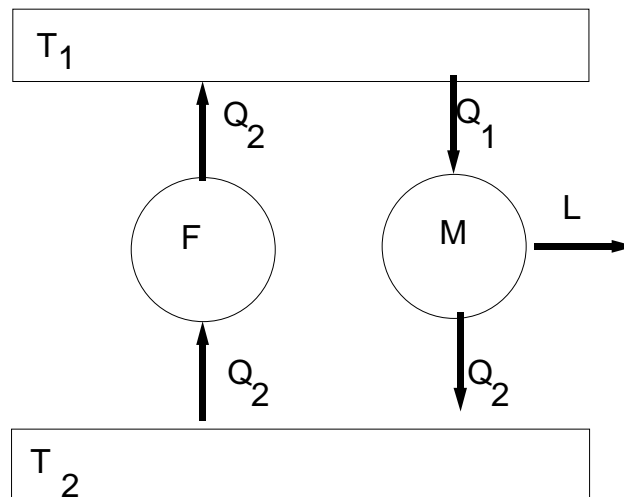
- Falso Kelvin  $\rightarrow$  falso Clausius



Si ha  $L = Q_1$  e  $Q'_1 = L + Q_2$

- $T_1$  assorbe complessivamente  $Q_2$
- $T_2$  cede  $Q_2$

- Falso Clausius  $\rightarrow$  falso Kelvin



Si ha  $L = Q_1 - Q_2$   
 $T_2$  non ha scambi di calore

Infatti se fosse possibile trasformare  $Q \rightarrow L$  da una sorgente  $T$  (violando l'enunciato di Kelvin) con l'attrito prodotto da

$L$  si potrebbe dare  $Q$  a una sorgente  $T' > T$  violando però Clausius.

Viceversa se non fosse verificato Clausius si potrebbe da una macchina termica riportare il calore data alla sorgente a bassa  $T$  e riportarlo alla  $T_H$  ottenendo una completa trasformazione  $Q \rightarrow L$  cioè violando Kelvin.

## Reversibilità e irreversibilità

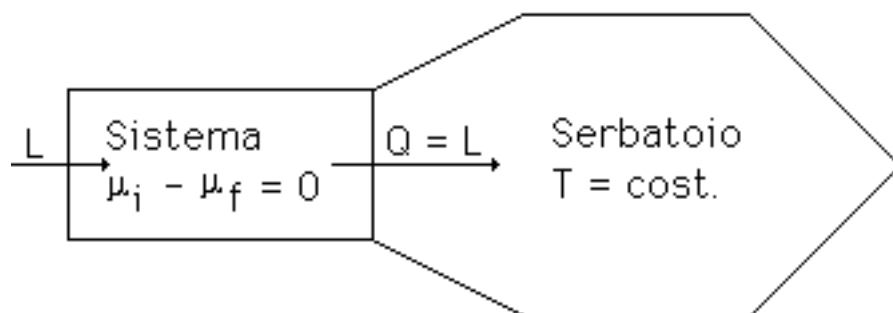
Una trasformazione reversibile è una trasformazione che si svolge in modo tale che, alla fine, sia il sistema che l'ambiente circostante possono essere riportati nei rispettivi stati iniziali.

Esempio: Il sistema passa da  $i \rightarrow f$ . Un oggetto sospeso si abbassa ( $L$ ), il calore  $Q$  viene trasmesso al sistema. La trasformazione è reversibile se  $f \rightarrow i$  con l'oggetto di nuovo al suo posto ed il calore  $Q$  dato dal sistema ai serbatoi.

Come sono le trasformazioni naturali? Vedremo che sono sempre irreversibili.

Alcuni esempi: Irreversibilità meccanica esterna:

Si ha una trasformazione isoterma di lavoro in energia interna di un serbatoio tramite un sistema il cui stato non cambia. Es: fornetto elettrico in un serbatoio.



Per il II° P. T. non è possibile riportare interamente il calore nel sistema e convertirlo in  $L$ . La trasformazione iniziale di  $L$  in  $Q$  è avvenuta a causa degli effetti dissipativi (attriti, resistenza elettrica,...)

## Irreversibilità meccanica interna

Si ha una trasformazione dell'energia interna di un sistema in energia meccanica e quindi di nuovo in energia interna; Esempio: Espansione nel vuoto di un gas ideale (espansione libera).

Si ha  $V_i \rightarrow V_f$  alla temperatura  $T$ .

Si riporta  $V_f \rightarrow V_i$  con il lavoro  $L$  ed il calore  $Q$  passa al serbatoio.

Per tornare allo stato iniziale occorrerebbe convertire completamente  $Q \rightarrow L$ . Impossibile per il II° P. T.

Irreversibilità termica:  $Q$  da  $T_1$  a  $T_2$  con  $T_1 > T_2$

Irreversibilità chimica: formazione di specie chimica

Si conclude che tutti i processi naturali sono irreversibili poiché sono presenti effetti dissipativi.

Le condizioni per la reversibilità sono:

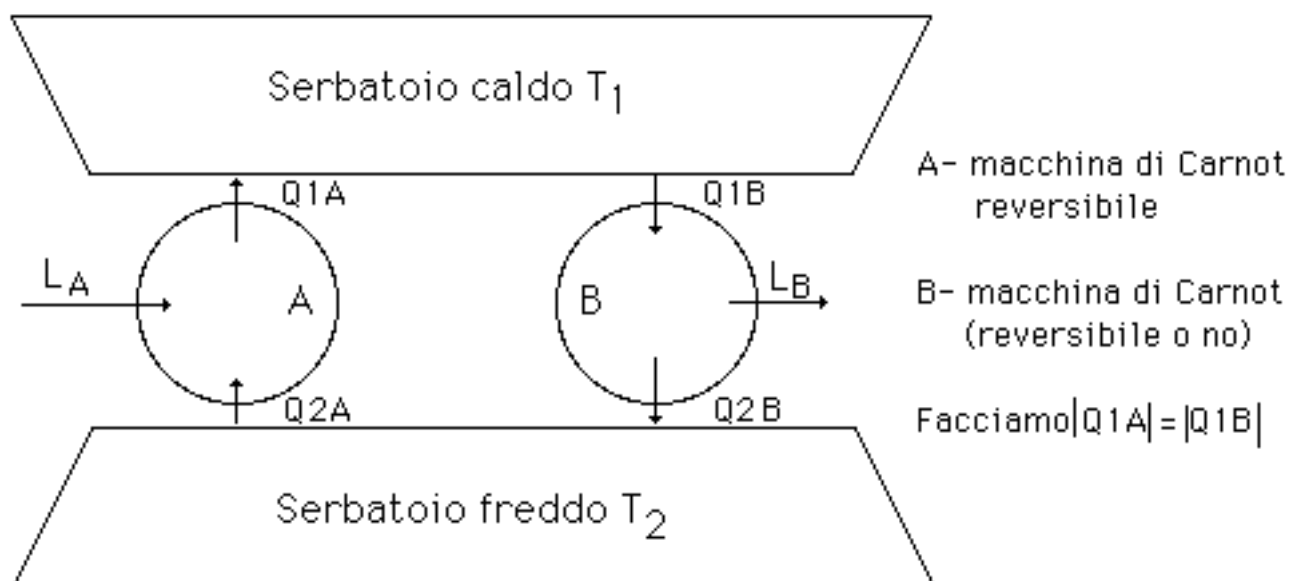
- Trasformazioni quasi statiche
- Assenza di effetti dissipativi

## Il Teorema di Carnot

Il postulato di Kelvin-Planck impedisce che le macchine termiche abbiano rendimento unitario. Il teorema di Carnot afferma:

1. tutti i cicli di Carnot operanti tra le stesse temperature estreme hanno lo stesso rendimento indipendentemente:
  - dalle caratteristiche della macchina
  - dal fluido che compie il ciclo
2. qualsiasi ciclo, reversibile o no, ha rendimento non superiore al ciclo di Carnot tra le stesse due temperature estreme del ciclo in questione ( $T_1$  e  $T_2$ ).

Dimostriamo 1)



dove



- $A$  = macchina di Carnot reversibile
- $B$  = macchina qualsiasi(reversibile o no)

Si fa si che  $|Q_{1,A}| = |Q_{1,B}|$  e si ottiene:

$$L_{totale} = L_B - L_A = \eta_B Q_{1,B} - \eta_A Q_{1,A} = Q_{1,A}(\eta_B - \eta_A)$$

Per il II° P. T. si ha che deve essere  $L_T \leq 0$  quindi  $\eta_B \leq \eta_A$ .  
 Se:  $B$  è reversibile si possono scambiare i ruoli e quindi:

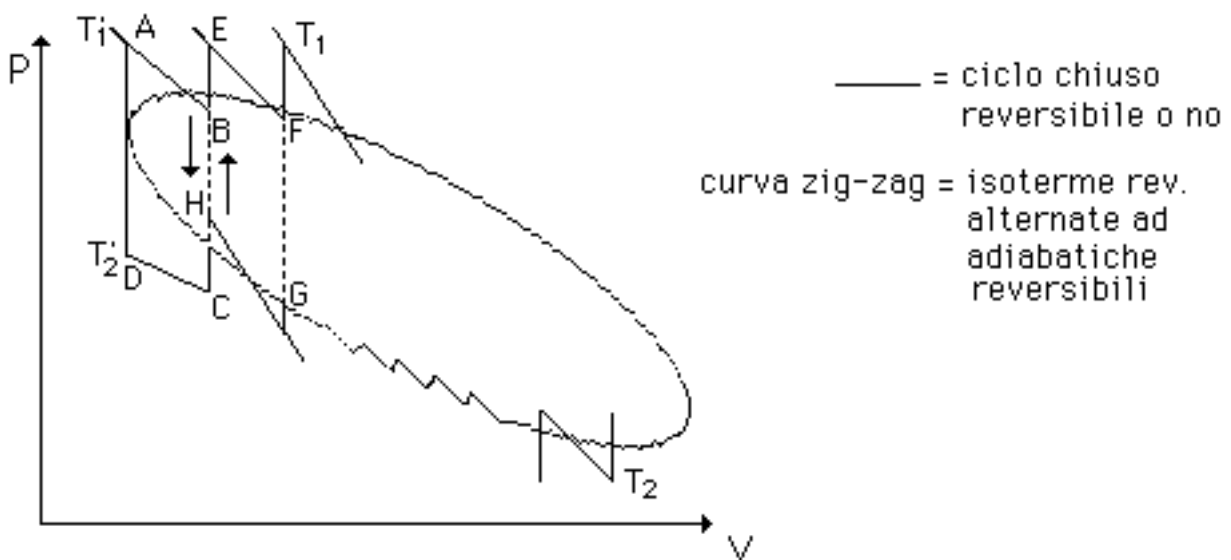
$$\eta_B = \eta_A$$

$\eta$  è stato calcolato precedentemente nel caso ideale che ora vale in generale

$$\eta_{Carnot} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

Dimostriamo 2):

Un ciclo qualsiasi si può approssimare con una serie di cicli di Carnot fra  $T'_1 < T_1$  ed  $T'_2 > T_2$  .



I rendimenti dei cicli di Carnot sono:

$$\eta'_{Carnot} = 1 - \frac{T'_2}{T'_1} \leq 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

L'intero ciclo ha rendimento globale inferiore a quello di una macchina di Carnot operante solo tra le temperature estreme  $T_1$  e  $T_2$

## Temperatura termodinamica assoluta

Il rendimento di un ciclo di Carnot reversibile dipende solo dalle temperature dei termostati. Questa proprietà viene sfruttata per definire la scala di temperatura assoluta.

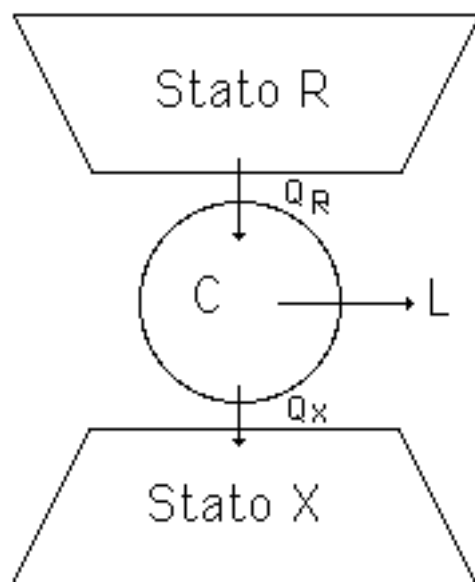
Supponiamo di caratterizzare la temperatura dello stato  $x$  con il valore numerico  $\Theta(x)$  nel seguente modo:

si fissa un ciclo di Carnot tra lo stato  $x$  e lo stato di riferimento  $R$ . Il rendimento é:

$$\eta_C(R, x) = 1 - \frac{Q_x}{Q_R}$$

ovvero

$$\frac{Q_x}{Q_R} = 1 - \eta_C(R, x)$$



Si assume che  $\Theta(x)$  sia il valore di una funzione monotona di  $\eta_C(R, x)$  o  $\frac{Q_x}{Q_R}$ . Cioè:

$$\frac{Q_x}{Q_R} = \frac{\Theta_x}{\Theta_R}$$

Si assume  $R$  come punto triplo dell'acqua con il risultato

$$\Theta_x = 273.16 \frac{Q_x}{Q_R} = 273.16 (1 - \eta_C(R, x))$$

definita temperatura termodinamica assoluta

La misura della temperatura si riduce alla misura dei calori scambiati in un ciclo di Carnot reversibile fra  $R$  e  $X$ .

Quindi la misura di una temperatura si trasforma in una misura di calori scambiati.

Tanto più  $Q_x$  è più piccolo tanto  $\Theta_x$  è piccola.

Il valore minore di  $Q_x$  è zero la  $\Theta_x$  (temperatura) è lo *zero assoluto*.

Si userà il simbolo  $T$  per indicare la temperatura assoluta e si misurerà con il grado kelvin ( $K$ ).

Altra definizione di zero assoluto:

*Lo zero assoluto è la temperatura alla quale una trasformazione reversibile isotermica è anche adiabatica*

## Teorema o disuguaglianza di Clausius

Per un ciclo di Carnot reversibile si ha:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{Q_2}{Q_1}$$

quando si esprimono  $Q$  come valori assoluti con le convenzioni dei segni si ha:

$$\frac{T_2}{T_1} = -\frac{Q_2}{Q_1} \Rightarrow \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

Ricordando che un qualsiasi ciclo reversibile è approssimabile ad una successione di  $N$  cicli di Carnot ed è identico a  $\infty$  cicli di Carnot.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \left( \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \right) = \oint_{REV} \frac{\delta Q}{T} = 0$$

Nel caso si abbia un ciclo irreversibile si dimostra che si ha:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} < 0$$

nel caso più generale di un qualsiasi ciclo reversibile o irreversibile si può scrivere:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$$

questa espressione costituisce il teorema di Clausius dove il segno di uguaglianza vale per i cicli reversibili e il segno minore vale per i cicli irreversibili.

Il *teorema di Clausius* si può enunciare nel seguente modo: In un ciclo termodinamico reversibile (o irreversibile) la somma dei rapporti tra le quantità di calore infinitesime ( $dQ$ ) scambiate dal sistema durante il ciclo con le sorgenti a temperatura  $T$  e le temperature stesse è nulla (o negativa).

Nel caso di un numero finito di sorgenti si può scrivere

$$\sum_{i=0}^n \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$$

Questa disuguaglianza denominata *disuguaglianza di Clausius* indica che: In un ciclo termodinamico reversibile (od irreversibile) la somma dei rapporti tra  $\delta Q$  e le temperature  $T$  è nulla (o negativa).

La disuguaglianza di Clausius si può applicare per determinare se una trasformazione è reversibile o no.

Esempio: una sostanza alla temperatura  $T_1$  trasmette calore ad una sostanza  $T_2$  ( $T_2 < T_1$ ) ed entrambe sono dentro ad un contenitore adiabatermano. Per il primo corpo è  $-Q/T_2$  mentre per il secondo è  $Q/T_1$ . la somma è

$$\frac{-Q}{T_2} + \frac{Q}{T_1} = -Q \left( \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) < 0$$

quindi il passaggio di calore tra due corpi è un processo irreversibile.

## è possibile ogni ciclo?

Per determinare se un ciclo termodinamico è realizzabile bisogna confrontare il suo rendimento con un ciclo di Carnot operante tra le due temperature estreme ma anche verificare la disuguaglianza di Clausius:

Esempio: un ciclo ha  $Q_1 = 600 J$ ,  $Q_2 = -450 J$ ,  $Q_3 = 200 J$  e  $T_1 = 600 K$ ,  $T_2 = 400 K$ ,  $T_3 = 300 K$ . Il rendimento é:

$$\eta = \frac{L}{Q_{ass}} = \frac{350}{800} = 0.43$$

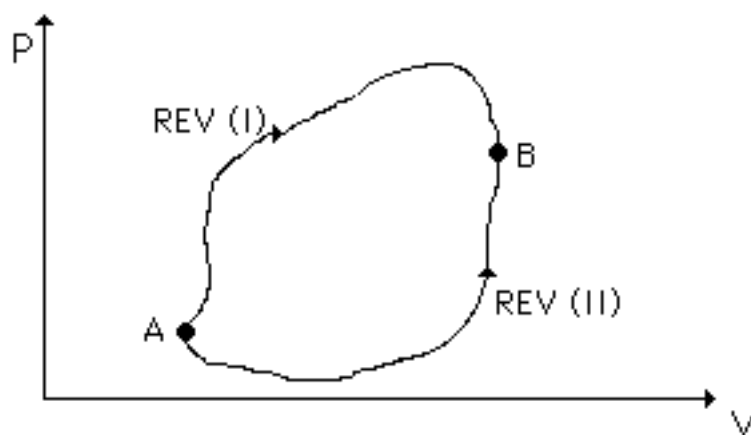
il rendimento del ciclo di Carnot é:

$$\eta_C = 1 - \frac{T_{MIN}}{T_{MAX}} = 1 - \frac{300}{600} = 0.5$$

Il ciclo sembra possibile ma si ha  $\sum_i Q_i/T_i = 0.54$  per cui è in contrasto con la condizione di Clausius e quindi non è un ciclo possibile.

## Entropia

Se consideriamo nel piano di Clapeyron un generico ciclo reversibile come quello mostrato



Dal teorema di Clausius si ha

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_{A(I)}^B \frac{\delta Q}{T} + \int_{B(II)}^A \frac{\delta Q}{T} = 0$$

che possiamo anche scrivere come:

$$\int_{A(I)}^B \frac{\delta Q}{T} - \int_{A(II)}^B \frac{\delta Q}{T} = 0$$

Quindi:

$$\int_{A(I)}^B \frac{\delta Q}{T} = \int_{A(II)}^B \frac{\delta Q}{T}$$

Per cui l'integrale è indipendente dal percorso seguito quindi sarà una *funzione di stato*. Questa grandezza è stata chiamata da Clausius ENTROPIA ed indicata con il simbolo  $S$ .

La variazione di essa tra uno stato  $A$  ed uno stato  $B$  lungo una trasformazione reversibile é:

$$\Delta S = S_B - S_A = \int_A^B \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_{REV}$$

mentre la variazione infinitesima di entropia durante una trasformazione reversibile é:

$$dS = \frac{\delta Q_{REV}}{T}$$

Così come è stata definita l'entropia è sempre determinata a meno di una costante arbitraria generalmente però si è interessati a variazioni di entropia ed non ai suoi valori assoluti.

Si può dimostrare che:

$$S_B - S_A = \int_A^B \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_{REV} > \int_A^B \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_{IRREV}$$

Cioè la variazione di entropia è maggiore dell'integrale di Clausius  $I = \int_A^B \frac{\delta Q}{T}$  per una trasformazione irreversibile.

Per calcolare la variazione di entropia tra lo stato  $A$  e  $B$  si può sempre sfruttare la sua proprietà di essere una funzione di stato e quindi scegliere una qualsiasi trasformazione reversibile tra i due stati.

Questo non vuol dire, come vedremo più avanti, che la variazione dell'entropia dell'ambiente sia la stessa se la trasformazione tra  $A$  e  $B$  è stata reversibile od irreversibile.

## Calcolo dell'entropia per un gas perfetto

Dal 1° P. T. per un gas perfetto si ha:

$$\begin{aligned} S_B - S_A &= \int_A^B \frac{\delta Q_{REV}}{T} = \int_A^B \frac{dU + p dV}{T} = \\ &= \int_A^B \frac{nc_v}{T} dT + \int_A^B \frac{p dV}{T} \end{aligned}$$

da cui:

$$S_B - S_A = nc_v \int_A^B \frac{dT}{T} + nR \int_A^B \frac{dV}{V}$$

per cui

$$\boxed{S_B - S_A = nc_v \ln \frac{T_B}{T_A} + nR \ln \frac{V_B}{V_A}}$$



questa formula generale assume diverse forme a seconda delle trasformazioni:

1. Trasformazione isotermica ( $T_A = T_B$ )

$$\Delta S = nR \ln \frac{V_B}{V_A} = nR \ln \frac{p_A}{p_B}$$

2. Trasformazione isobarica essendo  $\frac{V_B}{V_A} = \frac{T_B}{T_A}$  ed utilizzando la relazione di Mayer si ottiene

$$\Delta S = nc_p \ln \frac{V_B}{V_A} = nc_p \ln \frac{T_B}{T_A}$$

3. Trasformazione isocora ( $V_A = V_B$ )

$$\Delta S = nc_V \ln \frac{T_B}{T_A} = nc_V \ln \frac{p_B}{p_A}$$

4. Trasformazione adiabatica ( $dQ = 0$ ) avrà  $\Delta S = 0$   
Le trasformazioni adiabatiche reversibili vengono definite isoentropiche.

## Variatione di entropia di generiche trasformazioni

Nel caso di una generica trasformazione si ha:

$$\Delta Q = mc dT$$

come conseguenza

$$\Delta S = m \int_A^B c(T) \frac{dT}{T}$$

nel caso che  $c$  si possa considerare costante questa diventa

$$\Delta S = mc \int_A^B \frac{dT}{T} = mc \ln \frac{T_B}{T_A}$$

Se durante la trasformazione si ha un cambiamento di stato, che come noto avviene a  $T$  costante si ha:

$$\delta Q = \lambda dm$$

e come conseguenza

$$\Delta S = \frac{m\lambda}{T}$$

## Entropia dell'Universo

L'equazione generale esprime la variazione di entropia di un sistema termodinamico é:

$$S_B - S_A \geq \int_A^B \frac{\delta Q}{T}$$

dove il segno di uguale vale per trasformazioni reversibili e quello di maggiore per trasformazioni irreversibili.

Se si ha una trasformazione reversibile le quantità  $\delta Q$  rappresentano le quantità infinitesime di calore entrate nel sistema ma siccome le stesse quantità di calore, cambiate di segno, sono uscite dalla sorgente di temperatura alla temperatura  $T$  si determina una variazione totale di entropia del sistema più l'ambiente esterno uguale zero.

Mentre se il sistema è isolato, essendo  $\delta Q = 0$ , si ha:

$$\boxed{S_B - S_A \geq 0}$$

Cioè l'entropia di un sistema isolato aumenta sempre o resta costante.

Se definiamo il sistema isolato come universo termodinamico (u) l'insieme del sistema termodinamico (s) e dell'ambiente esterno (a) e teniamo conto che le trasformazioni naturali sono tutte irreversibili si ha in questo caso:

$$\boxed{S_B - S_A > 0}$$

Cioè si ottiene l'affermazione di Clausius l'entropia dell'universo è in continuo aumento

Questa affermazione si può assumere come definizione del 2° P. T.

Un'enunciato più significativo del 2° P.T. noto anche come legge di accrescimento dell'entropia è il seguente:

Ogni processo naturale si svolge necessariamente in quel verso che comporta un'aumento di entropia dell'universo.

Il fatto che l'entropia dell'universo debba continuamente aumentare non significa che in una certa trasformazione la variazione di entropia non possa essere negativa; se essa diminuisce la variazione di entropia dell'ambiente esterno sarà sicuramente positiva e con un valore assoluto maggiore della diminuzione di entropia della trasformazione.

In modo analitico avremo:

- $\Delta S_u = \Delta S_s + \Delta S_a = 0$  trasformazione reversibili
- $\Delta S_u = \Delta S_s + \Delta S_a > 0$  trasformazione irreversibili

- $\Delta S_u = \Delta S_a = \Delta S_s = 0$ , cicli reversibili
- $\Delta S_u = \Delta S_a > 0$  cicli irreversibili

## Entropia e processi naturali

Analizziamo in questo paragrafo l'evoluzione spontanea dei sistemi utilizzando la legge dell'accrescimento dell'entropia.

Supponiamo ad esempio di mescolare due quantità di acqua che per semplicità prendiamo identiche (massa =  $m$ ) poste rispettivamente alle temperature  $T_1$  e  $T_2$  con  $T_1 > T_2$ . La temperatura finale sarà

$$T_f = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

Se il mescolamento avviene con una trasformazione reversibile ad esempio portando le due masse a contatto con una successione infinita di termostati posti tra le temperature  $T_1$  e  $T_2$ , si trova:

$$\Delta S_1 = mc \ln \frac{T_f}{T_1}$$

$$\Delta S_2 = mc \ln \frac{T_f}{T_2}$$

Mentre la variazione di entropia totale sarà:

$$\begin{aligned} \Delta S &= \Delta S_1 + \Delta S_2 = mc \left[ \ln \frac{T_f}{T_1} + \ln \frac{T_f}{T_2} \right] = \\ &= mc \ln \frac{T_f^2}{T_1 T_2} = mc \ln \frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2} > 0 \end{aligned}$$

Come si può facilmente verificare, è  $\Delta S > 0$ , mentre le singole variazioni di entropia sono  $\Delta S_1 < 0$ ,  $\Delta S_2 > 0$

è importante notare che se il mescolamento fosse avvenuto in modo irreversibile la variazione di entropia  $\Delta S_1$  sarebbe stata la medesima perché essa è una funzione di stato e quindi non dipende dalla trasformazione seguita.

Se invece consideriamo la variazione di entropia dell'ambiente esterno troviamo che nel caso della trasformazione reversibile la variazione di entropia dei termostati è uguale e contraria a quella del sistema per cui la variazione di entropia dell'universo sarà nulla.

Mentre nel caso della trasformazione irreversibile (mescolamento naturale) siccome le due masse di acqua non sono a contatto con l'ambiente la variazione di entropia dell'universo coinciderà con quella del sistema; quindi sarà positiva.

## Entropia ed energia inutilizzabile

Consideriamo:

- sistema = serbatoio a temperatura  $T$
- ambiente = temperatura  $T_0$  dove  $T < T_0$

Se una macchina di Carnot lavora tra le due temperature assorbendo  $Q$  dall'ambiente si avrà una parziale conversione in lavoro:

$$L = Q \left( 1 - \frac{T_0}{T} \right)$$

Quindi solo una parte dell'energia  $Q$  è utilizzabile per essere convertita in lavoro. Se  $Q$  è trasmesso tra  $T_1 \rightarrow T_2$  con  $T_2 < T_1$  ma sempre  $T_2 > T_0$  cioè il sistema a  $T_2$  è immerso nell'ambiente a  $T_0$ ; si ha:

- *lavoro max. prima della trasmissione*

$$L = Q \left( 1 - \frac{T_0}{T_1} \right)$$

- *lavoro max. dopo la trasmissione*

$$L = Q \left( 1 - \frac{T_0}{T_2} \right)$$

La differenza tra i due  $L$  è l'energia  $E'$  che avrebbe potuto essere convertita in lavoro prima della trasmissione di calore. Si ha:

$$E' = Q \left( 1 - \frac{T_0}{T_1} \right) - Q \left( 1 - \frac{T_0}{T_2} \right) = T_0 \left( \frac{Q}{T_2} - \frac{Q}{T_1} \right)$$

cioé:

$$E' = T_0 \Delta S_{tot} \quad (5.7)$$

Questo per una trasformazione in calore.

Si può dimostrare che in ogni trasformazione irreversibile si ha la (5.7)

L'energia non più utilizzabile per compiere lavoro in seguito a una trasformazione irreversibile è  $T_0$  volte la variazione totale di entropia del sistema e dell'ambiente circostante dovuta a una trasformazione irreversibile.

Ovviamente per il 1° P. T. l'energia non è persa.

## Entropia e disordine

Freeman Dyson affermò Il calore è l'energia disordinata L'energia può esistere ordinata, vedi  $U^{235}$ . Ma se esempio un proiettile colpisce una lastra di acciaio e si ferma si trasferisce energia alla lastra sotto forma di calore.

Per specificare il calore in termini precisi occorre dare due numeri:

1. quantità di energia (caloria)
2. quantità di disordine (entropia)

Esiste cioè un legame diretto tra entropia e disordine. Esempi qualitativi:

- Espansione libera: quando il gas ha riempito lo spazio vuoto il sistema è più disordinato
- Conduzione del calore: due corpi con  $T_1$  e  $T_2$  posti a contatto raggiungono una temperatura intermedia  $T$ . Il sistema è diventato più disordinato. Si ha quindi la tendenza dei processi naturali a diventare più disordinati.

Il legame tra entropia e disordine è (equazione di Boltzmann):

$$\boxed{S = k \ln \Omega}$$

dove  $k$  è la costante Boltzmann e  $\Omega$  = parametro di disordine = probabilità che il sistema si trovi in un dato stato fra tutti quelli nei quali può esistere (probabilità termodinamica); è una quantità statistica o microscopica.

Esempio: calcolo della variazione  $\Delta S$  per l'espansione libera di un gas perfetto.

Si ha  $\Omega_1 = cV$  cioè la probabilità di trovare una molecola in un volume è proporzionale a  $V$ . La probabilità di trovarne  $N$  nello stesso volume é:

$$\Omega = \Omega_1^N = (cV)^N$$

quindi

$$S = KN(\ln c + \ln V)$$

la variazione di entropia nell'espansione

$$\begin{aligned} \Delta S = S_f - S_i &= KN(\ln c + \ln V_f) - KN(\ln c + \ln V_i) = \\ &= KN \ln \frac{V_f}{V_i} = \frac{RN}{N_A} \ln \frac{V_f}{V_i} \end{aligned}$$

in accordo con quanto precedentemente trovato.

La definizione di entropia  $S = K \ln \Omega$  crea un legame tra le variabili macroscopiche (termodinamica) e la meccanica statistica.

La direzione di evoluzione dei processi naturali (maggiore entropia) si può legare alle leggi della probabilità (tendenza ad uno stato più probabile).

## Terzo principio della termodinamica

Si è visto che l'entropia è sempre definita a meno di una costante di integrazione del tipo

$$S_A = S_0 + \int_0^A \frac{\delta Q_{REV}}{T}$$



ci si pone il problema di trovare uno stato di un sistema di riferimento ad entropia nulla

Poichè si ha un legame diretto tra entropia e disordine e poichè per  $T \rightarrow 0$  si ottengono sistemi sempre più ordinati si ha

$$S_A = \int_0^{T_A} \frac{\delta Q_{REV}}{T}$$

dove  $T_A$  è la temperatura dello stato  $A$

Questa assunzione ( $S_0 = 0$ ) costituisce l'enunciato di F.F.Simon (1927) del terzo principio della termodinamica:

*L'entropia di ogni sistema allo zero assoluto può essere supposta nulla*

## Elementi di teoria cinetica dei gas

### Introduzione

La termodinamica considera solo variabili macroscopiche (pressione, volume, temperatura...).

La meccanica statistica si occupa degli stessi sistemi ma presuppone l'esistenza di atomi ed applica le leggi della meccanica ai singoli atomi, però utilizzando leggi statistiche. Si vedrà che si potranno collegare le funzioni termodinamiche con le medie di proprietà atomiche.

Al livello della teoria cinetica dei gas si usano tecniche di calcolo dei valori medi molto semplici; con la meccanica statistica si usano tecniche più formali ed astratte.

Con la meccanica statistica quantistica si usano le tecniche di

calcolo della statistica applicata alla meccanica dei quanti.  
Si suppone che il gas da studiare sia il gas perfetto già definito.

### **Equazione di stato $pV = nRT$**

Utilizziamo il modello del gas perfetto per giustificare l'equazione di stato  $pV = nRT$ .

Si interpreta la pressione sulle pareti come il risultato degli urti molecole  $\rightarrow$  parete.

Si otterrà che la pressione è proporzionale alla densità del gas, dipende dalla massa  $m$  e dalla velocità delle molecole.

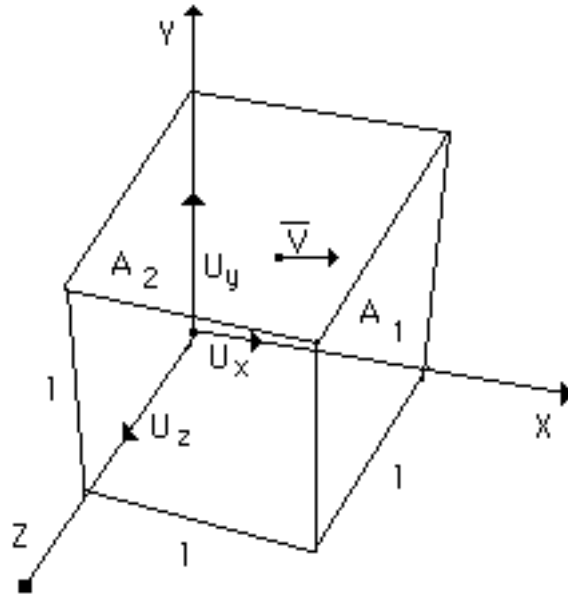
Paragonando il risultato con l'equazione detta si ottiene l'interpretazione microscopica della temperatura.

Trascureremo gli urti tra le particelle ma poiché essi sarebbero elastici non darebbero contributo.

Inoltre il tempo speso durante gli urti è trascurabile rispetto al tempo tra gli urti.

### **Calcolo cinetico della pressione**

Consideriamo il gas in una scatola cubica:



Se la molecola colpisce la faccia  $A_1$  si ha

$$\Delta P = P_f - P_i = -mv_x - (mv_x) = -2mv_x$$

dove  $\Delta P \perp A_1$ . Poiché si conserva la  $P$  totale la quantità di moto comunicata ad  $A_1$  è  $P = 2mv_x$ . Se  $m$  non urta altre molecole ed arriva alla faccia opposta  $A_2$  il tempo trascorso sarà  $l/v_x$ . Per tornare in  $A_1$  ci vorrà il tempo  $2l/v_x$ .

Il numero di collisioni per unità di tempo è  $v_x/2l$ . la quantità di moto che si trasmette ad  $A_1$  per unità di tempo é:

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = 2mv_x \frac{V_x}{2l} = \frac{mv_x^2}{l}$$

La forza totale su  $A_1$  è la quantità di moto per unità di tempo ( $F = \Delta P/\Delta T$ ). La pressione sarà  $F/Area$ , cioè pressione:

$$p = \frac{m}{l^3}(v_{x_1}^2 + v_{x_2}^2 + v_{x_3}^2 + \dots)$$

Se  $N$  è il numero totale di molecole del recipiente ed  $N_0$  il numero per unità di volume, si ha  $l^3 = V = N/N_0$ , quindi

$$p = mN_0 \frac{v_{x_1}^2 + v_{x_2}^2 + v_{x_3}^2 + \dots}{N} \tag{5.8}$$

si definisce velocità quadratica media

$$v_{qm_x} = \sqrt{\frac{v_{x_1}^2 + v_{x_2}^2 + v_{x_3}^2 + \dots}{N}}$$

la (5.8) diventa

$$p = mN_0 v_{qm_x}^2 \quad (5.9)$$

per ragioni statistiche si ha  $v_{qm_x}^2 = v_{qm_y}^2 = v_{qm_z}^2$ , ma dal momento che

$$v_{qm}^2 = v_{qm_x}^2 + v_{qm_y}^2 + v_{qm_z}^2$$

si ha

$$v_{qm}^2 = 3v_{qm_x}^2$$

Sostituendo nella (5.9) si ha

$$p = \frac{1}{3} m N_0 v_{qm}^2 \quad (5.10)$$

che si può anche scrivere come

$$\boxed{p = \frac{1}{3} \rho v_{qm}^2} \quad (5.11)$$

espressione della pressione esercitata sulle pareti dalla (5.11) si ricava

$$\boxed{v_{qm} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}}} \quad (5.12)$$

Poichè  $\rho = mN/V$  si ottiene per la (5.11)

$$p = \frac{1}{3} \frac{mN}{V} v_{qm}^2 \quad (5.13)$$

siccome  $N = N_A n$  ed inoltre  $k = R/N_A$  si ottiene

$$N = \frac{nR}{k}$$

sostituendo nella (5.13) si ottiene

$$p = \frac{1}{3} m \frac{nR}{k} \frac{v_{qm}^2}{V}$$

oppure

$$pV = \frac{nR}{k} \frac{1}{3} m v_{qm}^2$$

dalla  $pV = nRT$  si ricava

$$\boxed{\frac{1}{2} m v_{qm}^2 = \frac{3}{2} k T}$$

Cioè la temperatura assoluta è proporzionale al valore medio dell'energia cinetica. L'energia cinetica associata al moto ha effetto sulla temperatura.

## Processo di diffusione

Siccome  $\frac{1}{2} m v_{qm}^2 = \frac{3}{2} k T$  si ha che per i due gas alla stessa temperatura il rapporto tra le velocità quadratiche medie delle molecole è uguale alla radice quadrata del rapporto inverso delle loro masse. Cioè

$$T = \frac{2}{3k} \frac{m_1 v_{qm,1}^2}{2} = \frac{2}{3k} \frac{m_2 v_{qm,2}^2}{2}$$

si ottiene:

$$\frac{v_{qm,1}}{v_{qm,2}} = \sqrt{\frac{\bar{v}_1^2}{\bar{v}_2^2}} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$$

Se i gas sono in un recipiente con pareti porose il gas più leggero sfuggerà più rapidamente. Si trova che il rapporto tra il numero di molecole che escono dalle pareti nel tempo  $\Delta t$  è  $\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$ . Questo processo di diffusione è usato come mezzo di separazione dell' $U^{235}$  (fissile) dall' $U^{238}$  (non fissile).

## Velocità del suono

Poiché  $v_{suono} = v_{qm}$  si ha che la velocità del suono  $V_1$  alla temperatura  $T_1$  è legata alla velocità  $V_2$  alla temperatura  $T_2$  dalla relazione

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

Esempio:  $v_s = 332 \text{ m/s}$  a  $0^\circ\text{C}$  ( $273 \text{ K}$ ) la sua velocità a  $300 \text{ K}$  è in aria:

$$V_{300K} = \sqrt{\frac{300}{273}} 332 = 348 \text{ m/s}$$

Esempio: calcolare la  $v_{qm}$  della molecola di Idrogeno a  $0^\circ\text{C}$  e  $p = 1 \text{ atm}$ .

Risoluzione:  $\rho = 8.99 \cdot 10^{-2} \text{ Kg/m}^3$  e  $p = 1 \text{ atm} = 1013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$

$$v_{qm} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}} = 1840 \text{ m/s}$$

## Distribuzione delle velocità molecolari

Abbiamo definito  $v_{qm}$  ma le effettive velocità delle molecole si possono discostare anche di molto da questo valore.

Clerk Maxwell nel 1859 per primo risolve il problema di trovare

la distribuzione più probabile di velocità.

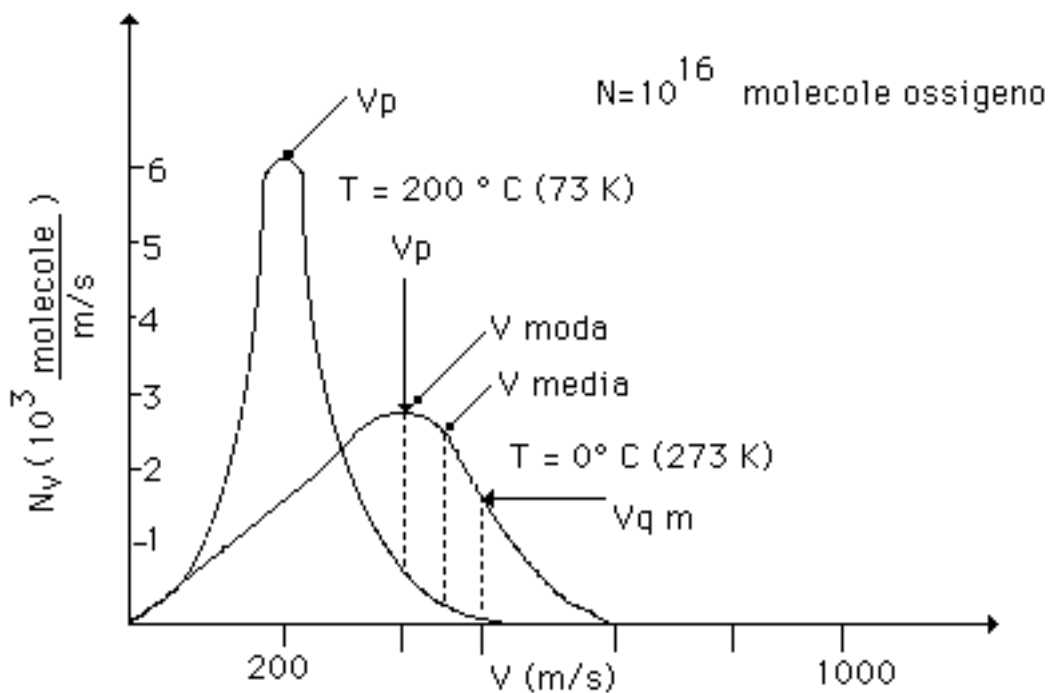
La densità di probabilità di Maxwell è:

$$y(v) = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2\pi kT}} v^2$$

dove  $y(v) dv$  è la probabilità che una molecola alla temperatura  $T$  abbia velocità comprese tra  $v$  e  $v + dv$ . Se vogliamo calcolare la probabilità che a temperatura costante la velocità della molecola sia compresa tra  $v_1$  e  $v_2$  dobbiamo integrare tra i due valori

$$y_{12} = \int_{v_1}^{v_2} y(v) dv$$

la forma della distribuzione di Maxwell è :



da correggere

Si è supposto di avere  $N = 10^{16}$  molecole e quindi si è disegnato

$$N(v) = Ny(v)$$

quindi  $N(v) dv$  è il numero di molecole tra  $v$  e  $v + dv$ . Sarà:

$$N = \int_0^{\infty} N(v) dv = 10^{16}$$

Si ottiene la velocità più probabile

$$v_p = v_{moda} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = 0.81 v_{qm}$$

$v_p$  è il valore della velocità di cui è dotato il maggior numero di molecole

inoltre la media aritmetica delle velocità detta velocità media è:

$$v_{media} = \bar{v} = \int_0^{\infty} v y(v) dv = \frac{8}{3\pi} v_{qm}$$

quindi risulta essere:

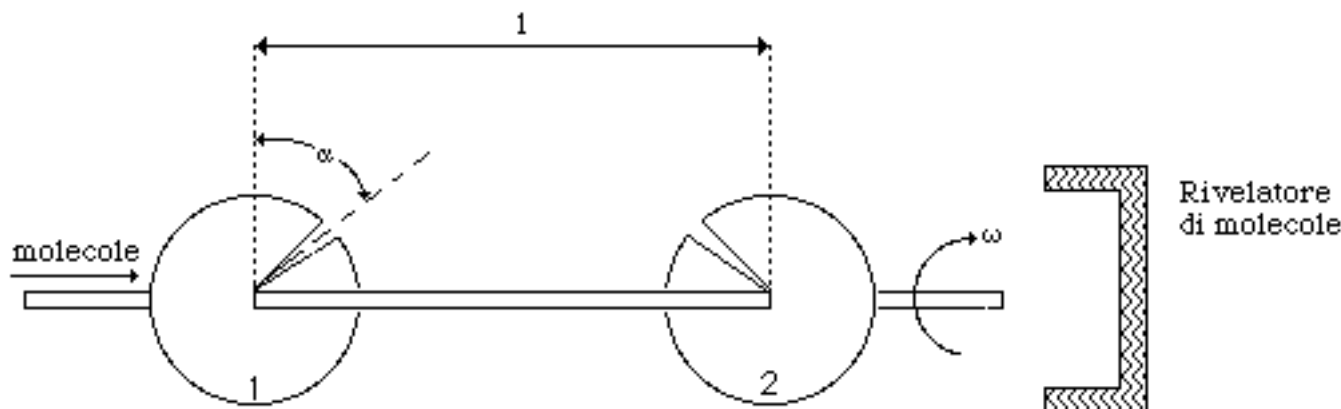
$$v_p < v_{media} < v_{qm}$$

## Verifica sperimentale della distribuzione di Maxwell

Maxwell ricavò la sua funzione nel 1859 e nel 1920 Stern ne dimostrò sperimentalmente la sostanziale correttezza ma solo nel 1955 si giunse ad una precisa verifica sperimentale.

Stern adottò il seguente *selettore di velocità*





la durata del percorso tra i due dischi è  $\Delta t = l/v$

Una particella che passa nel disco 1 passerà anche nel disco 2 se:

$$\frac{l}{v} = \frac{\alpha}{\omega}$$

quindi  $v = \frac{l\omega}{\alpha}$

## Energia interna e calori molari secondo la teoria cinetica

L'energia interna è l'energia totale meccanica del sistema  $U = E_K + E_p$

Nel caso del gas monoatomico schematizzato come un insieme di punti:

$$U = E_K + E_p = N \frac{1}{2} m \bar{v}^2 = n N_A \frac{1}{2} m \bar{v}^2$$

ma poiché  $\frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{3}{2} kT$  si ottiene

$$U = n \frac{3}{2} N_A kT = \frac{3}{2} N kT = \frac{3}{2} nRT$$

quindi

$$U_{mol} = \frac{3}{2}kT$$

Da cui si ottiene il calore molare a volume costante  $\delta Q = dU + p dV$

$$c_V = \frac{1}{n} \frac{dU}{dT} = \frac{3}{2}R \approx 3 \frac{\text{cal}}{\text{mole K}}$$

Per gas biatomici supposti rigidi come distanza ci sarà sempre:

$$U = E_{K,totale} = E_{K,rot} + E_{K,traslazionale}$$

Il teorema di Boltzamm dell'equipartizione dell'energia cinetica afferma che ogni grado di libertà della molecola ha associata l'energia media  $\frac{1}{2}kT$ .

Nel caso della molecola monoatomica ci sono tre gradi di libertà (3 coordinate indipendenti). L'energia cinetica media è  $3 \frac{1}{2}kT = \frac{3}{2}KT$  come visto. Per gas biatomici si hanno 5 gradi di libertà (3 coordinate per il C. M. + 2 angoli) e si ha:

$$\begin{aligned} U_{mol} = E_{K,totale} &= E_{K,rot} + E_{K,traslazionale} = \\ &= 2 \frac{1}{2}kT + 3 \frac{1}{2}kT = \frac{5}{2}kT \end{aligned}$$

per  $n$  moli  $U = \frac{5}{2}nRT$  e di conseguenza il calore molare a volume costante risulta:

$$c_V = \frac{1}{n} \frac{dU}{dT} = \frac{5}{2}R$$

Se consideriamo molecole biatomiche elastiche si ha un moto armonico semplice tra i due atomi ed in media  $E_P = E_K =$

$\frac{1}{2}kT$  più un grado di libertà.

$$U_{mol} = E_{K,totale} + E_P = 6 \frac{1}{2}kT + \frac{1}{2}kT = \frac{7}{2}kT$$

Si ottiene per molecole poliatomiche rigide (6 gradi di libertà)

$$U = 3nRT$$

e

$$c_V = 3R$$