Università degli Studi di Brescia
Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea Ingegneria
dell'Informazione

FISICA SPERIMENTALE A
APPUNTI DELLE LEZIONI

Docente: Prof. Giorgio Sberveglieri

Assistenti al Corso: Dr.ssa Camilla Baratto,

Dr. Gian Paolo Benussi, Dr. Guido Spagnoli,

Dr.ssa Eleonora Maccagnoli

A.A. 2003-2004

Indice

1 Introduzione

La Fisica si occupa di descrivere e interpretare i fenomeni naturali usando il metodo scientifico (Fisica=Natura)

Metodo Scientifico: I fenomeni naturali sono complessi. Necessità di schematizzare. Esempio: lancio del sasso; si eliminano le cause accessorie che si potranno in un secondo tempo introdurre come perturbazioni al fenomeno semplice. La schematizzazione comporta la sostituzione del fenomeno naturale con un modello semplificato.

La suddivisione della Fisica
Nel passato si avevano le varie branche della Fisica quasi scienze indipendenti

- luce $\rightarrow$ ottica
- suono $\rightarrow$ acustica
- calore $\rightarrow$ termodinamica
- moto $\rightarrow$ meccanica. Si è sviluppata per prima. Studia il moto dei pianeti; cioè la gravitazione come parte della meccanica
- elettromagnetismo (XIX° secolo)

Oggi si guarda alla Fisica in modo unitario e si cercano delle leggi che possano spiegare i fenomeni di diverse branche.
Per verificare i modelli o le leggi e svilupparne dei nuovi si usa l'osservazione e la sperimentazione

Composizione e dimensione dell'Universo
La materia è composta di particelle fondamentali e tutti i corpi sono raggruppamenti di questi.

- *Particelle fondamentali*: elettroni ($m = 10^{-30}\ Kg$); protoni ($m = 10^{-27}\ Kg$); neutroni ($m = 10^{-27}\ Kg$).
- *atomi*: nucleo (protoni+neutroni)+elettroni $1-2 10^{-10} m = 0.1 - 0.2\, nm$. 104 specie e 1300 isotopi
- *molecole* 5000-10000 specie. Le più semplici sono formate da due atomi (H_2, HCl). Si arriva fino a molecole tipo DNA costituite da lunghe catene.
  Solidi; liquidi; gas (plasma).
- *corpo umano* 10^{28} atomi
- *Terra* 10^{51} atomi. $6\, 10^{24}\ Kg$
- *Sole* 10^{57} atomi
- *Via Lattea* 10^{11} stelle 10^{70} atomi
- *Universo* 10^{20} stelle 10^{10} galassie 10^{80} atomi.
  $R \approx 10^{26}\ m$ 10^{10} anni luce

2 Misure e unità di misura

La misura costituisce un insieme di procedure e convenzioni mediante le quali si può associare un numero seguito da un'unità di misura ad ogni ente fisico (definizione *operativa*)

Si attua un confronto con un'unità di misura. É necessario produrre la minore perturbazione sul sistema osservato

La precisione della misura di una grandezza fisica definisce le cifre significative.
Es: $840.7342 \pm 1\%$ significa una precisione di ± 8.4 e quindi deve essere scritto 840

Grandezze e unità fondamentali

- *Grandezze fondamentali*: non sono definite in termini di altre grandezze fisiche. Es: lunghezza, tempo.
- *Grandezze derivate*: la definizione operativa è basata sull'uso di altre grandezze fisiche. Es: velocità, accelerazione.

Si definisce un'unità fondamentale o campione e il procedimento di misura.

Le *unità fondamentali* sono: *Lunghezza, tempo, massa e carica elettrica*; sistema di unità MKSC adottato nel 1960 a Parigi durante la XI Conf: Generale dei Pesi e delle Misure.

- *Lunghezza*
  Unità: *metro (m)* definito come 1.650.763,73 x L Kr_{86}.
  Cammino percorso dalla luce nel vuoto in $1/299.792.458s$.
  É accessibile, invariabile e si mantiene inalterato il campione costituito da una sbarra di Pt-Ir
- *Tempo*
  Unità: *secondo (s)* definito come 9.192.631.770 x T

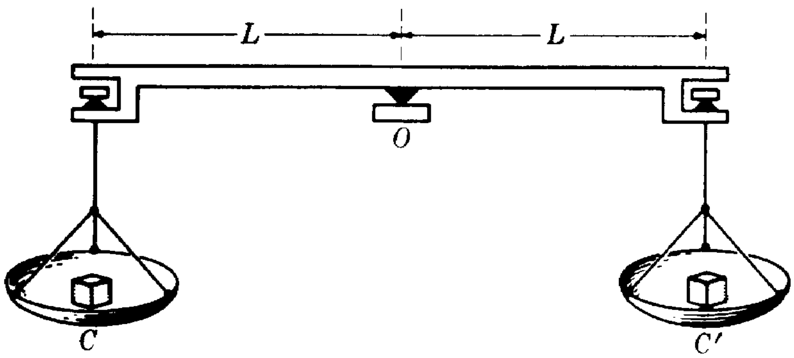
Cs_{133}
In precedenza definito come 1/86400 del giorno solare

- *Massa*
  Unità: *Kilogrammo* (Kg). Massa del prototipo internazionale del kilogrammo costituito da un blocco di platino. Esso è uguale alla massa di $10^{-3}\,m^3$ di acqua a $4\,°C$. Il volume di $10^{-3}\,m^3$ è detto litro.
  Nella definizione atomica corrisponde a $5,0183\,10^{25}\,C_{12}$

  – Massa inerziale: la massa è un coefficiente caratteristico di ogni particella che ne determina il comportamento in presenza di una forza $\vec{F} = m\vec{a}$

  – Massa gravitazionale: la massa di un corpo è sempre proporzionale al suo peso, cioé alla forza di attrazione esercitata su di esso dalla Terra $\vec{P} = m\vec{g}$ (Newton)

  Definizione operativa della massa gravitazionale



- *Carica elettrica*
  Unità: *coulomb (C)* definito come $6.241870\,10^{18}\,q_e$ - carica dell'elettrone.
  A rigore venne scelta la *corrente elettrica* con unità di

misura l'*ampere (A)*. Il coulomb è la quantità di cariche elettriche che passano attraverso la sezione di un conduttore quando la corrente è uguale a 1 A

Il *Sistema Internazionale* definisce come unità fondamentali MKSA e il *kelvin (K)* per misurare le temperature, la *candela (cd)* per misurare l'intensità luminosa e la *mole* per misurare la quantità di materia.

La mole è la quantità di materia costituita da $N_A = 6,02210^{23}$ unità elementari (atomi, molecole, ioni, etc.). N_A è chiamato *Numero di Avogadro* ed è definito come il numero di atomi contenuti in 12 g di C_{12}

Il SI ha soppiantato il sistema *cgs* (centimetro, grammo, secondo)

Sistemi di riferimento (invarianza delle leggi fisiche)

La stessa grandezza assume valori diversi se misurata da osservatori in moto tra loro.
Esempio: Velocità di un treno misurata da un osservatore posto a terra, posto su un automobile o posto sul treno stesso.
Il valore misurato dipende dal sistema di riferimento dell'osservatore.

Sistemi di riferimento inerziali: possono essere in moto rettilineo uniforme tra loro.
Osservatori solidali con diversi sistemi di riferimento inerziali possono ottenere valori numerici diversi delle grandezze che

misurano ma le relazioni tra esse, cioé le leggi fisiche, sono le stesse per tutti gli osservatori

Equazioni dimensionali

Date le grandezze fondamentali:

- *Lunghezza* [L]
- *Massa* [M]
- *Tempo* [T]

sono determinate le equazioni dimensionali delle grandezze derivate

- *velocità*$(v = ds/dt$ [V])

$$[V] = \frac{[L]}{[T]} = [L][T]^{-1}$$

- *accelerazione*$(a = dv/dt$ [a])

$$[a] = \frac{[V]}{[T]} = \frac{[L][T]^{-1}}{[T]} = [L][T]^{-2}$$

- *forza*$(F = ma$ [F])

$$[F] = [M][a] = [M][L][T]^{-2}$$

Ogni equazione in fisica è *dimensionalmente omogenea*

Densità

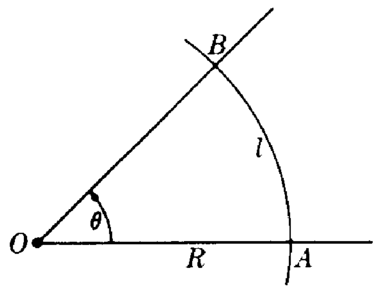
Definita come la massa per unità di volume

- *Densità media* $\overline{\rho} = m/V \ [Kg\, m^{-3}]$
- *Densità locale* $\rho = \Delta m/\Delta V \ [Kg\, m^{-3}]$
- *Densità relativa* $\rho_{21} = \rho_2/\rho_1$

La densità dell'acqua è $10^3\ Kgm^{-3}$

Angoli piani

Grandezza fisica derivata dalla lunghezza. Rappresenta la porzione di piano compresa tra due semirette con origine in comune



La misura di θ in *radianti* (unità adimensionale) è

$$\theta = \frac{l}{R}$$

Un angolo piano completo attorno ad un punto è $\theta = 2\pi R/R = 2\pi$

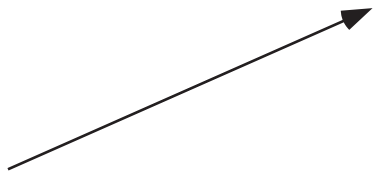
Nella misura in *gradi* la circonferenza è divisa in 360°, ogni grado è diviso in $60'$(minuti primi), ogni minuto primo è diviso in $60''$ (secondi).
Vale la relazione

$$\theta_{rad} : 2\pi = \theta_{gr} : 360^\circ$$

3 Vettori

- *Grandezze scalari*: sono completamente determinate dalla loro grandezza espressa nella corrispondente unità di misura; Es: volume, temperatura

- *Grandezze vettoriali*: richiedono per essere completamente determinate oltre alla loro grandezza una direzione.

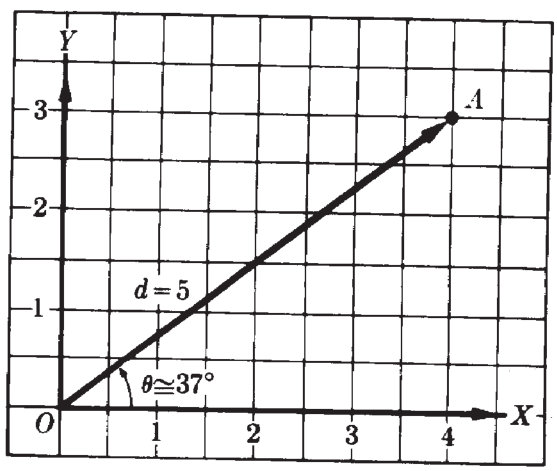


Sono caratterizzate da:

  – *intensità (modulo)* per convenzione la lunghezza del segmento

  – *direzione orientata (direzione con verso)* determinata dalla freccia

Es: velocità, forza, accelerazione



Risulta

$$|\overline{OA}| = \sqrt{16+9} = 5$$
$$\theta = \arctan\frac{3}{4} \approx 37^\circ$$

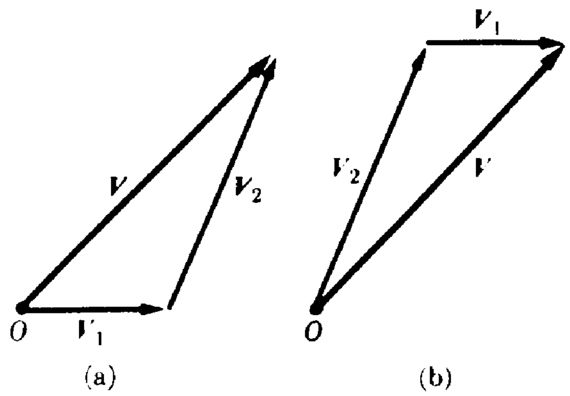
versore: è un vettore di modulo unitario. Si scrive $\hat{u}$,$\vec{u}$:
Un vettore $\vec{V}$ parallelo a un versore $\hat{u}$ si può esprimere nella forma

$$\vec{V} = |\vec{V}|\hat{u} = V\hat{u}$$

Due vettori sono uguali o equipollenti se hanno lo stesso modulo e puntano nella stessa direzione e verso (direzione orientata)

Somma e differenza di vettori

Dati due vettori dotati delle stesse unità di misura, si definisce la somma (geometricamente)



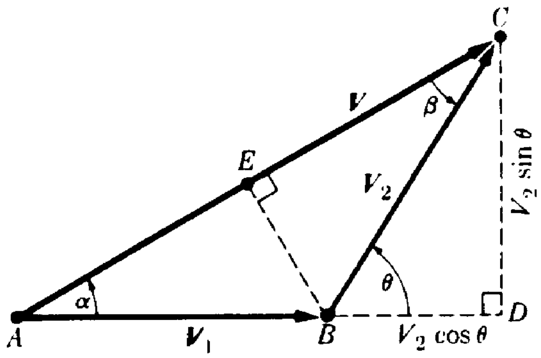
La somma vettoriale è *commutativa*

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_2 + \vec{V}_1$$

e *associativa*

$$(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) + \vec{V}_3 = \vec{V}_1 + (\vec{V}_2 + \vec{V}_3)$$

Algebricamente



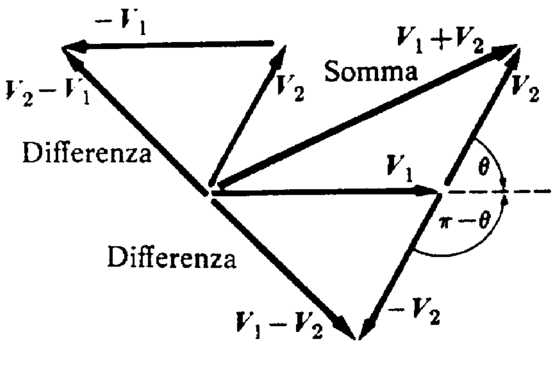
Si ottiene utilizzando la legge dei coseni

$$\boxed{V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2\cos\theta}}$$

Mentre tramite il teorema dei seni ed essendo $\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$

$$\boxed{\frac{V}{\sin\theta} = \frac{V_1}{\sin\beta} = \frac{V_2}{\sin\alpha}}$$

Si definisce differenza di due vettori



$$\vec{D} = \vec{V_1} - \vec{V_2} = \vec{V_1} + (-\vec{V_2})$$

Si ha

$$\boxed{D = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2\cos(\pi - \theta)}}$$

La differenza vettoriale è anticommutativa

$$\vec{V}_1 - \vec{V}_2 = -(\vec{V}_2 - \vec{V}_1)$$

Le relazioni fra vettori sono invarianti per traslazione o rotazione delle coordinate

Moltiplicazione di un vettore per uno scalare

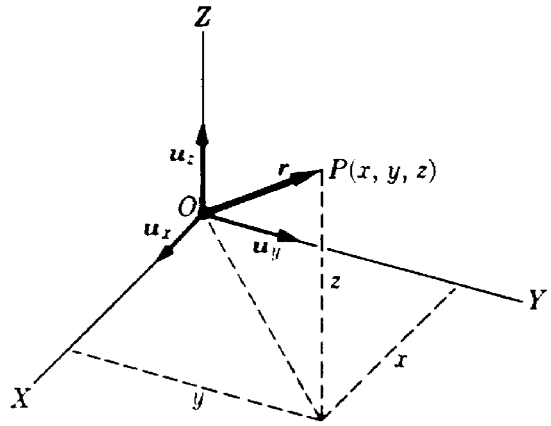
La moltiplicazione di un vettore $\vec{V}$ per uno scalare m produce

- $m > 0$ il vettore $m\vec{V}$ ha lo stesso verso di $\vec{V}$ e modulo $m|\vec{V}|$
- $m < 0$ il vettore $m\vec{V}$ ha verso opposto a $\vec{V}$ e modulo $m|\vec{V}|$

Componenti di un vettore

Tutti i vettori che, quando sommati, danno per somma $\vec{V}$ sono chiamati *vettori componenti* di $\vec{V}$.

Dato un punto P di coordinate cartesiane X, Y, Z, il vettore posizione $\vec{r}$ può essere rappresentato da



$$\vec{r} = X\hat{u}_x + Y\hat{u}_y + Z\hat{u}_z$$
$$|\vec{r}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

dove $\hat{u}_x$, $\hat{u}_y$ e $\hat{u}_z$ sono tre versori diretti come gli assi cartesiani X, Y e Z sono chiamate componenti (ortogonali) cartesiane. $X\hat{u}_x$ è chiamato vettore componente cartesiano lungo la direzione x

In termini di componenti cartesiane la somma di vettori è espressa

$$\vec{V}_1 = V_{1x}\hat{u}_x + V_{1y}\hat{u}_y + V_{1z}\hat{u}_z$$
$$\vec{V}_2 = V_{2x}\hat{u}_x + V_{2y}\hat{u}_y + V_{2z}\hat{u}_z$$

si ha

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (V_{1x} + V_{2x})\hat{u}_x + (V_{1y} + V_{2y})\hat{u}_y + (V_{1z} + V_{2z})\hat{u}_z$$

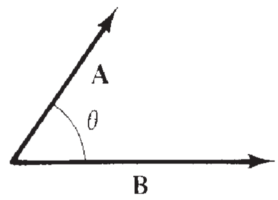
La somma di n vettori $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, $\ldots \vec{V}_n$ risulta

$$\vec{V} = \sum_{i=1}^{n} V_{ix}\hat{u}_x + \sum_{i=1}^{n} V_{iy}\hat{u}_y + \sum_{i=1}^{n} V_{iz}\hat{u}_z$$

La moltiplicazione di un vettore per uno scalare diventa

$$m\vec{V} = (aV_x)\hat{u}_x + (aV_y)\hat{u}_y + (aV_z)\hat{u}_z$$

Prodotto scalare



Si definisce *prodotto scalare* fra i due vettori

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta \tag{3.1}$$

se $\theta = \pi/2$,cioé i due vettori sono perpendicolari, allora $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$

Il prodotto scalare gode della *proprietà commutativa*

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

e *distributiva* rispetto alla somma

$$\vec{C} \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{C} \cdot \vec{A} + \vec{C} \cdot \vec{B}$$

Valgono le seguenti relazioni

$$\hat{u}_x \cdot \hat{u}_x = \hat{u}_y \cdot \hat{u}_y = \hat{u}_z \cdot \hat{u}_z = 1$$
$$\hat{u}_x \cdot \hat{u}_y = \hat{u}_y \cdot \hat{u}_z = \hat{u}_z \cdot \hat{u}_x = 0$$

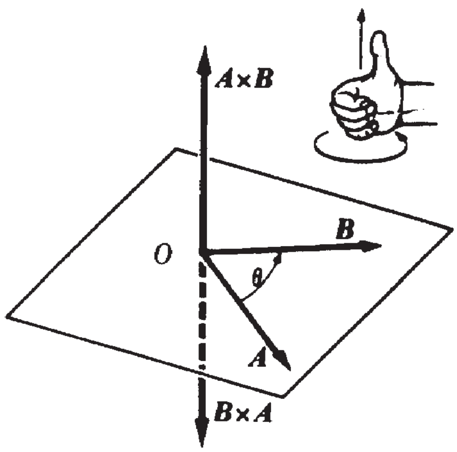
Se i due vettori sono espressi in coordinate cartesiane

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x \hat{u}_x + A_y \hat{u}_y + A_z \hat{u}_z) \cdot (B_x \hat{u}_x + B_y \hat{u}_y + B_z \hat{u}_z) = \\ = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Si ricava inoltre utilizzando la (3.1)

$$\cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB} = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)}}$$

Prodotto vettoriale



Si definisce *prodotto vettoriale*

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

un vettore perpendicolare al piano individuato da $\vec{A}$ e $\vec{B}$ il cui verso è determinato con la regola della vite destrorsa o della mano destra e di modulo

$$C = AB \sin\theta$$

Si ha

$$\vec{A} \times \vec{A} = 0$$

gode della *proprietà anticommutativa*

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

e distributiva rispetto alla somma

$$\vec{C} \times (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{C} \times \vec{A} + \vec{C} \times \vec{B}$$

Per i versori degli assi risulta

$$\begin{gathered}
\hat{u}_x \times \hat{u}_x = \hat{u}_y \times \hat{u}_y = \hat{u}_z \times \hat{u}_z = 0 \\
\hat{u}_x \times \hat{u}_y = \hat{u}_z \; ; \; \hat{u}_y \times \hat{u}_x = -\hat{u}_z \\
\hat{u}_y \times \hat{u}_z = \hat{u}_x \; ; \; \hat{u}_z \times \hat{u}_y = -\hat{u}_x \\
\hat{u}_z \times \hat{u}_x = \hat{u}_y \; ; \; \hat{u}_x \times \hat{u}_z = -\hat{u}_y
\end{gathered}$$

In forma cartesiana

$$\begin{aligned}
\vec{A} \times \vec{B} &= (A_x\hat{u}_x + A_y\hat{u}_y + A_z\hat{u}_z) \times (B_x\hat{u}_x + B_y\hat{u}_y + B_z\hat{u}_z) = \\
&= (A_yB_z - A_zB_y)\hat{u}_x - (A_xB_z - A_zB_x)\hat{u}_y + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{u}_z
\end{aligned}$$

In forma compatta può essere scritto

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Se $\vec{A}$ e $\vec{B}$ giacciono nel piano xy, si ha

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_xB_y - A_yB_x)\hat{u}_z$$

Matrici e determinanti

Una matrice è una tabella di numeri ordinati per righe e per colonne

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

dove in a_{ij} i è l'indice di riga e j l'indice di colonna

Per ogni matrice quadrata si definisce il *determinante*

$$det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

Prodotto misto

Del tipo

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$$

Si verifica che

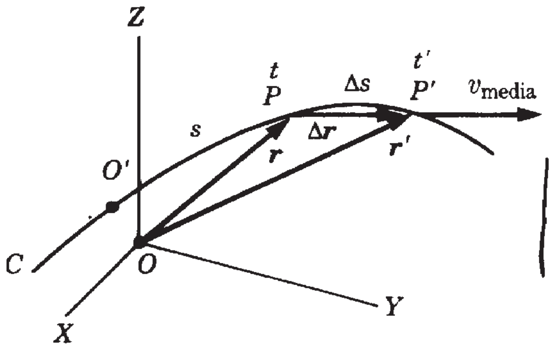
$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{B} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

Si ottiene

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

Se due qualunque dei vettori sono paralleli il prodotto misto è nullo

Derivata di un vettore



All'istante t la particella è in A e all'istante $t^{'}$ si sposta in B
Il vettore differenza è

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t^{'}) - \vec{r}(t)$$

Quando $\Delta t = t^{'} - t \rightarrow 0$ il vettore $\Delta\vec{r}/\Delta t$, che è diretto come la corda, tende al vettore velocità $d\vec{r}/dt$ diretto lungo la tangente alla traiettoria nel punto A

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

derivata rispetto al tempo del vettore $\vec{r}$
Quando

$$\vec{r}(t) = r(t)\hat{u}_r$$

si ottiene

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dr(t)}{dt}\hat{u}_r + r\frac{d\hat{u}_r}{dt} \tag{3.2}$$

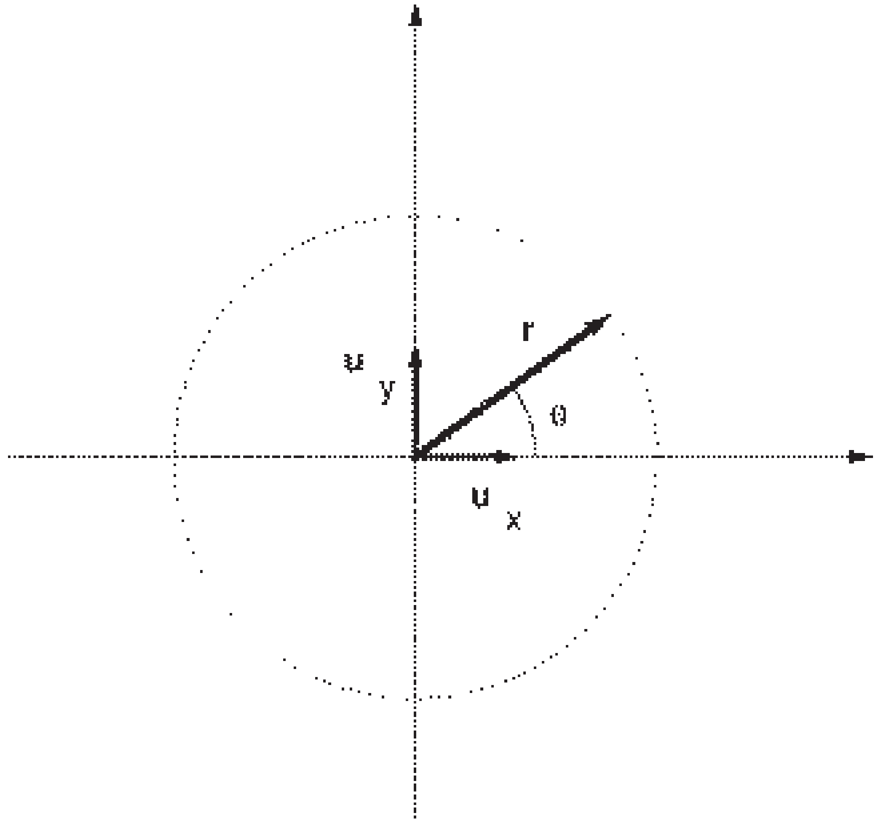
Quando

$$\vec{r}(t) = X(t)\hat{u}_x + Y(t)\hat{u}_y$$

si ottiene

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{u}_x + \frac{dy}{dt}\hat{u}_y = v_x\hat{u}_x + v_y\hat{u}_y$$

ESEMPIO: *moto circolare uniforme*



$$\vec{r}(t) = r(t)\hat{u}_r$$

se $\vec{r}$ ruota con velocità costante (in modulo) si può scrivere

$$\hat{u}_r = \cos\omega t \hat{u}_x + \sin\omega t \hat{u}_y$$

ω velocità angolare costante e $\theta = \omega t$
Essendo $dr/dt = 0$ si ottiene dalla (3.2)

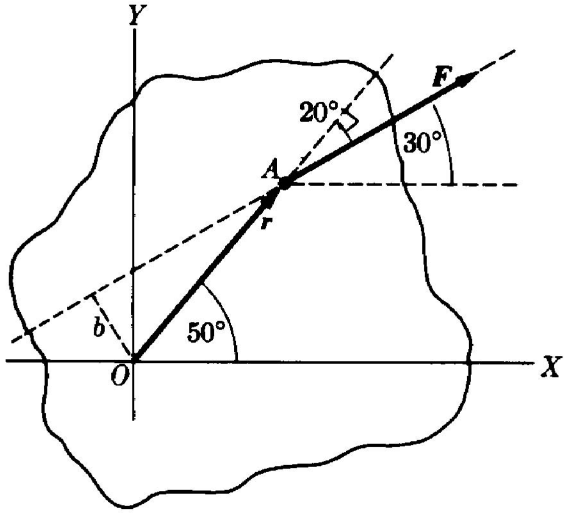
$$\vec{v}(t) = r\frac{d\hat{u}_r}{dt} = r\left(\frac{d\cos\omega t}{dt}\hat{u}_x + \frac{d\sin\omega t}{dt}\hat{u}_y\right)$$

quindi

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = r(-\omega\sin\omega t\hat{u}_x + \omega\cos\omega t\hat{u}_y)$$

4 Equilibrio di un corpo rigido

Momento di una forza (momento meccanico)



Si definisce momento della forza $\vec{F}$ rispetto al punto O la grandezza $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

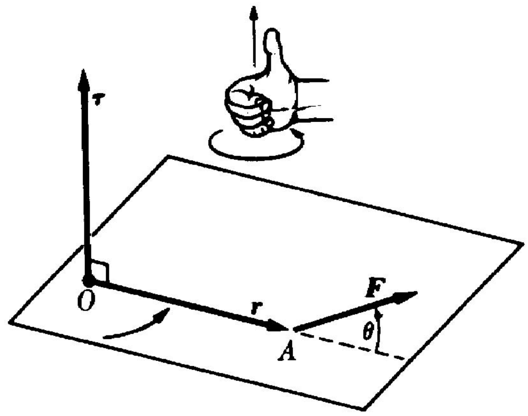
In modulo $\tau = Fr\sin\theta = Fb$ (Forza per braccio)

Dimensionalmente $[M][L]^2[T]^{-2}$

Se $\vec{r}$ e $\vec{F}$ giaciono nel piano xy

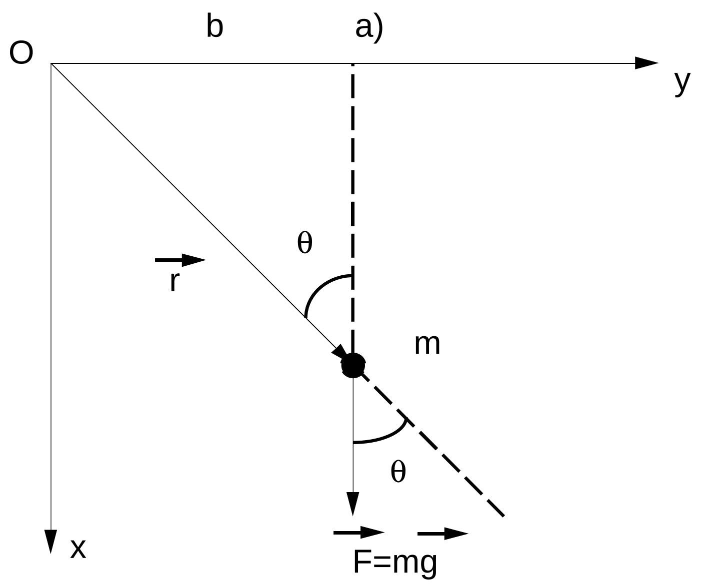
$$\vec{\tau} = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \hat{u}_z \begin{vmatrix} r_x & r_y \\ F_x & F_y \end{vmatrix} = \hat{u}_z(r_xF_y - r_yF_x)$$

Si puó anche scrivere $|\vec{\tau}| = r(|F|\sin\theta) = r\,|F|_\perp$



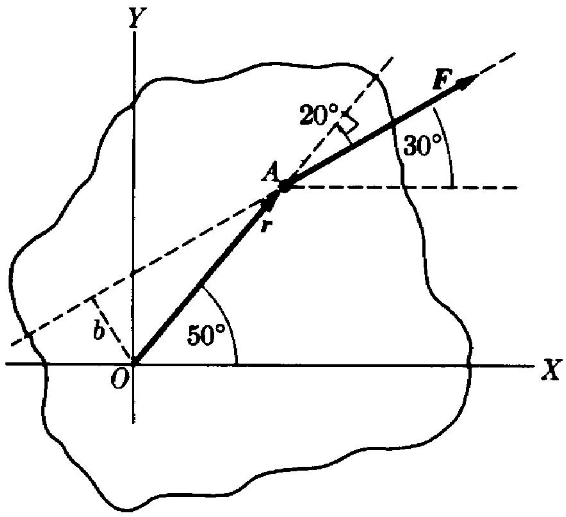
Soltanto la componente di $\vec{F}\perp$ a $\vec{r}$ contribuisce al momento
Quando $\theta = 0$ ($\vec{r}$ e $\vec{F}$ paralleli) o $\theta = \pi$ ($\vec{r}$ e $\vec{F}$ antiparalleli) risulta $\vec{\tau} = 0$

Invertendo il verso di $\vec{F}$ si inverte il verso di $\vec{\tau}$, ma $|\vec{\tau}|$ resta invariato
Invertendo il verso di $\vec{r}$ si inverte il verso di $\vec{\tau}$, ma $|\vec{\tau}|$ resta invariato
Invertendo il verso sia di $\vec{F}$ che di $\vec{r}$, $\vec{\tau}$ resta invariato
ESEMPIO: Particella di massa m che cade da ferma dalla posizione a)



$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = -\hat{u}_z rFsin\theta = -\hat{u}_z mgb$$

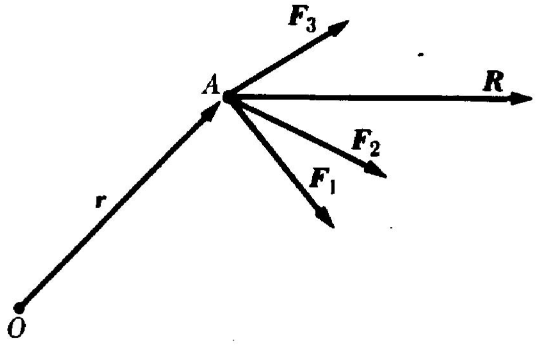
ESEMPIO: Determinare il momento applicato



$|\vec{r}| = 0.45m;\ \left|\vec{F}\right| = 6N$

$$\vec{\tau} = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ r\cos\theta_r & rsin\theta_r & 0 \\ F\cos\theta_F & Fsin\theta_F & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ 0.289 & 0.345 & 0 \\ 5.196 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -0.925\hat{u}_z Nm$$

Momento di più forze concorrenti



$\vec{\tau}_i = \vec{r} \times \vec{F}_i$

Il momento della risultante é $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{R}$ dove $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots$

Quindi

$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{R} = \vec{r}\times(\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+\cdots) = \vec{r}\times\vec{F}_1+\vec{r}\times\vec{F}_2+\vec{r}\times\vec{F}_3+\cdots = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 + \cdots = \sum_i \vec{\tau}_i$$

Un sistema di forze concorrenti puó essere sostituito da una singola forza (rotazione +traslazione)

Forze applicate a un corpo rigido non nel medesimo punto (non concorrenti)

In presenza di piú forze applicate ad un corpo rigido non nel medesimo punto si produce traslazione e rotazione

La traslazione é prodotta dalla risultante

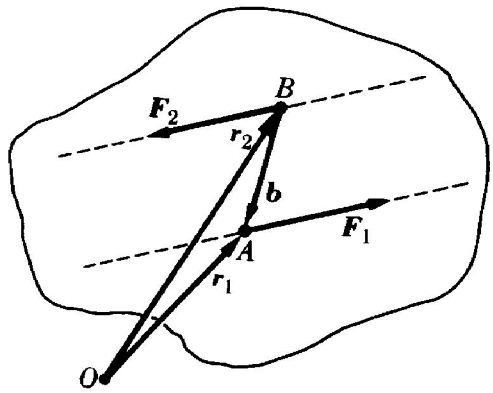
$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots$$

mentre la rotazione rispetto a un punto fisso

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 + \cdots$$

In generale $\vec{\tau}$ e $\vec{R}$ non sono fra loro perpendicolari PUNTO (NON CONCORRENTI)

coppia



Stessa direzione e verso opposto

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$
$$\left|\vec{F}_1\right| = \left|\vec{F}_2\right|$$
$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 = \vec{b} \times \vec{F}_1$$

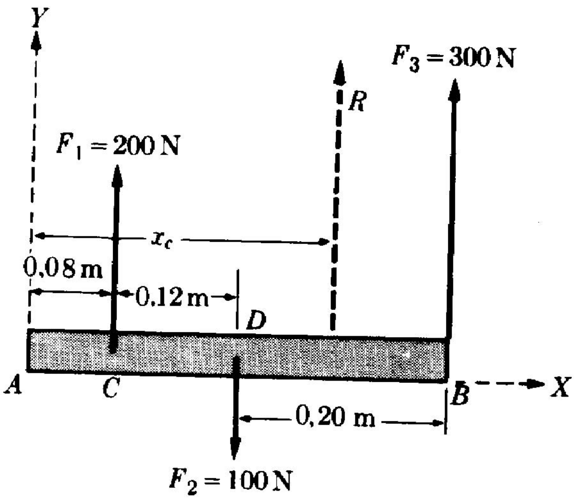
$\vec{b} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ braccio della coppia non dipende dalla scelta di O

Il sistema non puó essere ricondotto a un'unica forza

Un sistema di forze puó essere sempre ridotto a una forza $\vec{R}$ e da una coppia $\vec{\tau}$.

$\vec{R}$ applicata in O rende conto della traslazione mentre $\vec{\tau}$ rende conto della rotazione

Composizione di forze parallele



$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{3} \vec{F_i} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}$$

Il momento - diretto come l'asse z - rispetto al punto O risulta

$$\tau_z = \sum_{i=1}^{3} x_i F_i = x_1 F_1 - x_2 F_2 + x_3 F_3$$

Il sistema di forze risulta equivalente alla risultante $\vec{R}$ quando $\tau_z = x_c \left|\vec{R}\right|$

quindi $x_c = \frac{\tau_z}{\left|\vec{R}\right|} = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i F_i}{\sum_{i=1}^{3} F_i}$

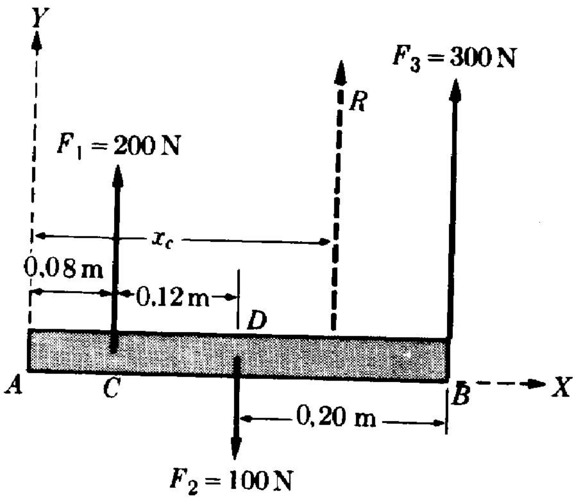
Nel caso tridimensionale le coordinate di C diventano

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}; y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}; z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i};$$

vettorialmente

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}$$

C é denominato centro delle forze parallele ESEMPIO



$$\left|\vec{R}\right| = \sum_{i=1}^{3} F_i = F_1 - F_2 + F_3 = 400N$$

$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i F_i}{\sum_{i=1}^{3} F_i} = 0.29$ m rispetto ad A

$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i F_i}{\sum_{i=1}^{3} F_i} = 0.09$ m rispetto ad D

$\vec{R}$ é applicata nello stesso punto indipendentemente dal sistema di riferimento

Centro di Massa

In prossimitá della terra su ogni particella di massa m_i di un corpo é agisce una forza denominata peso diretta verso il centro della terra

$$\vec{W}_i = m_i\vec{g}$$

In presenza di un corpo non molto esteso, le forze $\vec{W}_i$ sono fra loro parallele

$$\vec{W} = \sum_{i=1}^{n} \vec{W}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{g}$$

Dove $\vec{W}$ é il risultante delle forze peso applicato in un punto - denominato centro di massa- definito da

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i(m_i g)}{\sum_{i=1}^{n} m_i g} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i m_i$$

Il centro di massa é indipendente dal sistema di riferimento ma dipende esclusivamente dalla massa delle particelle e dalla loro posizione relativa.

In presenza di un corpo continuo costituito da particelle di massa infinitesima

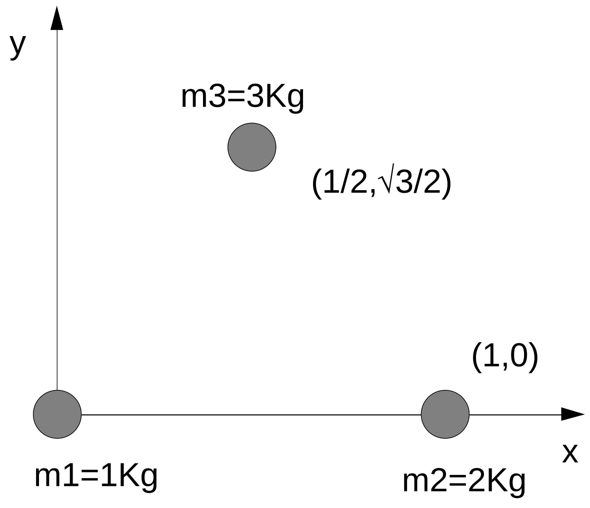
$$\vec{r}_c = \lim_{\Delta m \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i} = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm}$$

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M}\int \vec{r} dm$$

Nei corpi omogenei il centro di massa giace sull'asse di simmetria ove presente. Esempio:

- sfera: c.m. coincide con centro geometrico
- cono,piramide: c.m. lungo asse di simmetria ad $\frac{1}{4}h$ dalla base

ESEMPIO:

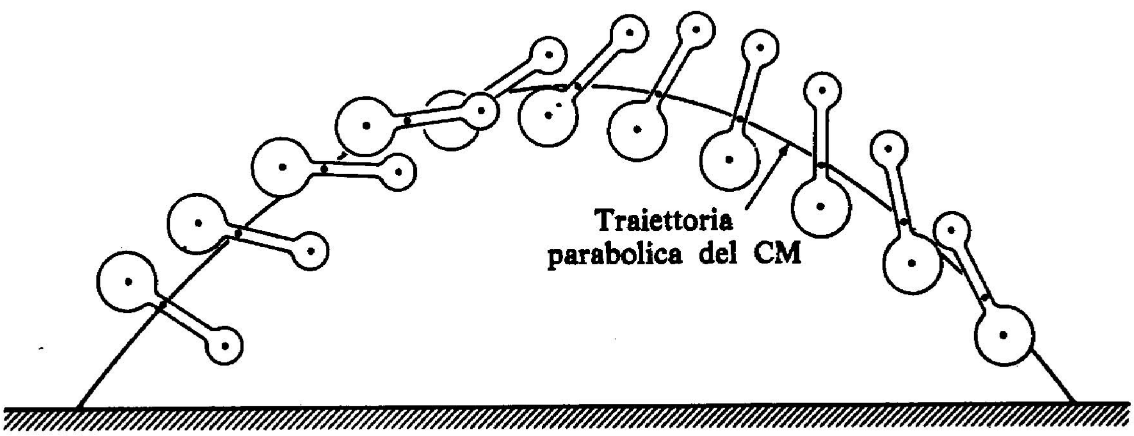


Determinare le coordinate del centro di massa

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{3} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{3} m_i} = \frac{7}{12} m$$
$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^{3} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{3} m_i} = \frac{\sqrt{3}}{4} m$$

Perché c.m. non coincide con il centro geometrico?

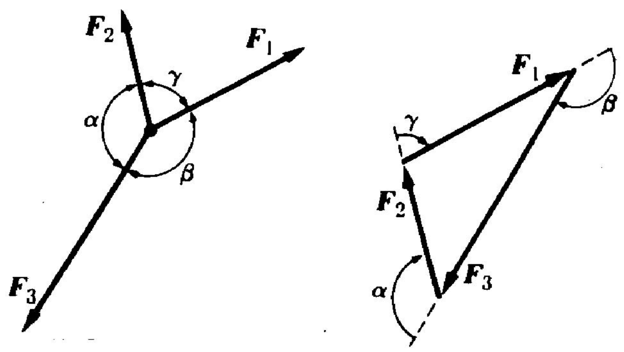
In un corpo in moto (rotatorio+traslatorio) il c.m. si muove come si muoverebbe un singolo punto materiale di massa pari alla massa del corpo soggetto alle stesse forze esterne



Si puó determinare il centro di massa anche per corpi non rigidi il centro di massa coincide con il centro di gravitá (il punto dove agisce la risultante delle forze di gravitá) quando il corpo non é molto esteso

Equilibrio di una particella

una particella si trova in equilibrio se $\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = 0$ cioé $\sum_{i=1}^{n} F_x = 0; \sum_{i=1}^{n} F_y = 0; \sum_{i=1}^{n} F_z = 0$ Quando su una particella agiscono tre forze, affinché la particella si trovi in equilibrio le tre forze devono essere complanari



$$\frac{F_1}{\sin\alpha} = \frac{F_2}{\sin\beta} = \frac{F_3}{\sin\gamma}$$

Equilibrio di un corpo rigido

Un corpo rigido si trova in equilibrio meccanico quando non é soggetto ad accelerazioni lineari e angolari, cioé

- la somma vettoriale di tutte le forze esterne é nulla

$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \cdots = 0$$

$$\begin{aligned} F_x &= F_1x + F_2x + F_3x + \cdots = 0 \\ F_y &= F_1y + F_2y + F_3y + \cdots = 0 \\ F_z &= F_1z + F_2z + F_3z + \cdots = 0 \end{aligned}$$

- la somma vettoriale di tutti i momenti delle forze esterne che agiscono sul corpo é nulla

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 + \cdots = 0$$

$$\begin{aligned} \tau_x &= \tau_1x + \tau_2x + \tau_3x + \cdots = 0 \\ \tau_y &= \tau_1y + \tau_2y + \tau_3y + \cdots = 0 \\ \tau_z &= \tau_1z + \tau_2z + \tau_3z + \cdots = 0 \end{aligned}$$

Qualora le forze esterne siano complanari (piano xy), le sei equazioni scalari si riducono a tre equazioni $F_x = 0; F_y = 0; \tau_z = 0$

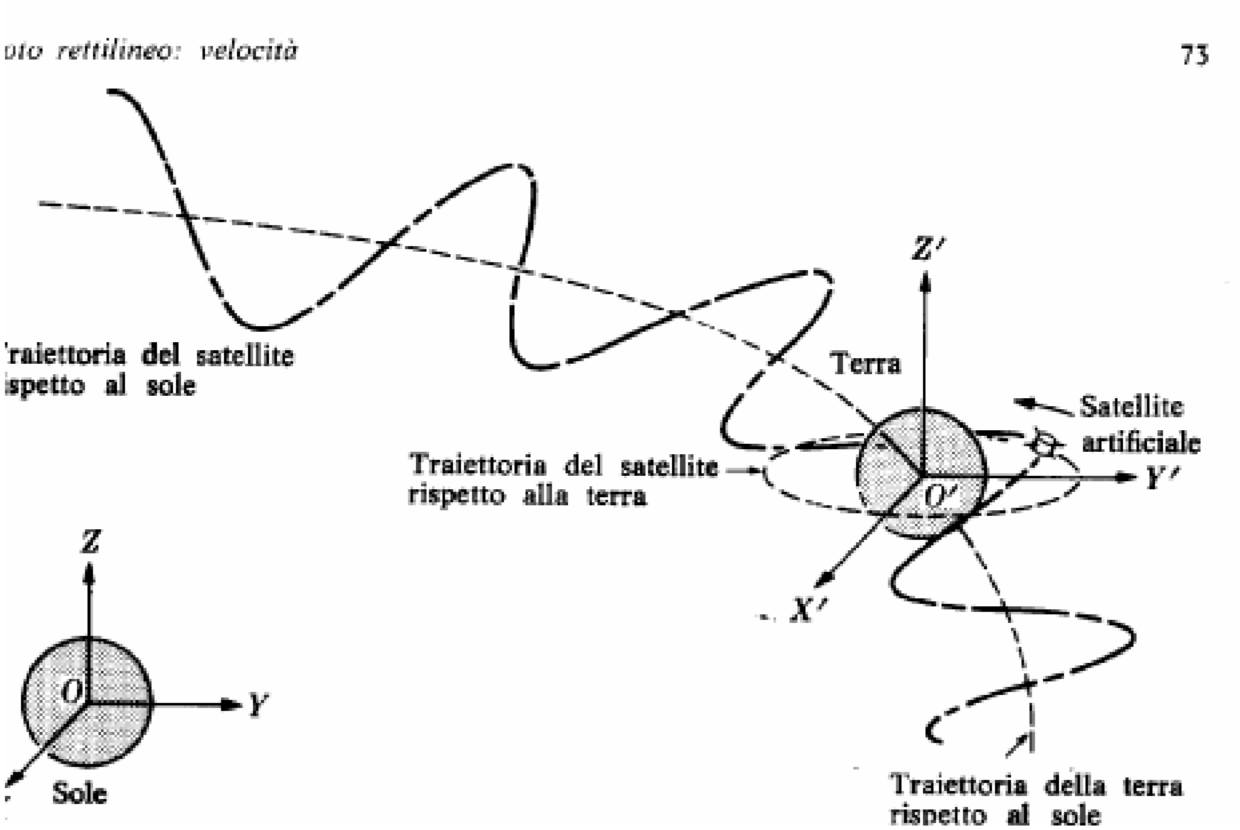
5 Cinematica

La *cinematica* é quel ramo della dinamica che descrive il moto dei corpi.

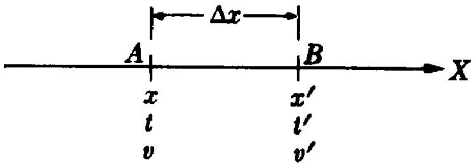
La *dinamica* studia la relazione tra il moto di un corpo e le cause che lo producono

Si considera in generale il moto di un oggetto molto piccolo -denominato particella o punto materiale- per evitare moti rotazionali o vibrazionali

Per descrivere il moto di un oggetto si deve definire il sistema di riferimento XYZ. Diversi sistemi di riferimento osservano in generale diversi moti di uno stesso oggetto



Moto rettilineo: velocitá



La traiettoria é una linea retta

$$v_{media} = \frac{x\prime - x}{t\prime - t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Velocitá istantanea

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{media} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\boxed{v(t) = \frac{dx(t)}{dt}}$$

La velocitá istantanea é la derivata dello spostamento rispetto al tempo

il segno di v indica il verso lungo la retta orientata

Se é noto $v = v(t)$, integrando

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v(t)dt$$
$$\int_{x_0}^{x} dx = x - x_0$$
$$\boxed{x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)dt}$$

Le dimensioni di v sono $[L][T]^{-1}$ nel S.I. $\frac{m}{s}$

NOTA: Verificare sempre l'omogeneitá dimensionale delle equazioni scritte e indicare sempre le unitá di misura nella risoluzione dei problemi

ESEMPIO: Una particella si muove lungo una retta orientata in accordo con la legge oraria $x = 5t^2+1$. Sia $t_0 = 2s$ calcolare

a)velocitá media tra t_0 e 3s

$$v_{media} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0} = 25\frac{m}{s}$$

b)velocitá media tra t_0 e 2.1s

$$v_{media} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 20.5\frac{m}{s}$$

c)velocitá media tra t_0 e 2.001s

$$v_{media} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 20.005\frac{m}{s}$$

d)velocitá media tra t_0 e 2.00001s

$$v_{media} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 20.00005\frac{m}{s}$$

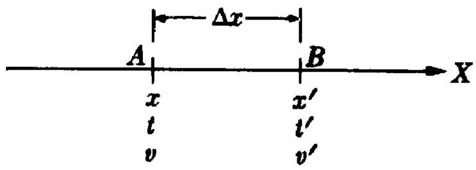
e)velocitá istantanea

$$v = \frac{dx}{dt} = 10t$$
$$v_{t=t_0} = 20\frac{m}{s}$$

Moto rettilineo:accelerazione

Se $v = costante \Rightarrow$ moto uniforme

Nel caso di velocitá variabile



Si definisce l'accelerazione media

$$a_{media} = \frac{v\prime - v}{t\prime - t} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

la variazione della velocitá per unitá di tempo nell'intervallo Δt

Accelerazione istantanea

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} a_{media} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$
$$a = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{dx(t)}{dt}) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

L'accelerazione istantanea é la derivata della velocitá istantanea rispetto al tempo

Se $a = costante \Rightarrow$ moto uniformemente accelerato

Se é noto $a = a(t)$, risulta

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a(t)dt$$
$$\int_{v_0}^{v} dv = v - v_0$$
$$v = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)dt$$

Se é noto $a = a(x)$,risulta

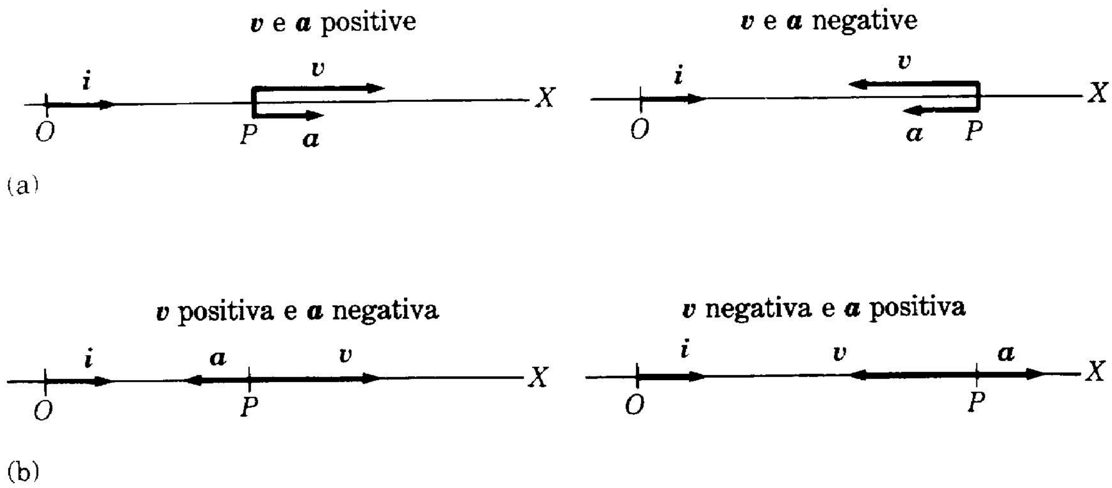
$$dv = a(x)dt$$
$$v = \frac{dx}{dt}$$
$$vdv = va(x)dt = a(x)dt\frac{dx}{dt} = a(x)dx$$

Integrando

$$\int_{v_0}^{v} v dv = \int_{x_0}^{x} a(x) dx$$
$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = \int_{x_0}^{x} a(x) dx$$

Le dimensioni di a sono $[L][T]^{-2}$ nel S.I. $\frac{m}{s^2}$

Moto accelerato e decelerato



- *Moto accelerato* $va > 0$
- *Moto ritardato* $va < 0$

In forma vettoriale

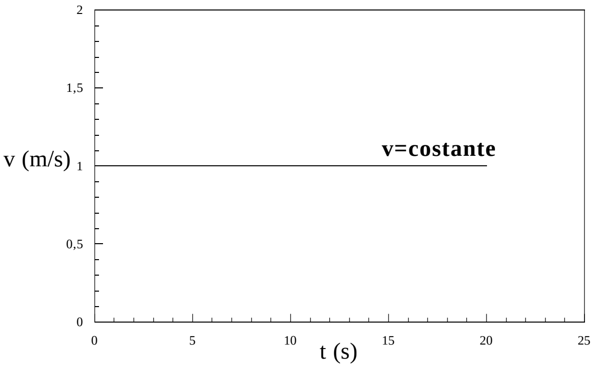
$$\vec{v} = \hat{i}\frac{dx}{dt}$$
$$\vec{a} = \hat{i}\frac{dv}{dt}$$

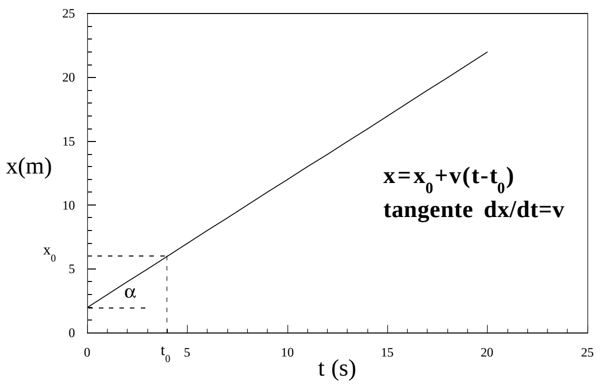
Moto rettilineo uniforme

$$\frac{dv}{dt} = 0;\ v = cost$$

quindi

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)dt = x_0 + v\int_{t_0}^{t} dt = x_0 + v(t - t_0)$$





$v = \tan\alpha$

Moto rettilineo uniformemente accelerato

$$a = \frac{dv}{dt} = costante$$

Si ha quindi

$$v = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)dt = v_0 + a\int_{t_0}^{t} dt = v_0 + a(t - t_0)$$

$$
\begin{aligned}
x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)dt = x_0 + \int_{t_0}^{t} [v_0 + a(t - t_0)]dt = \\
= x_0 + \int_{t_0}^{t} v_0 dt + \int_{t_0}^{t} a(t - t_0)dt = \\
= x_0 + v_0 \int_{t_0}^{t} dt + a \int_{t_0}^{t} (t - t_0)dt = \\
= x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2
\end{aligned}
$$

Nel caso $t_0 = 0$ e $x_0 = 0$ si ottiene

$$v = v_0 + at \;\; x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

consistenza dimensionale

$$[L] = [L][T]^{-1}[T] + [L][T]^{-2}[T]^2 = [L]$$

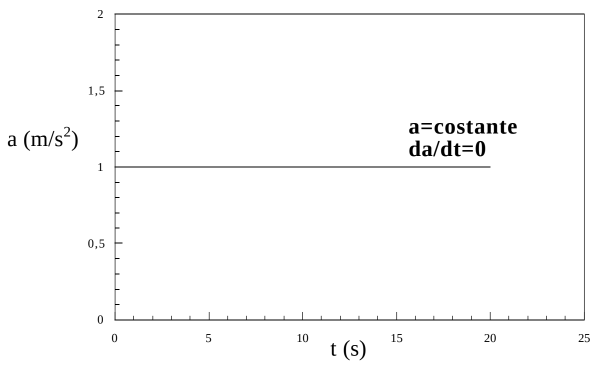
Ricordando che

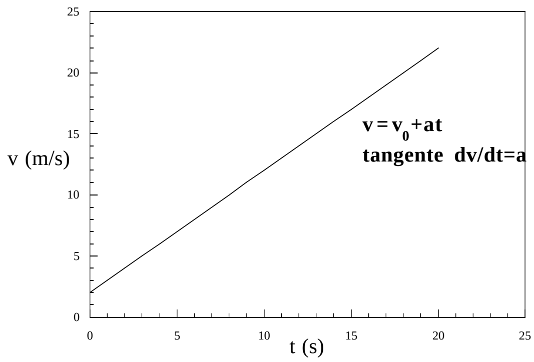
$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = \int_{x_0}^{x} a(x)dx$$

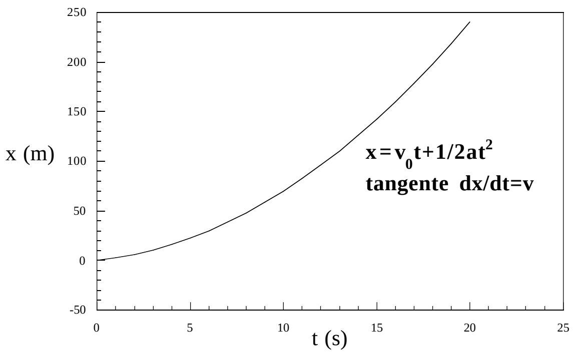
qualora risulti $a = cost$ si ha

$$
\begin{gathered}
\tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}v_0^2 = a(x - x_0) \\
v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)
\end{gathered}
$$

Graficamente







ESEMPIO: Sia data la posizione (m) lungo una retta orientata in funzione del tempo (s) di una particella

$$x = 2t^3 + 5t^2 + 5$$

determinare a,v,a_m e v_m tra gli istanti 2 e 3

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d(2t^3+5t^2+5)}{dt} = 6t^2 + 10t(\frac{m}{s})$$
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(6t^2+10t)}{dt} = 12t + 10(\frac{m}{s^2})$$

a $t = 2s$

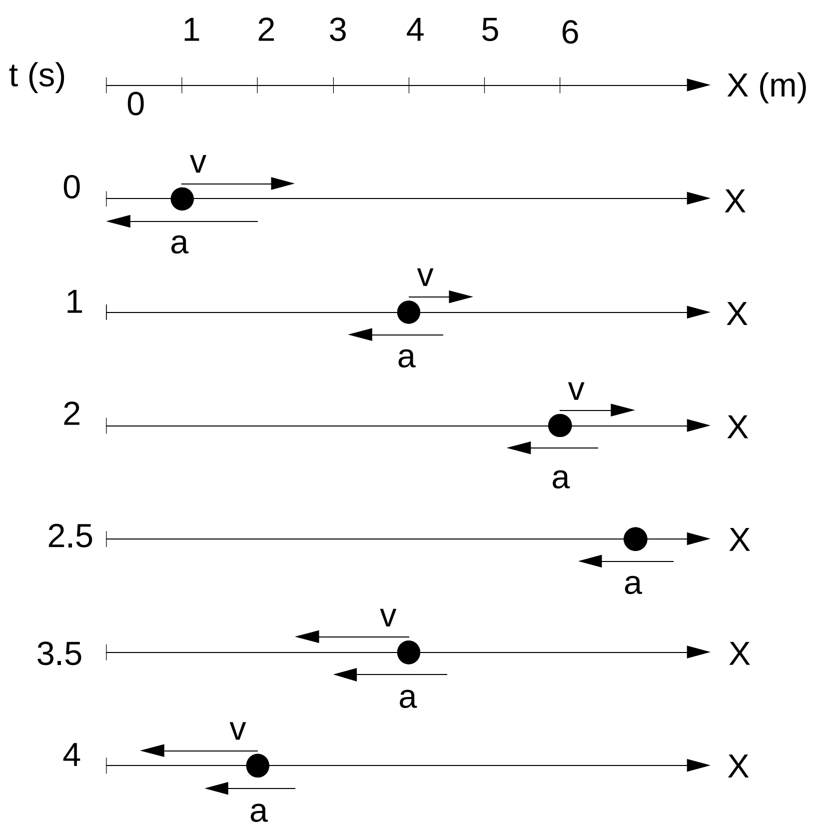
$$x = 41m; v = 44\frac{m}{s}; a = 34\frac{m}{s^2}$$

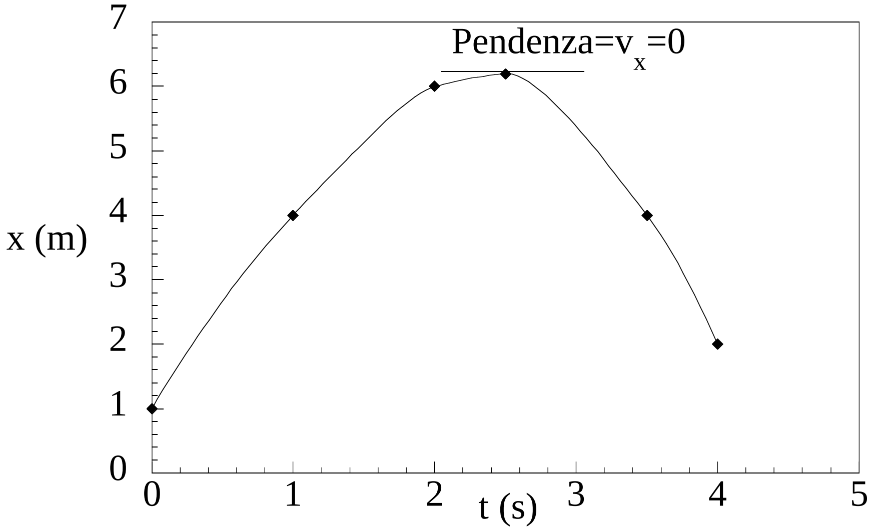
a $t = 3s$

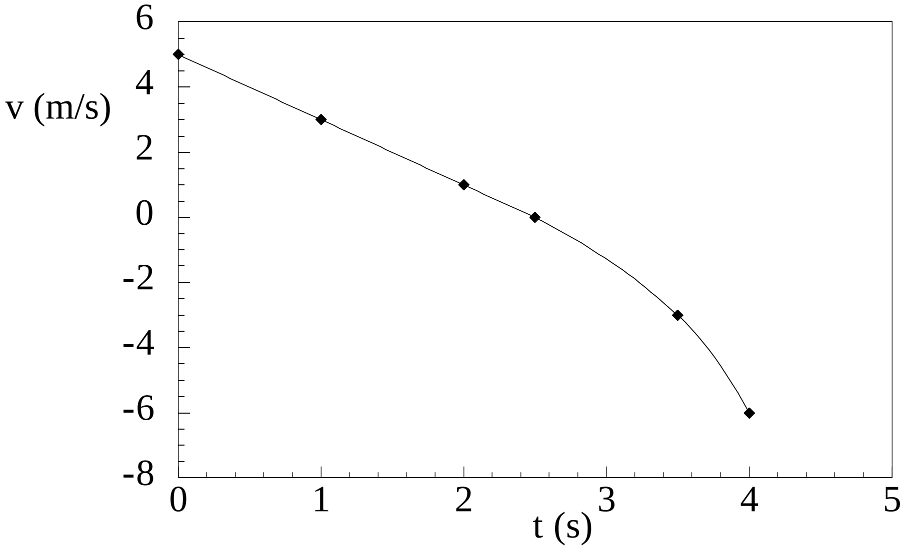
$$x\prime = 104m; v\prime = 84\frac{m}{s}; a\prime = 46\frac{m}{s^2}$$

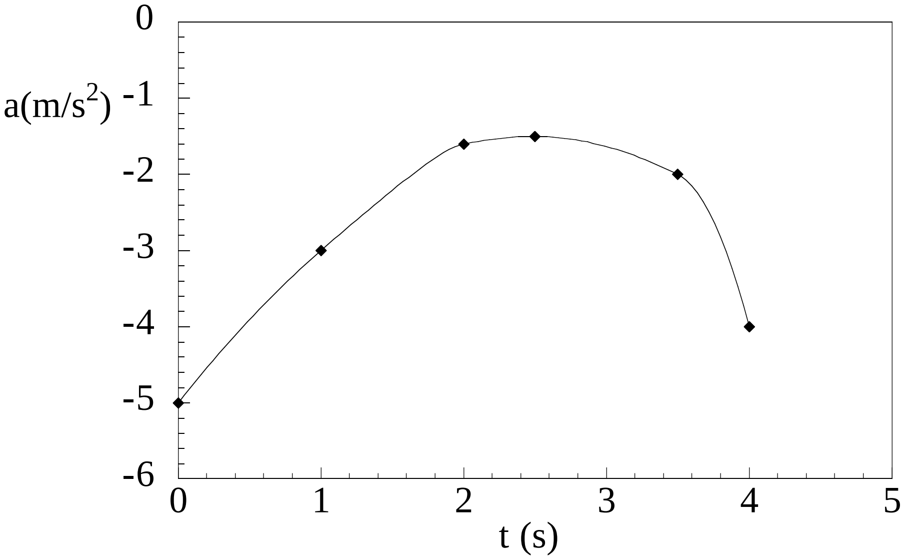
$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 63(\frac{m}{s})$$
$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 40(\frac{m}{s^2})$$

ESEMPIO:Moto in una dimensione

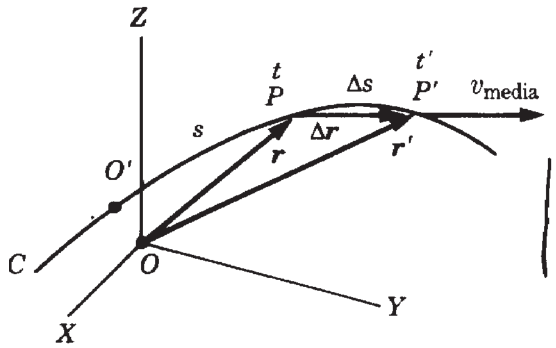



Pendenza=v_x=0
x (m)
t (s)
0
1
2
3
4
5
6
7
0
1
2
3
4
5


v (m/s)
t (s)
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
0
1
2
3
4
5


a(m/s^2)
t (s)
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
0
1
2
3
4
5

Moto curvilineo: velocitá

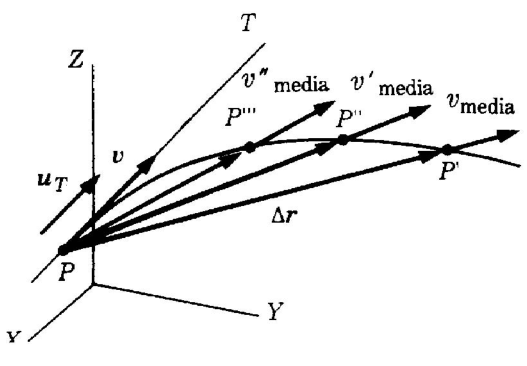


dove

- s=spostamento lungo la traiettoria
- Δs=arco di curva
- $\Delta\vec{r} = \vec{r}\prime - \vec{r}$ vettore spostamento

si definisce

$$\vec{v}_{media} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$
$$\vec{v}_{media} \parallel \Delta\vec{r}$$



$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

in forma cartesiana

$$\vec{v} = v_x \hat{u}_x + v_y \hat{u}_y + v_z \hat{u}_z$$

dove

$$v_x = \frac{dx}{dt};\ v_y = \frac{dy}{dt};\ v_z = \frac{dz}{dt};$$
$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Considerando lo spostamento del punto lungo la traiettoria si ha:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{5.1}$$

Poiché $\left|\vec{\Delta r}\right| \cong \Delta s$ risulta

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \hat{u}_T$$

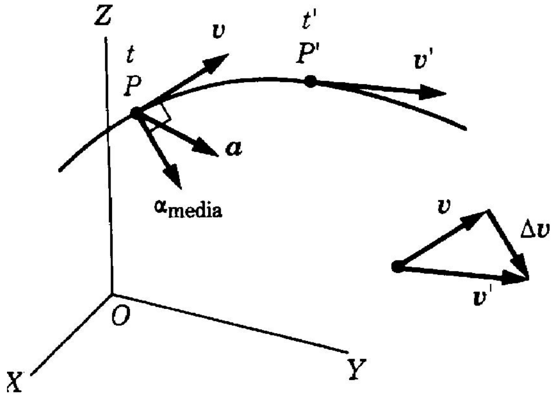
$\hat{u}_T$ versore tangente alla traiettoria inoltre

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v$$

si puó scrivere l'eq. (5.1) come

$$\boxed{\vec{v} = \hat{u}_T \frac{ds}{dt} = \hat{u}_T v}$$

Moto curvilineo: accelerazione



Si definisce

$$\vec{a}_{media} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$
$$\vec{a}_{media} \parallel \Delta\vec{v}$$

e l'accelerazione istantanea

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

- l'accelerazione é un vettore avente la stessa direzione della variazione istantanea di velocitá
- é diretta verso la concavitá
- in generale non é né tangente né perpendicolare alla traiettoria

In forma cartesiana

$$\vec{a} = a_x \hat{u}_x + a_y \hat{u}_y + a_z \hat{u}_z$$

dove

$$a_x = \frac{dv_x}{dt};\ a_y = \frac{dv_y}{dt};\ a_z = \frac{dv_z}{dt};$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Noto $\vec{a} = \vec{a}(t)$ per ottenere $\vec{v}$ e $\vec{r}$ si integra $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ e $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)dt$$
$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)dt$$

ottenendo

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)dt}$$
$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)dt}$$

Corpi in caduta libera

Tutti i corpi in prossimitá della terra ($h \ll R_T$) cadono con la stessa accelerazione, indipendentemente dal loro peso e dalla loro forma

$$\boxed{\vec{g} = -9.8\hat{u}_z(\frac{m}{s^2})}$$

$\vec{g}$ é diretta verso il centro della terra
Aristotele ($v \propto peso$) $\Rightarrow$ Galileo (v indipendente dal peso)

ESEMPIO: caduta libera. Un oggetto cade partendo da fermo. Determinare posizione e velocitá dopo 1,2 e 4s.

Scegliamo l'origine nel punto di partenza. Si avrá $z = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$

t	z	v	a
s	m	m/s	m/s2
0	0	0	-9,8
1	-4,9	-9,8	-9,8
2	-19,6	-19,6	-9,8
3	-44,1	-29,4	-9,8
4	-78,4	-39,2	-9,8

$$\begin{aligned} t = 1s \Rightarrow \qquad & z = -4.9m \\ & v_z = v_{z_0} - gt = -9.8\tfrac{m}{s} \\ t = 2s \Rightarrow \qquad & z = -19.6m \\ & v_z = -19.6\tfrac{m}{s} \\ t = 3s \Rightarrow \qquad & z = -44.1m \\ & v_z = -29.4\tfrac{m}{s} \\ t = 4s \Rightarrow \qquad & z = -78.4m \\ & v_z = -39.2\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

Moto con accelerazione costante

Se $\vec{a} = \overrightarrow{cost}$ risulta

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}; \quad d\vec{v} = \vec{a}dt$$

integrando

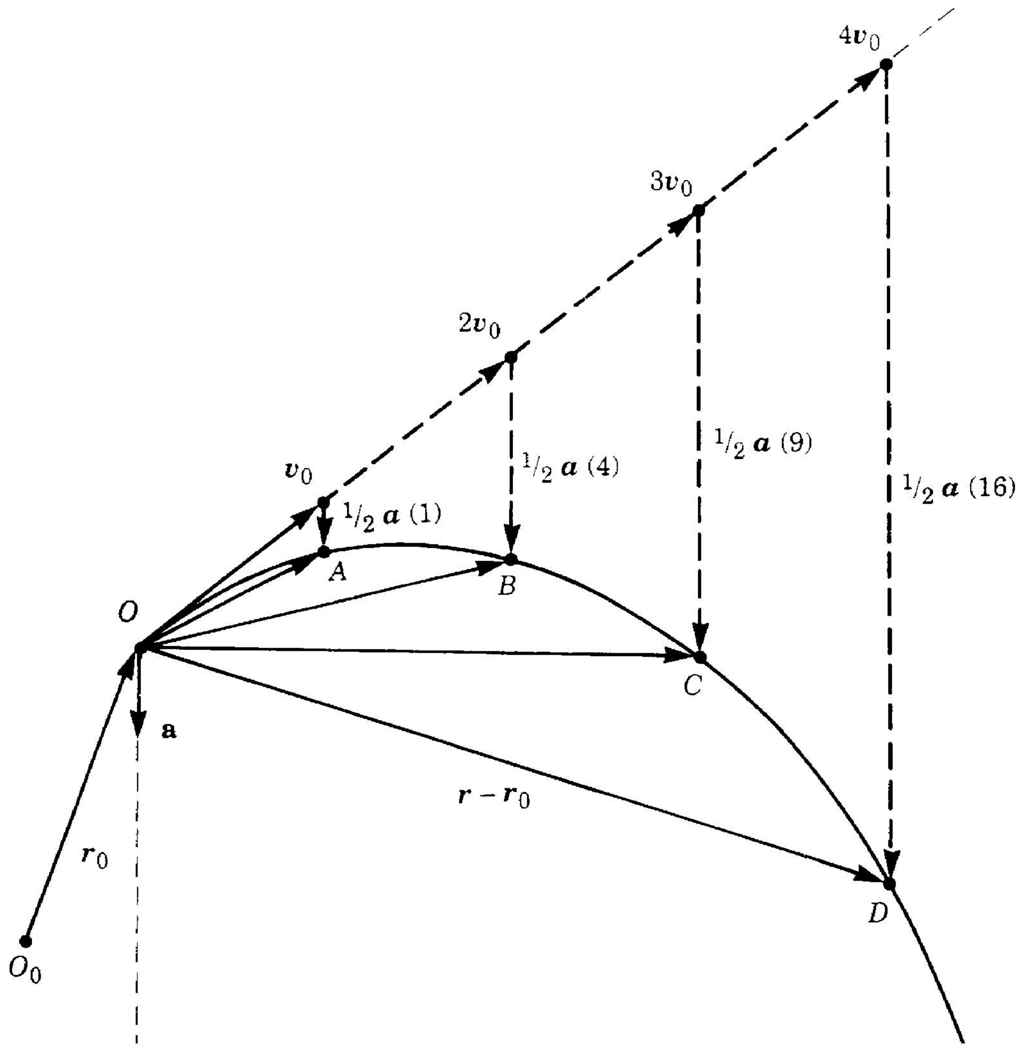
$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \int_{t_0}^{t} \vec{a}dt$$
$$\vec{v} - \vec{v}_0 = \vec{a}\int_{t_0}^{t} dt$$
$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0)} \tag{5.2}$$

$\vec{v}$ appartiene al piano individuato da $\vec{v}_0$ e $\vec{a}$
inoltre

$$\vec{v} = \tfrac{d\vec{r}}{dt}; \quad d\vec{r} = \vec{v}dt$$
$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_{t_0}^{t} [\vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0)]dt$$
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\int_{t_0}^{t} dt + \vec{a}\int_{t_0}^{t}(t - t_0)dt$$

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2} \tag{5.3}$$

L'estremo di $\vec{r}$ giace nel piano $\vec{v}_0$ e $\vec{a}$

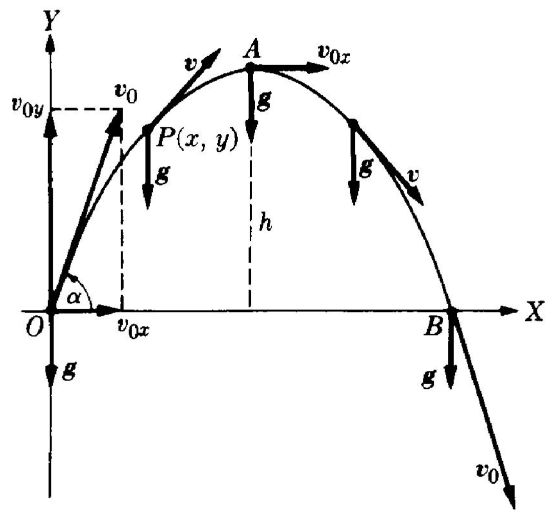


Quindi se $\vec{a} = cost$ si ha

1. moto in un piano

2. moto parabolico $y = ax^2 + bx + c$

Moto dei proiettili



Si ha

$$\vec{a} = \vec{g} = -\hat{u}_y g$$

e

$$\vec{v}_0 = \hat{u}_x v_{0_x} + \hat{u}_y v_{0_y}$$

dove

$$v_{0_x} = v_0 \cos\alpha$$
$$v_{0_y} = v_0 \sin\alpha$$

Dalla eq.(5.2) ponendo $t_0 = 0$ risulta

$$v_x = v_{0_x} = cost \tag{5.4}$$
$$v_y = v_{0_y} - gt \tag{5.5}$$

Dalla eq. (5.3) risulta

$$x = v_{0_x} t \tag{5.6}$$
$$y = v_{0_y} t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{5.7}$$

L'equazione del moto sostituendo la (5.6) nella (5.7) risulta

$$y = v_{0_y}\frac{x}{v_{0_x}} - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_{0_x}^2} = \frac{v_0 \sin\alpha}{v_0\cos\alpha}x - \frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}x^2 = \\ -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha$$

parabola passante per l'origine con concavitá rivolta verso il basso

Massima altezza

Ponendo $v_y = 0$ nella (5.5) si ottiene l'istante in cui si raggiunge la massima altezza

$$t_h = \frac{v_{0_y}}{g} = \frac{v_0\sin\alpha}{g} \tag{5.8}$$

sostituendo t_h nella (5.7) otteniamo la massima altezza raggiunta

$$h = v_{0_y}t_h - \frac{1}{2}gt_h^2 = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g} \tag{5.9}$$

Il valore piú elevato della massima altezza é ottenuto per $\alpha = \frac{\pi}{2}$

Tempo di volo

il tempo di volo é il doppio del tempo impiegato a raggiungere la massima altezza. Dalla (5.8)

$$t_{volo} = 2t_h = \frac{2v_0\sin\alpha}{g} \tag{5.10}$$

Gittata

Sostituendo t_{volo} nella (5.6) si ottiene la gittata

$$R = v_{0_x}t_{volo} = v_{0_x}\frac{2v_0\sin\alpha}{g} = \frac{2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g} \tag{5.11}$$

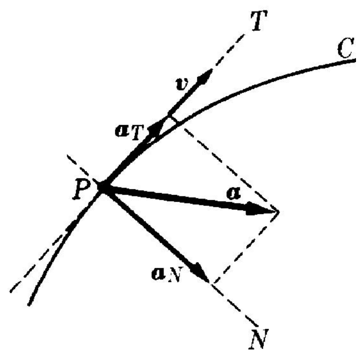
La massima gittata R_{max} é ottenuta quando $\alpha = \frac{\pi}{4}$

$$R_{max} = \frac{v_0^2}{g}; \quad h = \frac{v_0^2}{4g}$$

I risultati ottenuti sono validi quando

1. gittata bassa rispetto alla curvatura della terra
2. $h \ll R_T$ per assumere $g = cost$
3. si trascura l'attrito dell'aria
4. si trascura il moto di rotazione della terra

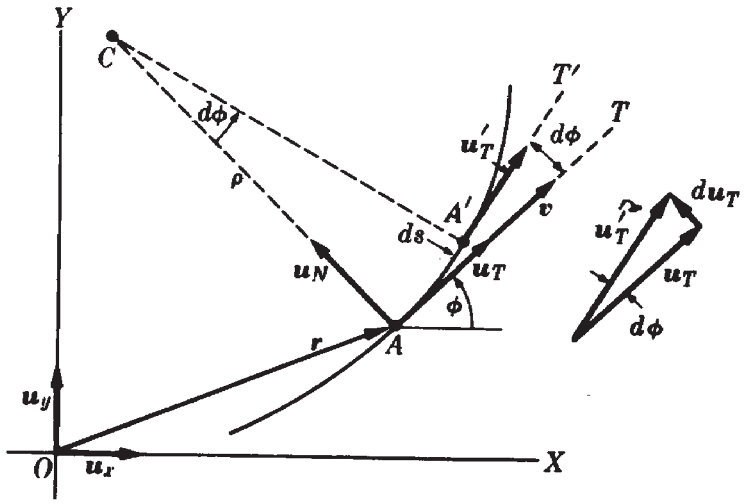
Accelerazione tangenziale e normale



$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

- $\vec{a}_t$=accelerazione tangenziale (variazione $|\vec{v}|$)
- $\vec{a}_n$=accelerazione normale (variazione direzione di $\vec{v}$)

Infatti



Poiché $\vec{v} = \hat{u}_t v$ risulta

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\hat{u}_t v)}{dt} = \hat{u}_t \frac{dv}{dt} + \frac{d\hat{u}_t}{dt} v \tag{5.12}$$

essendo $\sin\alpha \approx \alpha$ per $\alpha \to 0$ risulta

$$|d\hat{u}_t| = |\hat{u}_t| \sin d\phi \approx |\hat{u}_t|\, d\phi = d\phi \tag{5.13}$$

$$d\hat{u}_t = \hat{u}_n d\phi \tag{5.14}$$

$$\frac{d\hat{u}_t}{dt} = \hat{u}_n \frac{d\phi}{dt} \tag{5.15}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{d\phi}{ds} \tag{5.16}$$

Dalla definizione di angolo piano $d\phi = \frac{ds}{\rho}$, quindi

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{\rho}$$

sostituendo nella (5.16) risulta

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{v}{\rho}$$

sostituendo nella (5.15)

$$\frac{d\hat{u}_t}{dt} = \hat{u}_n \frac{v}{\rho}$$

l'accelerazione (5.12) risulta

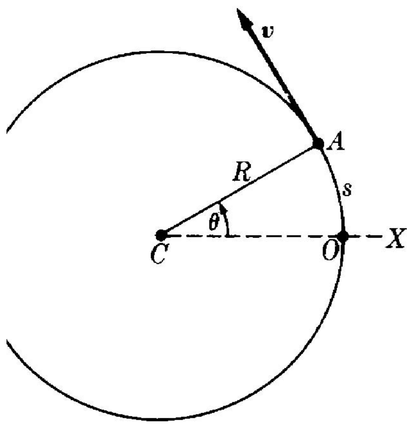
$$\boxed{\vec{a} = \hat{u}_t \frac{dv}{dt} + \hat{u}_n \frac{v^2}{\rho} = \hat{u}_t a_t + \hat{u}_n a_n}$$

$$\boxed{a_t = \frac{dv}{dt}}$$

$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{\rho}}$$

- moto circolare uniforme ($|\vec{v}| = cost$) $\Rightarrow a_t = 0$
- moto rettilineo (direzione $\vec{v} = cost$) $\Rightarrow a_n = 0$

Moto circolare:velocitá



risulta $s = R\theta$ e

$$\vec{v} = v\hat{u}_t = \frac{ds}{dt}\hat{u}_t = R\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_t$$

Si definisce la velocitá angolare ω

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}\ [s^{-1}]$$

$$v = \omega R$$

Se il moto é periodico si definiscono

- P=periodo(tempo necessario per compiere un giro)
- $\nu = \frac{1}{P}$=frequenza (numero di giri per unitá di tempo) - $s^{-1}, Hz, rpm, min^{-1}$

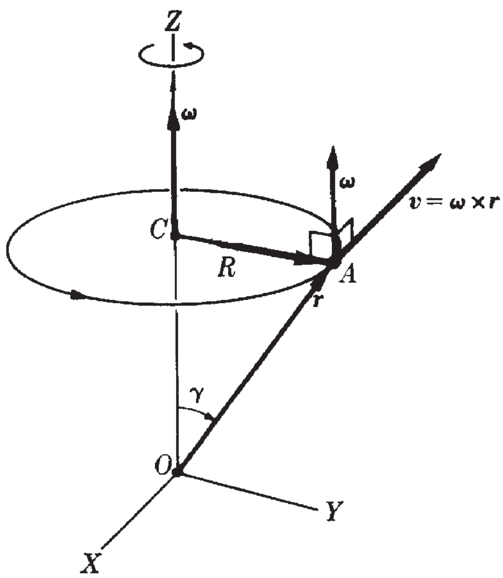
Se $\omega = cost$ il moto é circolare uniforme e risulta

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t} \omega dt = \omega \int_{t_0}^{t} dt$$
$$\theta = \theta_0 + \omega(t - t_0)$$

ponendo $\theta_0 = 0$ e $t_0 = 0$ si ha $\theta = \omega t$

$$\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{2\pi}{P} = 2\pi\nu$$

Si definisce il vettore $\vec{\omega}$ come in figura

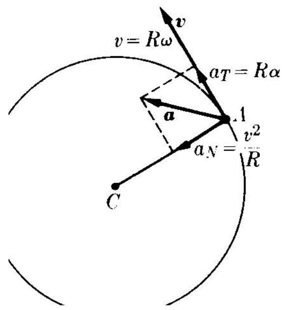


risulta

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{R}} \tag{5.17}$$

$$v = \omega r \sin \gamma = \omega R$$

Moto circolare:accelerazione



Risulta $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$ dove

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt}$$

L'accelerazione $\vec{a}_n$ é denominata *accelerazione centripeta*
si definisce l'accelerazione angolare α (analogamente alla lineare)

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

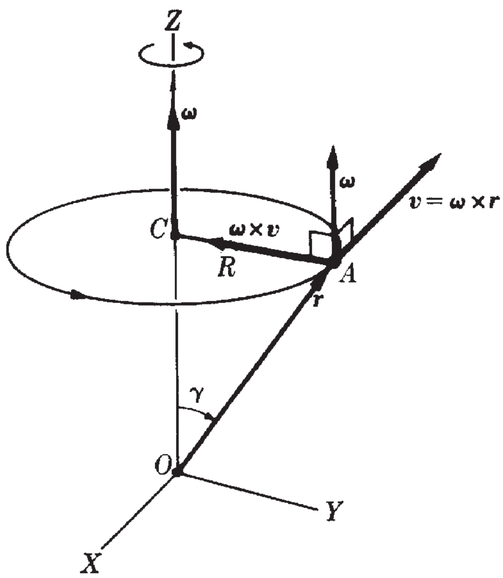
e vettorialmente

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Si ha

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} =$$
$$= \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (5.18)$$

Nel moto circolare uniforme risulta $\alpha = 0$,$a_t = 0$ e

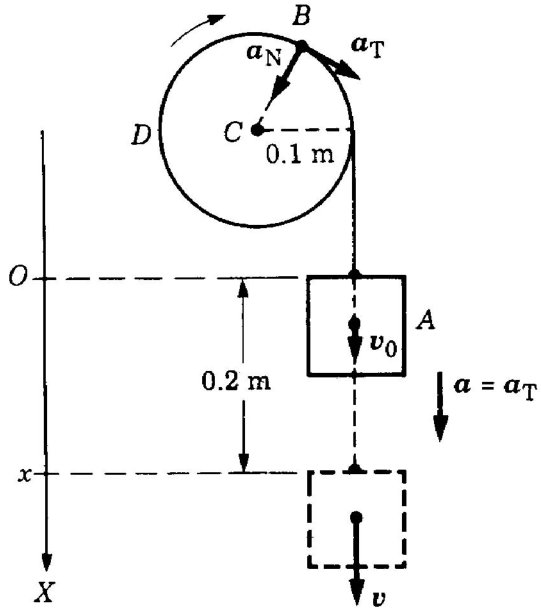


$$\vec{a} = \vec{a}_n = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

Poiché $\vec{\omega} \perp \vec{v}$ si ha

$$|\vec{a}| = \omega v = \omega^2 R$$

ESEMPIO:Determinare a_n e a_t dei punti sul bordo del disco, sapendo che a $t = 0$ risulta $v = 0.04\ \frac{m}{s}$ e che a $t = 2s$ risulta $x = 0.2\ m$



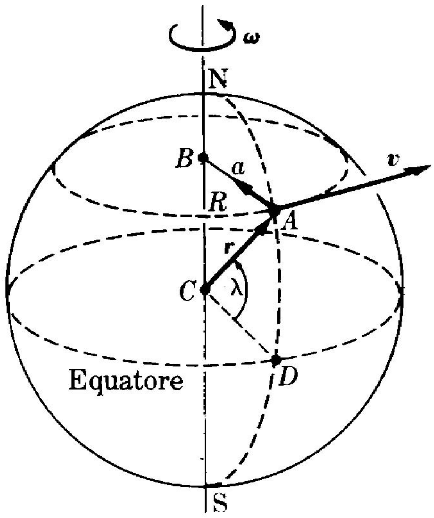
Si ha

$$x = v_O t + \frac{1}{2}at^2 = 0.04t + \frac{1}{2}at^2 [m]$$

risolvendo rispetto ad a e introducendo $t = 2s$,$x = 0.2\ m$, si ottiene $a = 0.06\ \frac{m}{s^2}$,quindi

$$\begin{gathered} x = 0.04t + 0.03t^2\ [m] \\ v = \frac{dx}{dt} = 0.04 + 0.06t\ [\frac{m}{s}] \\ a_t = \frac{dv}{dt} = 0.06\ [\frac{m}{s^2}] \\ a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(0.04+0.06t)^2}{0.1} = \\ = 0.016 + 0.048t + 0.036t^2\ [\frac{m}{s^2}] \end{gathered}$$

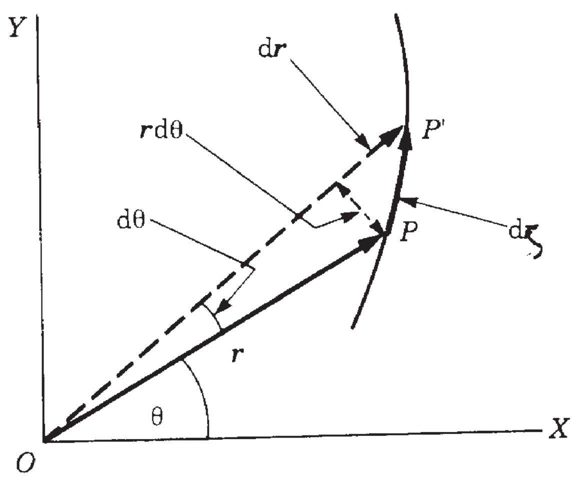
ESEMPIO: Determinare in funzione della latitudine,$\vec{v}$ e $\vec{a}$ di un punto posto sulla superficie terrestre.

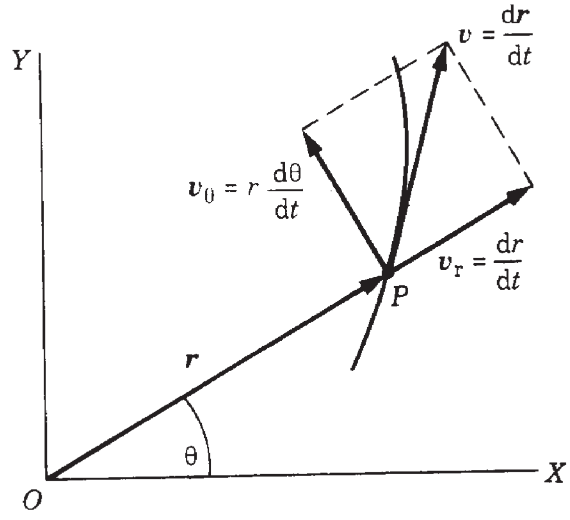


Si ha
$R = r\cos\lambda = \overline{BA}$ dove λ=latitudine
$v = \omega R = \omega r\cos\lambda$ tangente alla circonferenza
$a = \omega^2 R = \omega^2 r\cos\lambda$ accelerazione centripeta
Poiché $r = 6370\times 10^3 m$ e $\omega = 7.292\times 10^{-5}\ s^{-1}$, risulta

$$v = 459\cos\lambda\ [\tfrac{m}{s}]$$
$$a = 3.34\times 10^{-2} \approx \tfrac{3}{1000}\ g\ \ [\tfrac{m}{s^2}]$$

Moto curvilineo generico nel piano





Scomponendo il moto da P a $P\prime$ lungo le direzioni perpendicolari individuate da $d\vec{r}$ e $rd\theta$ si puó scomporre la velocitá in

- $v_r = \frac{dr}{dt}$ velocitá radiale
- $v_\theta = \frac{d\theta}{dt}r$ velocitá trasversale

ovvero

$$\boxed{\vec{v} = \hat{u}_r\frac{dr}{dt} + \hat{u}_\theta\frac{d\theta}{dt}r}$$

dove

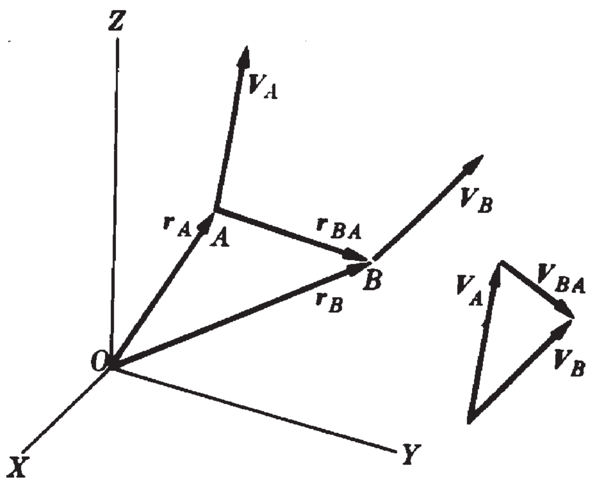
- $\hat{u}_r\frac{dr}{dt}$ é un vettore avente la direzione di $\vec{r}$ che tiene conto dello spostamento radiale
- $\hat{u}_\theta\frac{d\theta}{dt}r$ un vettore avente la direzione $\perp$ a $\vec{r}$ che tiene conto della variazione di direzione di $\vec{r}$, cioé dello spostamento angolare

Nel moto circolare é presente soltanto la componente trasversa $v_\theta = \frac{d\theta}{dt}r = \omega r$

6 Cinematica relativa

In passato si é ricercato un sistema di riferimento assoluto in quiete rispetto all'etere
Oggi si considerano sistemi di riferimento inerziali. Essi sono in moto rettilineo uniforme rispetto alle stelle fisse.

Velocitá relativa



$$\vec{v}_A = \frac{d\vec{r}_A}{dt}; \quad \vec{v}_B = \frac{d\vec{r}_B}{dt}$$

La velocitá relativa di B rispetto ad A risulta

$$\vec{v}_{BA} = \frac{d\vec{r}_{BA}}{dt}$$

dove

$$\vec{r}_{BA} = \vec{r}_B - \vec{r}_A \tag{6.1}$$

essendo

$$\vec{r}_{BA} = -\vec{r}_{AB}$$

si ha

$$\vec{v}_{BA} = -\vec{v}_{AB}$$

cioé la velocitá di B rispetto ad A é uguale in modulo e direzione ma di verso opposto rispetto alla velocitá di A rispetto a B

Inoltre dalla (6.1) si ha

$$\frac{d\vec{r}_{BA}}{dt} = \frac{d\vec{r}_B}{dt} - \frac{d\vec{r}_A}{dt}$$

cioé

$$\vec{v}_{BA} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$

e

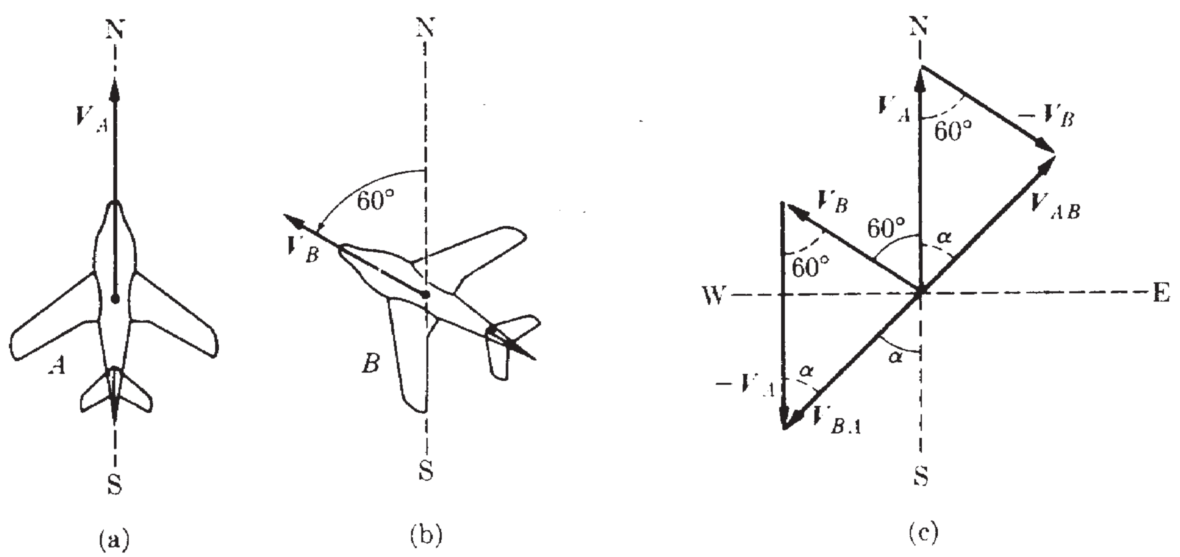
$$\frac{d\vec{v}_{BA}}{dt} = \frac{d\vec{v}_B}{dt} - \frac{d\vec{v}_A}{dt}$$

cioé

$$\vec{a}_{BA} = \vec{a}_B - \vec{a}_A$$

dove $\vec{a}_{BA}$ é l'accelerazione di B rispetto ad A

ESEMPIO: si abbiano due aerei



$$v_A = 300\ Kmh^{-1}; \quad v_B = 200\ Kmh^{-1}$$

Determinare le velocitá relative $\vec{v}_{AB}$ e $\vec{v}_{BA}$

Risulta

- $\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$ velocitá di A rispetto a B
- $\vec{v}_{BA} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$ velocitá di B rispetto a A

Si nota come $\vec{v}_{BA} = -\vec{v}_{AB}$

In modulo

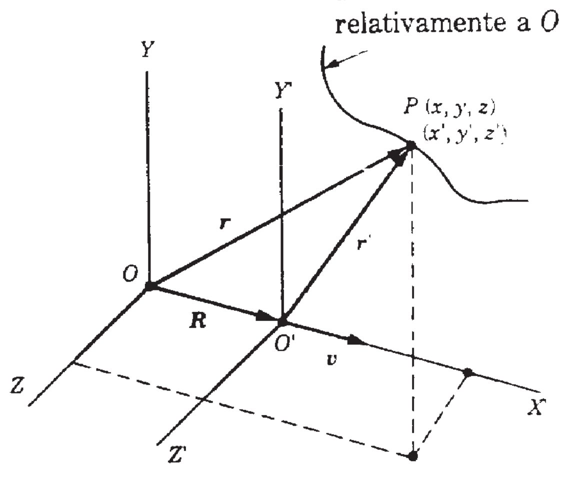
$$v_{AB} = \sqrt{v_A^2 + v_B^2 - 2v_A v_B \cos\frac{\pi}{3}} = 264.6\ Kmh^{-1}$$

in direzione

$$\frac{v_B}{\sin\alpha} = \frac{v_{AB}}{\sin\frac{\pi}{3}}$$

$$\sin\alpha = \frac{v_B \sin\frac{\pi}{3}}{v_{AB}} = 0.655; \quad \alpha = 40.7°$$

Moto relativo traslatorio uniforme. Trasformazione Galileana



$\vec{v} = cost$;
per $t = 0$ sia $O \equiv O'$
Sará $\vec{00'} = \vec{R} = \vec{v}t$ e quindi

$$\boxed{\vec{r} = \vec{v}t + \vec{r'}} \tag{6.2}$$

cioé $\vec{r'} = \vec{r} - \vec{v}t$
si suppone $\boxed{t = t'}$ e si definisce per P:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}; \quad \vec{V}' = \frac{d\vec{r'}}{dt}$$

derivando la (6.2) si ha

$$\boxed{\vec{V} = \vec{V}' + \vec{v}} \tag{6.3}$$

le cui componenti cartesiane sono

$$V'_{x'} = V_x - v_x; \quad V'_{y'} = V_y; \quad V'_{z'} = V_z$$

Le velocitá sono denominate

- $\vec{V}$: velocitá assoluta
- $\vec{V}'$: velocitá relativa
- $\vec{v}$: velocitá di trascinamento

L'accelerazione di P rispetto a O e O' risulta

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}; \quad \vec{a}' = \frac{d\vec{V}'}{dt}$$

derivando la (6.3) si ottiene

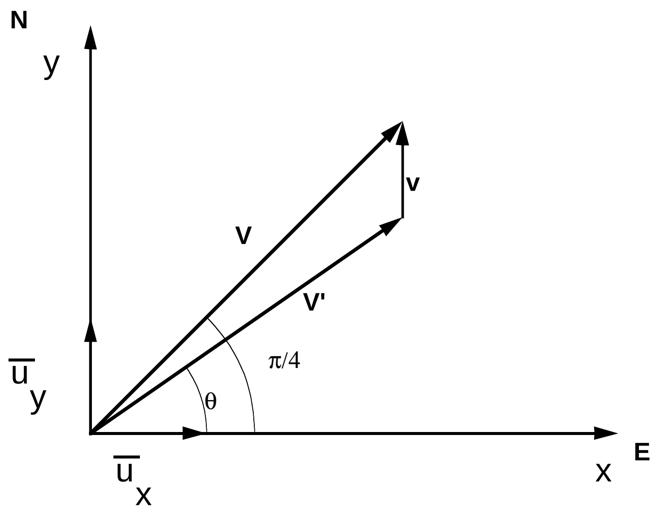
$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}'} \tag{6.4}$$

le cui componenti cartesiane sono

$$a'_{x'} = a_x; \quad a'_{y'} = a_y; \quad a'_{z'} = a_z$$

In accordo alla trasformazione Galileana l'accelerazione di una particella é la stessa per tutti gli osservatori in moto relativo traslatorio uniforme

ESEMPIO: Un aereo sta volando rispetto alla torre di controllo in direzione N-E a $V = 3\ \frac{km}{min}$ in presenza di un vento da S alla velocitá di 52 $\frac{km}{h}$. Calcolare la velocitá dell'aereo rispetto all'aria



S fisso rispetto a torre di controllo
S' in movimento come il vento

$$|\vec{v}| = 52\ \ \frac{km}{h}$$

$$\left|\vec{V}\right| = 3\ \ \frac{km}{min} = 180\ \ \frac{km}{h}$$

risulta

$$\vec{V}' = \vec{V} - \vec{v} = 180(\cos\frac{\pi}{4}\hat{u}_x + \sin\frac{\pi}{4}\hat{u}_y) - 52\hat{u}_y \quad \left(\frac{km}{h}\right)$$

Per determinare l'angolo θ si utilizza

$$\left|\vec{V}\right| \cos\frac{\pi}{4} = \left|\vec{V}'\right| \cos\theta$$
$$180 \cos\frac{\pi}{4} = 148 \cos\theta$$

quindi $\theta = 30.7°$

7 Dinamica di una particella

La cinematica studia il moto delle particelle senza occuparsi delle cause che lo generano

La dinamica studia la relazione tra il moto di un corpo e le cause di questo moto

Il moto di un corpo é il risultato diretto delle sue interazioni con gli altri corpi circostanti

Le interazioni sono espresse quantitativamente nei termini di un concetto chiamato *forza*

Lo studio della dinamica é fondamentalmente l'analisi della relazione tra le forze e i moti dei corpi

Principio di inerzia (Prima legge di Newton)

Lo studio del moto dei corpi é sempre stato difficoltoso in quanto:

- esiste sempre l'attrito
- la forza di gravitá agisce sempre
- é difficile isolare una particella

Aristotele (IV a.C.):'Un corpo in moto si arresta quando la forza che lo spinge cessa di agire'
Si pensava sbagliando ad un legame diretto

$$\textit{forza} \rightarrow \textit{velocitá}$$

Galilei (XV d.C.):'Un corpo permane nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme, a meno che forze agenti su di esso non lo costringano a cambiare stato'

Enunciato equivalente alla

$$\vec{F} = 0; \quad \vec{a} = 0 \quad (\vec{v} \neq 0)$$

sostanzialmente coincidente con il *principio di inerzia* (primo principio della dinamica; prima legge di Newton):

Una particella libera si muove sempre con velocitá costante, cioé senza accelerazione

Con il termine *particella libera* si intende una particella non interagente con altre particelle
L'osservazione del moto della particella é effettuato da un osservatore inerziale, cioé non soggetto a interazioni con l'esterno
Il sistema di riferimento solidale con esso é detto sistema di riferimento inerziale
Un sistema di riferimento inerziale é non accelerato e quindi non ruotante

Si definisce il sistema di riferimento delle stelle fisse come un ottimo sistema di riferimento inerziale
Ogni sistema di riferimento in moto traslatorio uniforme rispetto alle stelle fisse o ad un altro sistema di riferimento inerziale é a sua volta un sistema di riferimento inerziale

La trasformazione galileana collega sistemi di riferimento inerziali in moto traslatorio uniforme con velocitá $\vec{v}$ ($|\vec{v}| \ll c$)

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t \\ \vec{V}' = \vec{V} - \vec{v} \\ \vec{a}' = \vec{a} \end{cases}$$

La Terra non é un sistema di riferimento inerziale in quanto ruota intorno al proprio asse e intorno al Sole. Le accelerazioni sono:

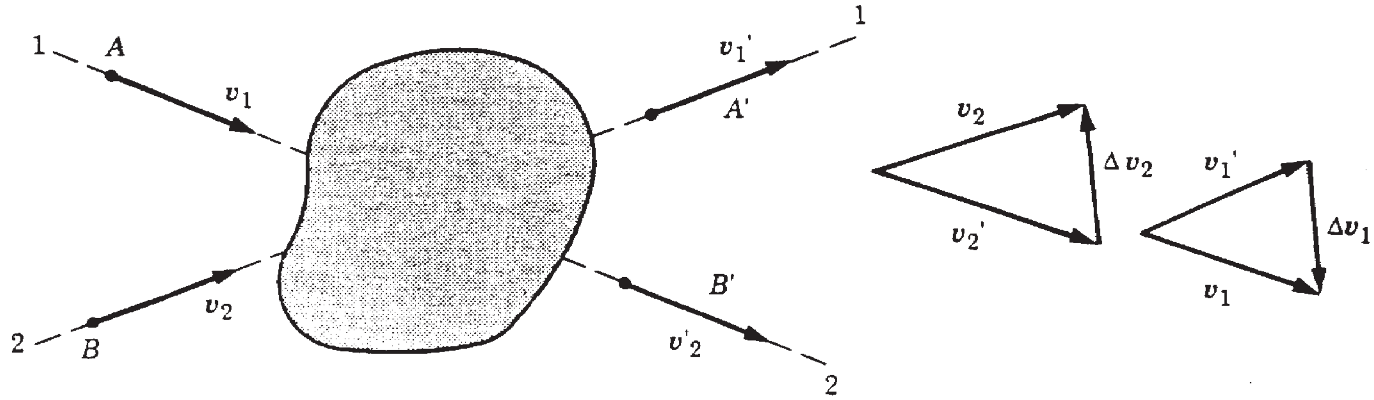
- $a_t \approx 0 \quad a_n = a = \omega^2 R = 0.6 \ \frac{cm}{s^2}$
  accelerazione nel moto attorno al Sole

- $a_t = 0 \quad a_n = a = \omega_T^2 R_T = 3.4 \ \frac{cm}{s^2}$
  accelerazione nel moto attorno al proprio asse

Il Sole non é un sistema di rifermento inerziale in quanto ruota intorno al centro della galassia con accelerazione $a = \omega^2 R = 3\ 10^{-8} \quad \frac{cm}{s^2}$
L'approssimazione del Sole a sistema di riferimento inerziale é molto migliore di quella della Terra
In molti casi gli effetti della rotazione della Terra sono trascurabili e i sistemi di riferimento solidali a osservatori terrestri possono essere considerati inerziali senza grande errore

Massa

Supponiamo che un sistema di riferimento inerziale osservi il moto di due particelle soggette soltanto alla loro mutua interazione, isolate dal resto del mondo



(a) (b)

Nell'intervallo $\Delta t = t' - t$ si ha

$$\Delta\vec{v}_1 = \vec{v}_1' - \vec{v}_1 \qquad \Delta\vec{v}_2 = \vec{v}_2' - \vec{v}_2$$

Sperimentalmente si determina che

$$\boxed{\Delta\vec{v}_1 = -K\Delta\vec{v}_2} \tag{7.1}$$

dove K è costante per ogni coppia di particelle

La relazione (7.1) non dipende da

- velocità delle particelle
- intervallo di tempo Δt
- traiettoria delle particelle

Scegliendo una particella come riferimento (0) e facendola interagire con le particelle (1),(2),(3),... in modo che $\Delta\vec{v}_0$ sia la variazione di velocità della particella (0), si determinano i valori K_i per ogni coppia 0-1,0-2,0-3,...
Si ricava:

$$\Delta\vec{v}_0 = -m_1\Delta\vec{v}_1 \;\; ; \;\; \Delta\vec{v}_0 = -m_2\Delta\vec{v}_2 \;\; ; \Delta\vec{v}_0 = -m_3\Delta\vec{v}_3 \;\; ; \ldots$$

$m_1, m_2, m_3, \ldots$ sono definite masse inerziali delle particelle (1),(2),(3),...nella unità della massa di riferimento $m_0 = 1$
Caratterizzano il comportamento dinamico dei corpi sottoposti a interazioni
La massa è una grandezza scalare

Si determina inoltre sperimentalmente che:

$$\Delta\vec{v}_1 = -\frac{m_2}{m_1}\Delta\vec{v}_2 \tag{7.2}$$

Massa inerziale e massa gravitazionale

La massa gravitazionale è misurata in un campo gravitazionale tramite la bilancia a bracci uguali:

- caratterizza l'intensità della attrazione gravitazionale
- è una proprietà statica dei corpi

Sperimentalmente si determina che la *massa inerziale coincide con la massa gravitazionale*
entrambe si misurano in Kg (SI)

La massa è una proprietà intrinseca dei corpi

Quantità di moto

Tramite il concetto di massa inerziale introduciamo una nuova grandezza fisica denominata *quantità di moto*:

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}} \quad [M][L][T]^{-1} \quad \frac{Kg\,m}{s}$$

È una quantità vettoriale che ha la stessa direzione della velocità e combina i due elementi che caratterizzano lo stato dinamico di una particella.

Il principio di inerzia può essere riformulato:
In un sistema di riferimento inerziale una particella libera si muove sempre con quantità di moto costante

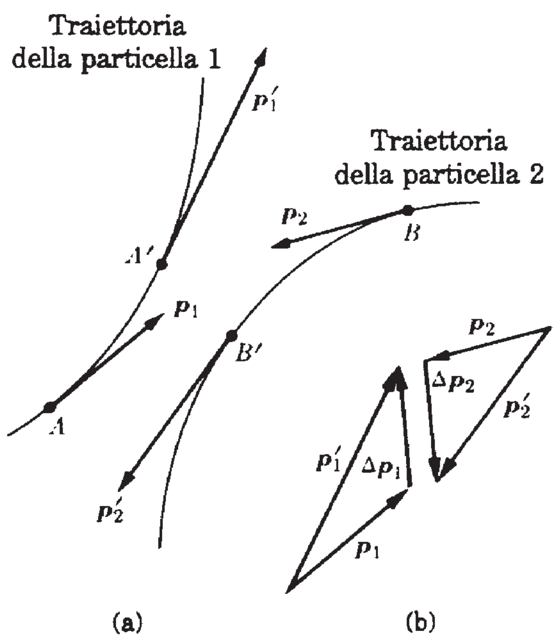
In un sistema costituito da n particelle di quantità di moto $\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1, \vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2, \ldots$, la quantità di moto totale è data da:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots$$

Principio di conservazione della quantità di moto

È uno dei principi fondamentali della Fisica

Considerando l'interazione tra due particelle



$$\Delta\vec{p}_1 = \vec{p}_1' - \vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1' - m_1\vec{v}_1$$
$$\Delta\vec{p}_2 = \vec{p}_2' - \vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2' - m_2\vec{v}_2$$

rappresentano le variazioni delle quantità di moto nell'intervallo $\Delta t = t' - t$

Dalla *evidenza sperimentale* della (7.2) si ricava

$$\Delta\vec{p}_1 = m_1\Delta\vec{v}_1 = -m_2\Delta\vec{v}_2 = -\Delta\vec{p}_2$$

cioè

$$\boxed{\Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2} \tag{7.3}$$

Un'interazione produce uno scambio di quantità di moto

La (7.3) può essere scritta come:

$$\vec{p}_1' - \vec{p}_1 = -(\vec{p}_2' - \vec{p}_2)$$
$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$

ovvero

$$\boxed{\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = cost}$$

$$\begin{cases} p_{i_x} = p_{f_x} \\ p_{i_y} = p_{f_y} \\ p_{i_z} = p_{f_z} \end{cases}$$

La quantità di moto totale di un sistema composto da due particelle sottoposte soltanto alla loro mutua interazione rimane costante

Il principio è valido anche per un insieme di n particelle che formino un sistema isolato:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p_i} = \vec{p_1} + \vec{p_2} + \ldots = cost$$

La quantità di moto totale di un sistema isolato *di particelle è costante*

Come conseguenza si ha che la quantità di moto totale di un sistema isolato di punti materiali *non* può variare per effetto di interazioni fra i punti materiali stessi

L'applicazione del principio di conservazione della quantità di moto risulta molto utile quando non sono note le interazioni interne di un sistema isolato. Es: rinculo di un fucile che spara, scoppio in volo di una bomba, urti fra particelle.

Non sono note eccezioni a questo principio generale di conservazione della quantità di moto (è valida anche a livello atomico)

Seconda e Terza Legge di Newton

Dal principio di conservazione della quantità di moto si ha:

$$\Delta\vec{p_1} = -\Delta\vec{p_2}$$

Dividendo ambo i membri per l'intervallo di interazione Δt

$$\frac{\Delta\vec{p_1}}{\Delta t} = -\frac{\Delta\vec{p_2}}{\Delta t}$$

Passando al limite per $\Delta t \to 0$, si ottiene

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt} \tag{7.4}$$

Newton introduce la dizione di *forza* come una quantità dinamica correlata alla variazione della quantità di moto. La forza agente su una particella è:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}} \tag{7.5}$$

La relazione (7.5) costituisce la *seconda legge del moto di Newton*

La rapidità temporale della variazione della quantità di moto di una particella è uguale alla forza che agisce sulla particella

La forza deve essere vista come un concetto matematico ed è dovuta all'interazione della particella con le altre circostanti

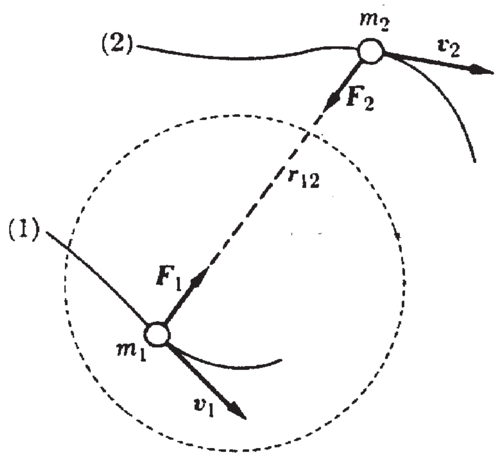
Dalla (7.4) si ottiene

$$\boxed{\vec{F}_1 = -\vec{F}_2} \tag{7.6}$$

La relazione (7.6) costituisce la *terza legge del moto di Newton* o legge di azione e reazione:

Quando due particelle interagiscono, la forza sulla prima particella esercitata dalla seconda particella è uguale ed opposta alla forza sulla seconda particella esercitata dalla prima particella

Le due forze giacciono sulla retta congiungente i due corpi



- $\vec{F}_1$= forza agente sulla particella 1 dovuta all'interazione con la particella 2
- $\vec{F}_2$= forza agente sulla particella 2 dovuta all'interazione con la particella 1

Poichè $\vec{p} = m\vec{v}$, la (7.5) può essere scritta come

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

se $m = cost$ si ha

$$\boxed{\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}} \qquad (7.7)$$

La forza agente su una particella di massa costante è uguale al prodotto della massa della particella per la sua accelerazione

Se $\vec{F} = cost \quad \rightarrow \quad \vec{a} = cost$ cioè il moto è uniformemente accelerato

Unità di misura della forza

- Nel S.I. si misura in *Newton (N)*

$$1\ N = 1\ \frac{m\ Kg}{s^2}$$

- Nel sistema c.g.s si misura in *dina* ($1\ N = 10^5\ dina$)

- Nel sistema ingegneristico si misura in *chilogrammo forza* $1\ Kg_f = 9.8\ N$

Distinzione massa/peso
Un corpo di massa m in prossimità della terra è soggetto a una forza di attrazione diretta verso il centro della terra:

$$\vec{W} = m\vec{g}$$

denominata 'forza peso' o 'peso' del corpo

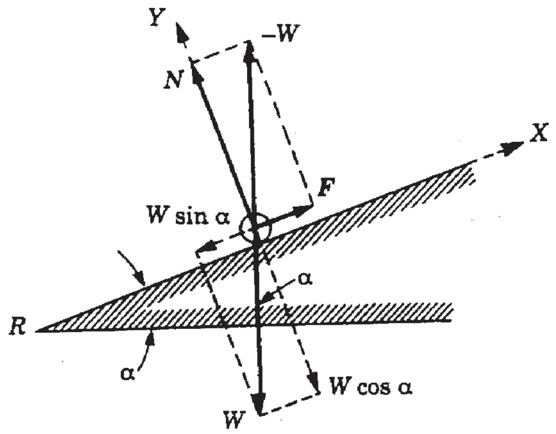
$1\ Kg_f$ è il peso di un corpo di massa $1Kg$ in prossimità della superficie terrestre

Esiste una proporzionalità tra massa e peso di un corpo. Se abbiamo un corpo di massa $m = 1\ Kg$, il suo peso è

$$\vec{W} = m\vec{g} = 1\ (Kg) \times 9.8\ (m/s^2) = 9.8\ N = 1\ Kg_f$$

ESEMPIO:Moto di un blocco su di un piano inclinato

- *caso statico*



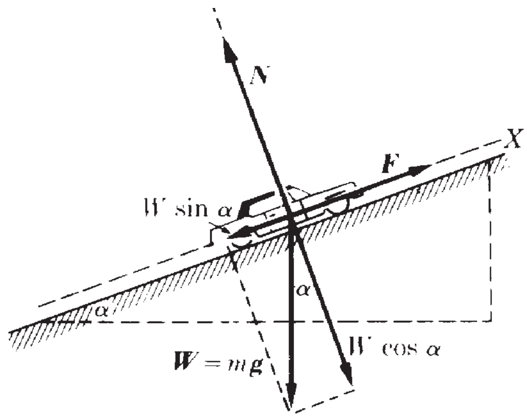
Poichè $\vec{a} = 0$ si ha:

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{W} = 0$$

Scegliendo il sistema di riferimento come in figura si ottiene

$$F - W \sin\alpha = 0$$
$$N - W \cos\alpha = 0$$

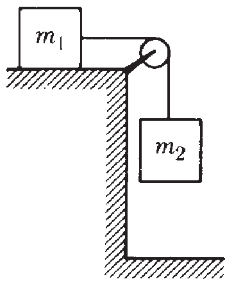
- *caso dinamico*



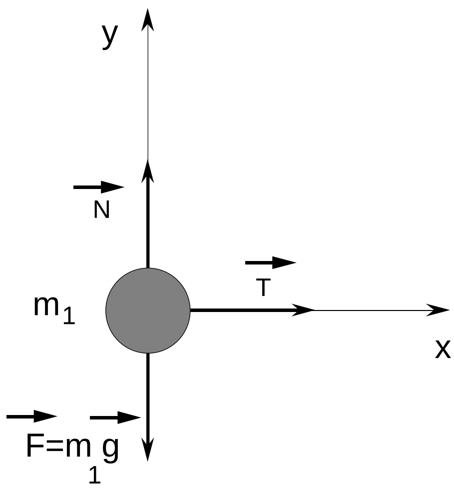
Si ha $\vec{R} = m\vec{a}$

$$R_x = ma_x \Rightarrow F - W \sin\alpha = ma_x$$
$$R_y = ma_y \quad \Rightarrow N - W \cos\alpha = 0$$

ESEMPIO

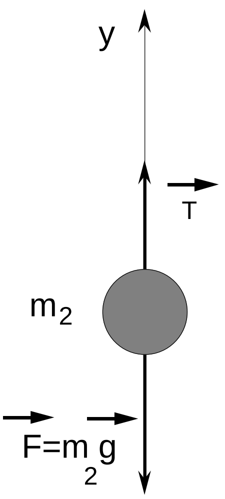


Determinare l'accelerazione del sistema e la tensione della fune
Consideriamo il corpo m_1. Le forze agenti su di esso sono



$$N - m_1 g = 0$$
$$T = m_1 a_{1_x}$$

Per determinare T consideriamo il corpo m_2. Le forze agenti su di esso sono



L'equazione del moto è

$$m_2 g - T = m_2 a_{2_y}$$

L'accelerazione dei due corpi è legata dalla relazione cinematica

$$a_{2_y} = a_{1_x} = a$$

Si ottiene

$$\begin{cases} m_2 g - T = m_2 a \\ T = m_1 a \end{cases}$$

Da cui si ricava

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g \qquad T = m_1 \frac{m_2}{m_1 + m_2} g$$

Risulta $a \leq g$ con $a = g$ quando $m_1 = 0$

Forze di attrito

Le forze di attrito sono tipici fenomeni del mondo macroscopico

La loro presenza ineliminabile ha per lungo tempo reso difficile la determinazione delle leggi del moto

Le forze di attrito

- si oppongono al moto
- derivano da leggi empiriche e non da leggi fisiche
- dipendono da fattori geometrici
- sono imprecise e hanno un intervallo di applicabilità

Si suddivide in

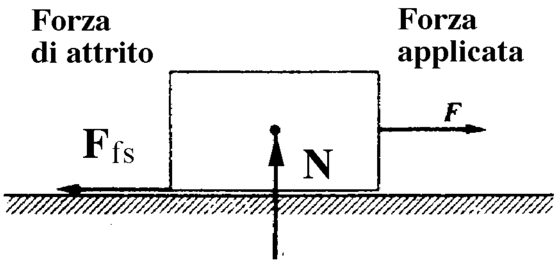
radente (tra due solidi)	$F = f\ N$	f=coeff.attrito N=forza di contatto
nei fluidi (laminare)	$F = l\ v$	l=coeff.attrito v=velocità
nei fluidi (turbolento)	$F = t\ v^2$	t=coeff.attrito v=velocità

Attrito radente (di strisciamento)

Si manifesta quando un corpo solido scivola a contatto con un altro

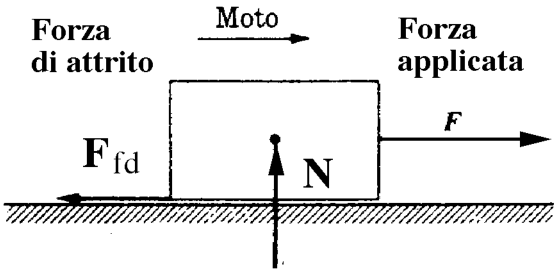
È dovuta all'interazione fra le molecole dei due corpi e si oppone sempre al moto

- Blocco in quiete



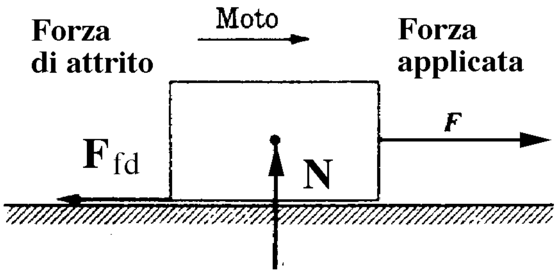
$$F = F_{f_s}$$

- Moto accelerato



$$F > F_{f_d}$$

- Moto uniforme



$$F = F_{f_d}$$

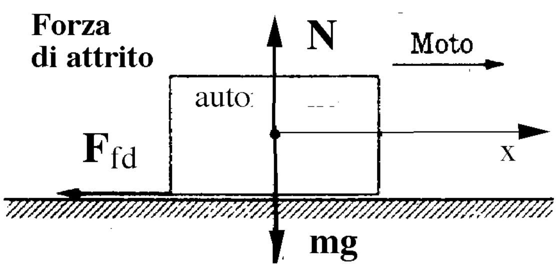
Sperimentalmente si verifica

$$F_{f_s} \leq f_s N$$
$$F_{f_d} = f_d N$$

- f_s (μ_s) coefficiente di attrito statico
- f_d (μ_d) coefficiente di attrito dinamico

Si ha $f_s > f_d$
In generale $f < 1$
f è adimensionale
F_f e N sono fra loro perpendicolari

ESEMPIO: Un automobile si muove con velocità v_0 lungo una strada rettilinea orizzontale. Quale è la più breve distanza entro cui l'automobile può essere frenata?



Si avrà un moto decelerato con accelerazione costante

$$v^2 = v_0^2 + 2ax$$

Per $v = 0$ risulta

$$\tilde{x} = -\frac{v_0^2}{2a}$$

Risulta $N = mg$; $F_{f_d} = f_d N = f_d mg$
inoltre

$$F_{f_d} = -ma$$

Quindi

$$a = -f_d g$$

lo spazio di frenata diventa

$$\tilde{x} = -\frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2gf_d}$$

Forze di attrito nei fluidi

Quando un corpo si muove in un fluido (gas o liquido) in assenza di turbolenze subisce una forza d'attrito proporzionale alla velocità

$$\boxed{\vec{F}_f = -K\eta\vec{v}}$$

$\vec{F}_f$ risulta

- proporzionale alla velocità
- dipendente dal fluido (η =viscosità)
- dipendente dalla geometria del corpo (K fattore geometrico)

Per una sfera di raggio r, si determina (Legge di Stokes)

$$K = 6\pi r$$

Il coefficiente di viscosità dipende dall'attrito interno del fluido. Si misura in $\frac{N\ s}{m^2} = Pa\ s$
$Pa = \frac{N}{m^2}$ (Pascal) unità di misura della pressione nel SI

coefficienti di viscosità $(Pa\ s)$

Acqua $(0\infty C)$	1.79×10^{-3}
Alcool etilico $(0\infty C)$	0.367×10^{-3}
Aria $(0\infty C)$	1.71×10^{-5}
Idrogeno	0.93×10^{-3}

Quando un corpo si muove attraverso un fluido viscoso sotto l'azione di una forza $\vec{F}$, l'equazione del moto diventa:

$$m\vec{a} = \vec{F} - K\eta\vec{v}$$

Se $\vec{F} = cost$ e il corpo parte da fermo, si produce una accelerazione che diminuisce all'aumentare della velocità
Dall'istante in cui $F = K\eta v$ il corpo procede di moto rettilineo uniforme
Risolvendo l'equazione del moto, si ha

$$m\frac{dv}{dt} = F - K\eta v$$
$$\frac{dv}{dt} = -\frac{K\eta}{m}\left(v - \frac{F}{K\eta}\right)$$

separando le variabili e integrando

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v-\frac{F}{K\eta}} = -\frac{K\eta}{m}\int_0^t dt$$
$$\ln\frac{v-\frac{F}{K\eta}}{v_0-\frac{F}{K\eta}} = -\frac{K\eta}{m}t$$
$$\frac{v-\frac{F}{K\eta}}{v_0-\frac{F}{K\eta}} = e^{-\frac{K\eta}{m}t}$$

sostituendo $v_0 = 0$ si ottiene

$$\boxed{v = \frac{F}{K\eta}\left(1 - e^{-\frac{K\eta}{m}t}\right)}$$

Poichè il termine esponenziale tende a zero la *velocità limite* (di regime) risulta

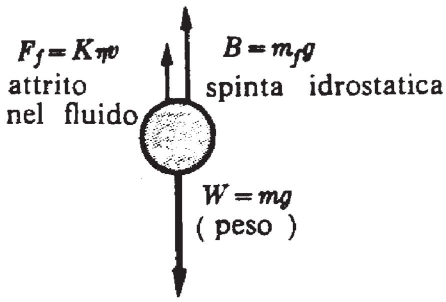
$$\boxed{v_L = \frac{F}{K\eta}}$$

Dipende dalla viscosità del fluido e dalla forma del corpo

In un corpo in *caduta libera* cioè sotto l'azione della sola forza di gravità, si ha

$$\boxed{v_L = \frac{mg}{K\eta}}$$

Se si tiene conto della spinta idrostatica esercitata dal fluido, uguale al peso del fluido spostato (Principio di Archimede), si ottiene

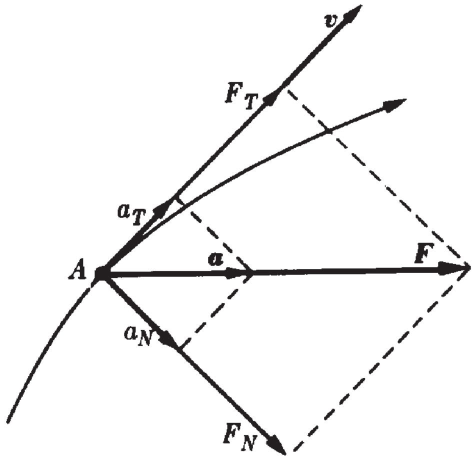


$$\vec{F}_R = m\vec{g} - m_f\vec{g}$$

quindi

$$\boxed{v_L = \frac{(m - m_f)g}{K\eta}}$$

Moto curvilineo



Nel moto curvilineo la direzione della velocità varia continuamente
La forza risultante forma un angolo diverso da zero con la velocità
Dalla cinematica

$$\vec{a} = \hat{u}_t \frac{dv}{dt} + \hat{u}_n \frac{v^2}{\rho} = \hat{u}_t a_t + \hat{u}_n a_n$$

dove

- $\vec{a}_t$=accelerazione tangenziale (variazione $|\vec{v}|$)
- $\vec{a}_n$=accelerazione normale (variazione direzione di $\vec{v}$)

La forza totale agente sulla particella

$$\vec{F} = m\vec{a} = \vec{F}_t + \vec{F}_n = m\frac{dv}{dt}\hat{u}_t + m\frac{v^2}{\rho}\hat{u}_n$$

dove

- $\vec{F}_t$=forza tangenziale

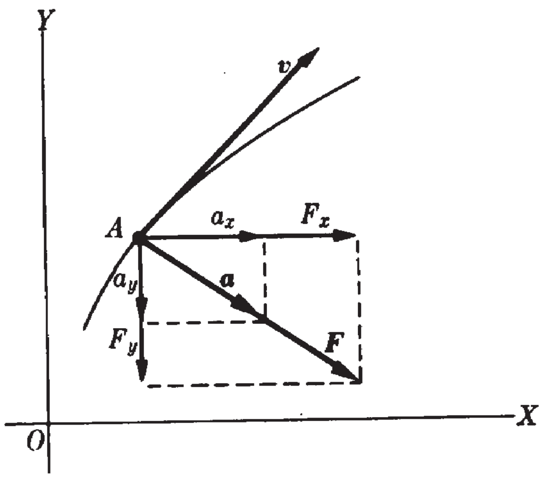
- $\vec{F}_n$=forza normale (centripeta)

Nel moto rettilineo $\vec{F}_n = 0$

Nel moto circolare uniforme

$$\vec{F}_t = 0$$
$$\vec{F}_n = m\omega^2 R$$

Talvolta può essere più conveniente utilizzare le componenti ortogonali di $\vec{F}$

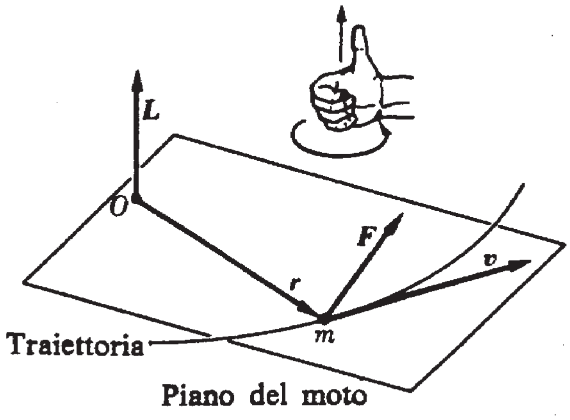


$$F_x = ma_x = m\frac{dv_x}{dt}$$
$$F_y = ma_y = m\frac{dv_y}{dt}$$

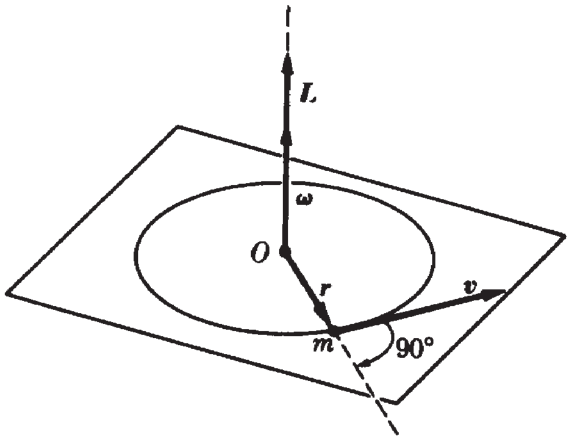
Momento della quantità di moto (Momento angolare)

il momento della quantità di moto rispetto a un punto O di una particella di massa m che si muove con velocità $\vec{v}$ si definisce come il prodotto vettoriale

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}} \tag{7.8}$$



Il vettore $\vec{L}$ è perpendicolare al piano formato da $\vec{r}$ e $\vec{v}$

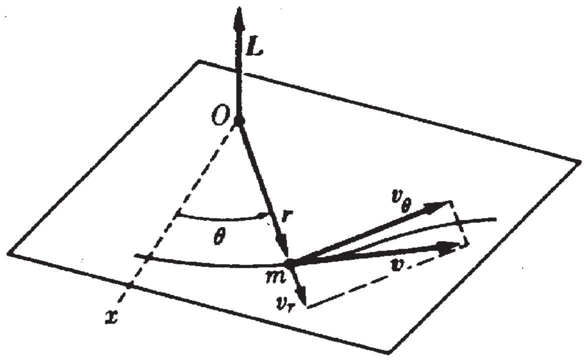


Nel moto circolare, se O è il centro del cerchio, si ha

$$L = mrv = mr^2\omega$$
$$\vec{L} = mr^2\vec{\omega}$$

in quanto $\vec{L}$ ha la stessa direzione di $\vec{\omega}$

Nel moto curvilineo, scomponendo la velocità nelle componenti radiale e trasversale



si ha

$$\vec{L} = m\vec{r} \times (\vec{v}_r + \vec{v}_\theta) = m\vec{r} \times \vec{v}_\theta$$

solo la componente trasversale contribuisce al momento della quantità di moto In quanto $v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}$ risulta

$$L = mr^2\frac{d\theta}{dt}$$

Derivando la (7.8) si ottiene

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{7.9}$$

poiché $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ si ha

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times \vec{p} = m\vec{v} \times \vec{v} = 0$$

di conseguenza la (7.9) diventa

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{7.10}$$

ricordando la definizione di momento di una forza

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}} \tag{7.11}$$

$\vec{\tau}$ e $\vec{L}$ *devono essere calcolati rispetto allo stesso punto*

Per le quantitá angolari $(\theta, \vec{\omega}, \vec{L})$ si ricava una legge della dinamica analoga a quella determinata per le quantitá lineari $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

Si ha l'analogia

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

La relazione (7.11) non costituisce un nuovo postulato fondamentale della meccanica ma una diversa espressione della seconda legge di Newton

Forze centrali

Principio di conservazione della quantitá di moto

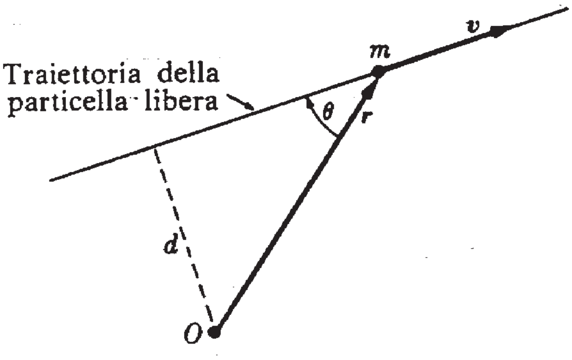
Quando il momento della forza risultante che agisce su una particella é nullo ($\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$) si ha

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = cost$$

Quando il momento della forza risultante applicata ad una particella è nullo il vettore momento angolare é costante

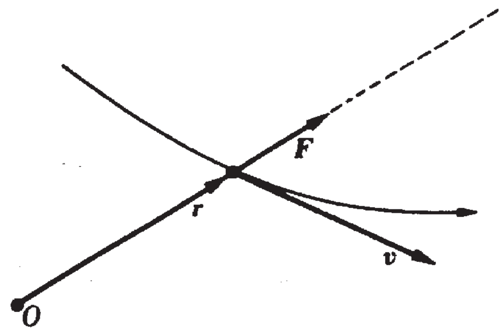
$\vec{\tau} = 0$ quando

1. *Moto rettilineo (particella libera)*



$\vec{F} = 0$ quindi $\vec{L}$=cost
$L = mvr \sin\theta = mvd = cost$

2. *Moto sotto l'azione di forze centrali*



$\vec{F} \parallel \vec{r}$ quindi $\vec{r} \times \vec{F} = 0$; $\vec{L} = cost$

8 Lavoro ed Energia

Risoluzione dell'equazione fondamentale della dinamica

Consideriamo una particella che a causa delle interazioni con altre particelle è sottoposta a una serie di forze
Ci proponiamo di determinarne il moto $\vec{r}(t)$ in funzione della forza risultante $\vec{F}(t)$ agente su di essa

Se conosciamo $\vec{F}(t)$ integrando l'equazione fondamentale della dinamica

$$\vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{8.1}$$

otteniamo

$$\int_{\vec{p}_0}^{\vec{p}} d\vec{p} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}(t)dt$$

definendo $\int_{t_0}^{t} \vec{F}(t)dt$ *Impulso* $\vec{I}$
Risulta

$$\vec{p} - \vec{p}_0 = \vec{I}$$

La variazione della quantità di moto di una particella è uguale all'Impulso (*Teorema dell'impulso*)

Una forza intensa che agisce per breve tempo produce la stessa variazione di quantità di moto di una forza debole che agisce per un tempo maggiore

Il teorema dell'impulso è applicato nei processi di urto

Tramite la $\vec{p} = m\vec{v}$ si ricava

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{\vec{I}}{m}$$

Integrando la $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ risulta

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \int_{t_0}^{t} \left(\vec{v}_0 + \frac{\vec{I}}{m} \right) dt$$

cioè

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_{0)} + \frac{1}{m} \int_{t_0}^{t} \vec{I} dt$$

Noto $\vec{F}(t)$ risolviamo l'equazione del moto

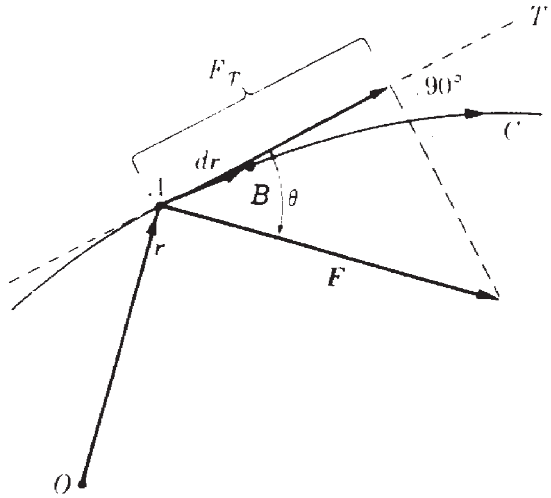
In generale nello studio della fisica si conosce *la forza in funzione delle coordinate*

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x, y, z)$$

Per risolvere l'equazione del moto si introducono due nuove grandezze: *Lavoro* e *Energia*

Lavoro

Si abbia una particella A che si muove sotto l'azione della forza $\vec{F}$



il lavoro infinitesimo compiuto dalla forza $\vec{F}$ nell'intervallo di tempo dt è definito dal prodotto scalare

$$\boxed{dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}} \tag{8.2}$$

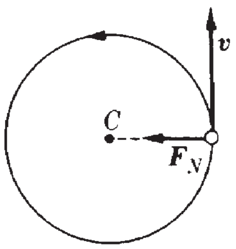
risulta

$$dW = F ds \cos\theta = F_T ds$$

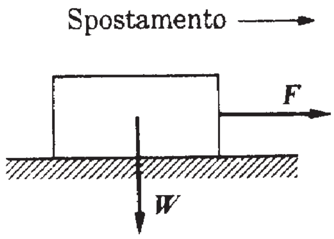
- Il lavoro è una grandezza scalare
- La sola componente della forza parallela al moto compie lavoro
- Se una forza è perpendicolare allo spostamento il lavoro da essa compiuto è nullo. Infatti

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F ds \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

Per esempio non compie lavoro



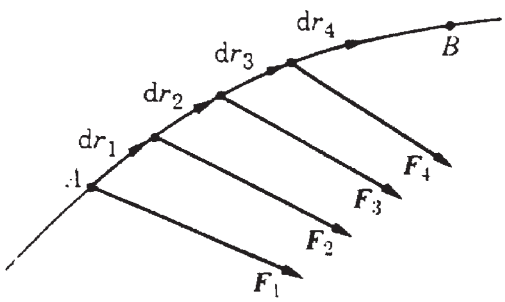
(a)



(b)

- La forza centripeta nel moto circolare
- Un facchino che porta delle valigie
- Una forza che non sposta il corpo

Quando una particella compie uno spostamento finito da un punto A a un punto B, il lavoro totale compiuto dalla forza $\vec{F}$ è la somma dei lavori infinitesimi relativi agli spostamenti infinitesimi



$$W = \vec{F_1} \cdot d\vec{r_1} + \vec{F_2} \cdot d\vec{r_2} + \vec{F_3} \cdot d\vec{r_3} + \ldots$$

Risulta quindi

$$\boxed{W = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}}$$

scrivibile anche come

$$W = \int_A^B F_T ds$$

Per calcolare il lavoro compiuto da una forza è necessario conoscere:

1. La traiettoria seguita $x(t), y(t), z(t)$
2. L'espressione della forza in funzione delle coordinate (Il campo di forza)

Il lavoro compiuto da una forza che agisce su una particella quando essa si sposta fra due punti è in generale funzione della traiettoria seguita

Quando in presenza di una forza costante il corpo si muove in linea retta in direzione della forza stessa, risulta

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \int_A^B ds = F\ s$$

la formulazione $Lavoro = forza \times spostamento$

In presenza di più forze agenti su una particella si ottiene

$$dW = dW_1 + dW_2 + dW_3 + \ldots = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 + \vec{F}_3 \cdot d\vec{r}_3 + \ldots$$

essendo $d\vec{r}_1 = d\vec{r}_2 = d\vec{r}_3 = d\vec{r}$ si ottiene

$$dW = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots) \cdot d\vec{r} = \vec{R} \cdot d\vec{r}$$

La somma dei lavori compiuti da più forze agenti su una particella è uguale al lavoro compiuto dalla loro risultante

Potenza

Lavoro compiuto nella unità di tempo

Si definisce la potenza media

$$P_m = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

Si definisce la potenza istantanea

$$P = \frac{dW}{dt}$$

Lavoro compiuto nella unità di tempo durante l'intervallo dt

Utilizzando la (8.2) si ha

$$\boxed{P = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}}$$

La potenza è uguale al prodotto scalare della forza per la velocità

Il concetto di potenza è molto importante perchè esprime il ritmo con cui una macchina produce lavoro

Unità di misura

Nel S.I. il lavoro è espresso come

$$dW = [Forza][Spostamento] = N\ m = [M][L]^2[T]^{-2}$$

Si definisce

$$1\ N\ m = 1\ J\ (Joule)$$

Nel sistema c.g.s.

$$dW = dine\ cm$$

Si definisce

$$1\ dine\ cm = 1\ erg = 10^{-7}\ J$$

Nel S.I. la potenza è espressa come

$$\vec{P} = \vec{F} \cdot \vec{v} = [Forza][Velocitá] = N\ m\ s^{-1} = [M][L]^2[T]^{-3}$$

Si definisce

$$1\ N\ m\ s^{-1} = 1\ W\ (Watt)$$

Nel sistema c.g.s.

$$P = dine\ cm\ s^{-1} = 10^{-7}\ W$$

per ragioni storiche sono ancora utilizzate le seguenti unità di misura:

- Cavallo Vapore (HP) - Potenza

$$1\ HP = 746\ W$$

- Kilowattora (Kwh) - Lavoro

$$1\ Kwh = (10^3\ W)(3.6\ 10^3\ s) = 3.6\ 10^6\ J$$

Energia Cinetica

L'energia cinetica esprime la capacità di una massa in movimento di compiere lavoro

Calcoliamo il lavoro compiuto da una forza $\vec{F}$ applicata ad una particella di massa m durante lo spostamento da A a B lungo un qualsiasi percorso

$$W = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = m \int_A^B \frac{d\vec{v}(\vec{r})}{dt} \cdot d\vec{r}$$

Cambiando la variabile di integrazione da $\vec{r}$ a t:

$$\begin{aligned} W &= m \int_{t_A}^{t_B} \frac{d\vec{v}\,(\vec{r}(t))}{dt} \cdot d\vec{r}(t) = m \int_{t_A}^{t_B} \left[\frac{d\vec{v}(t)}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right] dt \\ &= m \int_{t_A}^{t_B} \left[\frac{d\vec{v}(t)}{dt} \cdot \vec{v} \right] dt \end{aligned} \quad (8.3)$$

utilizzando la relazione

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left[\frac{d\vec{v}(t)}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \right] = \frac{1}{2} \frac{d(\vec{v} \cdot \vec{v})}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{dt}$$

nella (8.3) si ottiene

$$W = \frac{1}{2} m \int_{t_A}^{t_B} \frac{d(v^2)}{dt} dt = \frac{1}{2} m \int_{v_A}^{v_B} d(v^2) = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

Definendo *Energia cinetica* di un corpo di massa m che si muove di velocità v

$$\boxed{E_K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}}$$

si ha il *Teorema della energia cinetica*

$$\boxed{W = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2} \qquad (8.4)$$

Il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F}$ sul corpo di massa m durante lo spostamento da A a B è uguale alla variazione di energia cinetica del corpo

Quando l'energia cinetica di una particella diminuisce, il lavoro compiuto dalla forza risultante è negativo, cioè lo spostamento è opposto alla componente risultante delle forze lungo la direzione del moto

In assenza di dissipazioni per attrito, l'energia cinetica di una particella diminuisce di una quantità pari al lavoro che essa produce

L'energia che un corpo in movimento possiede è uguale al lavoro che essa produce nel fermarsi in assenza di attrito

Il teorema della energia cinetica non è una legge indipendente della meccanica, ma una applicazione della seconda legge di Newton

É interessante rilevare la similitudine tra il teorema dell'Impulso e dell'Energia cinetica

$$\begin{aligned} \vec{p} - \vec{p}_0 &= \int_{t_0}^{t} \vec{F}(t)dt \\ E_K - E_{K_0} &= \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

La quantità di moto e l'energia cinetica sono entrambe proprietà dinamiche della particella

Una forza può produrre una variazione di quantità di moto senza produrre una variazione di energia cinetica

La quantità di moto è funzione di un integrale nel tempo ed esprime le proprietà vettoriali del moto

L'energia cinetica è una grandezza scalare calcolata tramite un'integrale di linea ed esprime la capacità di un corpo di compiere lavoro

Dimensionalmente l'energia cinetica è omogenea a un lavoro

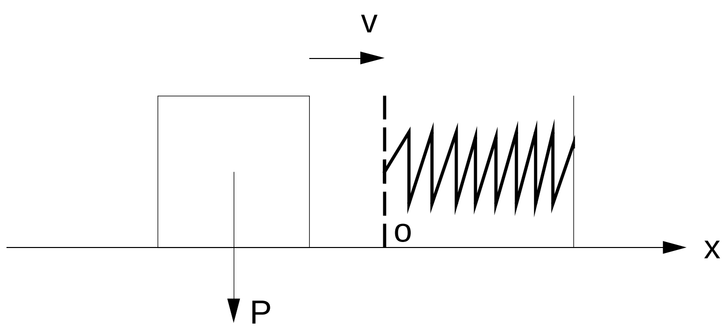
$$E_K = \frac{1}{2}mv^2 = Kg\ m^2\ s^{-2} = J = [M][L]^2[T]^{-2}$$

Come unità di misura è molto diffuso l'*elettron-volt (eV)*

$$1\ eV = 1.60210\ 10^{-19}\ J$$

Le definizioni di lavoro ed energia cinetica sono molto utili per risolvere l'equazione del moto, in quanto in generale è nota $\vec{F}(\vec{r})$

ESEMPIO: Un blocco di peso 52.5 Kgf scivola lungo un piano orizzontale con $v = 1\ \frac{m}{s}$ fermandosi contro una molla di costante elastica $k = 25\ \frac{N}{m}$.
Determinare la massima compressione della molla.



L'energia cinetica del blocco risulta:

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{peso}{g}\right)v^2$$

Il lavoro compiuto dalla molla, che esercita sul corpo la forza funzione della compressione $F = -k\ x$, è

$$W = \int_0^x F(x)dx = -\int_0^x kxdx = -\frac{1}{2}kx^2$$

Nel punto di massima compressione $E_K = 0$, quindi utilizzando il teorema dell'energia cinetica

$$\Delta E_K = W$$

cioè

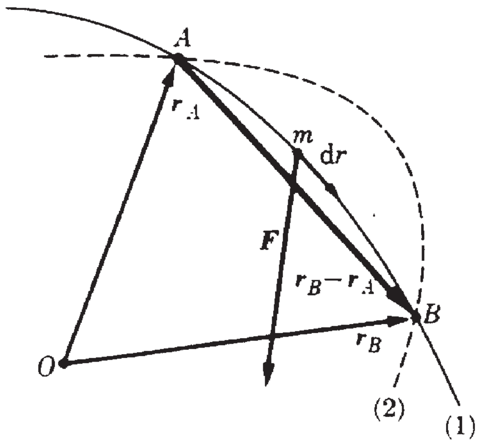
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{peso}{g}\right)v^2 = -\frac{1}{2}kx^2$$

per cui

$$x = \sqrt{\frac{peso}{kg}}v = 1.4\ m$$

Lavoro di una forza costante

Consideriamo una particella di massa m in moto in un campo di forze $\vec{F} = cost$, non prendendo in considerazione altre forze presenti

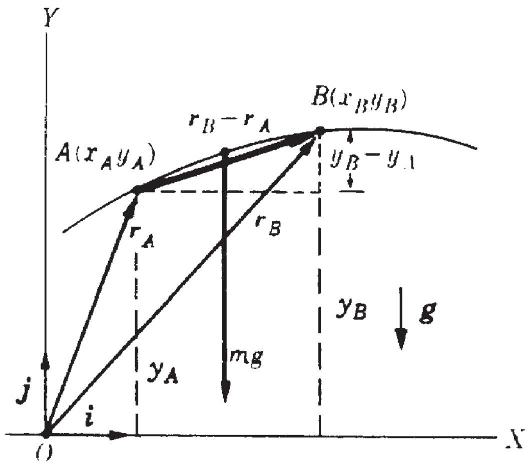


Il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F}$ è

$$W = \int_A^B \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \vec{F}\cdot\int_A^B d\vec{r} = \vec{F}\cdot(\vec{r}_B - \vec{r}_A) = \vec{F}\cdot\vec{r}_B - \vec{F}\cdot\vec{r}_A$$

Il lavoro compiuto dalla forza non dipende dalla traiettoria seguita dalla particella

Un caso notevole è la forza di gravità



$$\vec{F} = -\hat{u}_y mg$$
$$\vec{r}_B - \vec{r}_A = \hat{u}_x(x_B - x_A) + \hat{u}_y(y_B - y_A)$$

Si ha

$$W = \int_A^B \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \vec{F}\cdot(\vec{r}_B - \vec{r}_A) = -mg(y_B - y_A) = mgy_A - mgy_B$$

Il lavoro compiuto dalla forza di gravità dipende soltanto dalla differenza $y_B - y_A$ e non dalla traiettoria

ESEMPIO: un corpo cade partendo da fermo da una altezza h. Quale è la sua energia cinetica quando tocca il terreno?

L'aumento di energia cinetica è uguale al lavoro compiuto dalla forza di gravità

$$W = \int_h^0 \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = mgh$$

La variazione di energia cinetica è ($v_0 = 0$):

$$\Delta E_K = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

Uguagliando le due espressioni

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

La velocità all'impatto è

$$v = \sqrt{2gh}$$

Energia Potenziale

In presenza di una forza costante si ha

$$W = \vec{F} \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A)$$

Una forza funzione della posizione si definisce *conservativa* quando la sua dipendenza dal vettore posizione $\vec{r}$ è tale che il lavoro compiuto dalla forza quando la particella si sposta da un punto A a un punto B può essere espressa sempre come differenza tra il valore iniziale e finale di una quantità chiamata $E_P(\vec{r})$

$$\boxed{W = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = E_{P_A} - E_{P_B} = -\Delta E_P}$$

La quantità $E_P(\vec{r})$ è definita *Energia potenziale*

L'energia potenziale è una funzione delle coordinate tale che la differenza dei valori che essa assume nella posizione iniziale e finale è uguale al lavoro compiuto dalla forza conservativa sulla particella per spostarla dalla posizione iniziale alla posizione finale

Per la forza di gravità si ha

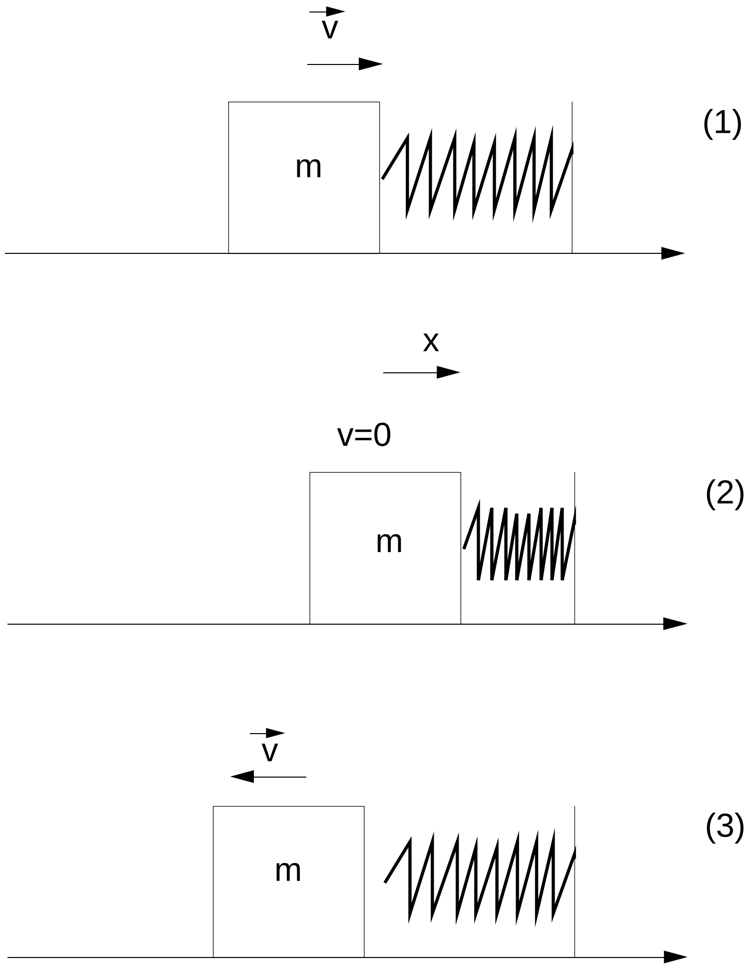
$$E_P = mgy$$

Per una forza costante si ha

$$E_P = -\vec{F} \cdot \vec{r}$$

ESEMPIO: Consideriamo un corpo di massa m che urta con velocità v una molla agganciata ad una parete.
La forza esercitata dalla molla è data dalla
legge di Hooke

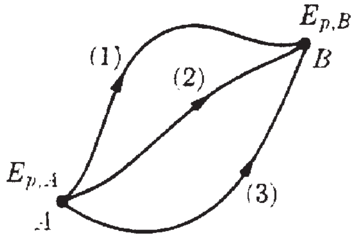
$$F = -k\ x$$



Trascurando le forze di attrito si verifica come l'energia cinetica iniziale diminuisce fino ad annullarsi nella posizione di massima compressione. Successivamente si produce una inversione del moto e il corpo abbandona la molla con la stessa energia cinetica iniziale e con velocità opposta.
Il corpo ha percorso, nel campo di forze conservativo dovuto alla molla, una linea chiusa e la sua capacità di compiere lavoro rimane inalterata
In presenza di forze di attrito tra le superfici, l'energia cinetica al distacco sarebbe inferiore, in quanto le forze di attrito non sono conservative

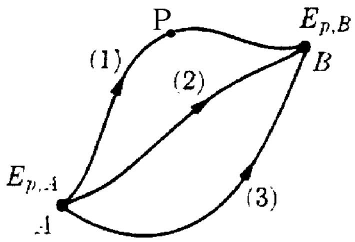
Una forza è conservativa quando il lavoro che la forza compie per spostare un corpo da una punto A ad un punto B è indipendente dalla traiettoria seguita per portare il corpo da A a

B



$$W = \int_{A_{(1)}}^{B} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \int_{A_{(2)}}^{B} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \int_{A_{(3)}}^{B} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \dots$$

Introduciamo un punto P di riferimento fisso



$$W = \int_{A}^{B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{A}^{P} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_{P}^{B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Poichè l'integrale non dipende dal percorso si può scrivere

$$\int_{P}^{B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = U(B)$$

$$\int_{A}^{P} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \int_{P}^{A} \vec{F}(\vec{r})\cdot(-d\vec{r}) = -\int_{P}^{A} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = -U(A)$$

Quindi

$$W = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = U(B) - U(A)$$

Si definisce l'energia potenziale della forza conservativa la funzione

$$E_{P_A} = -\left[U(A) + K\right]$$

con $K = costante$

Si ottiene quindi

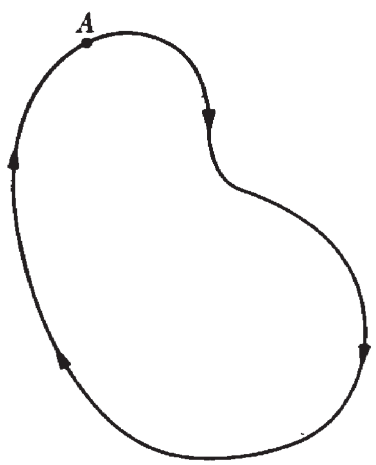
$$W = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = E_{P_A} - E_{P_B}$$

La funzione Energia potenziale

- è definita solo in presenza di forze conservative
- è definita a meno di una costante
  Il livello di riferimento è definito come meglio aggrada

Negli impieghi pratici sono significative soltanto le differenze di energia potenziale

Scegliendo un percorso chiuso A=B, si ha $E_{P_A} = E_{P_B}$ e il lavoro totale compiuto dalla forza conservativa è nullo



$$W = \oint \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$$

La circuitazione della forza $\vec{F}$ è nulla

Se una forza ha circuitazione nulla per qualsiasi percorso $\Rightarrow$ è conservativa

$$\oint \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0 \Leftrightarrow Forza\ conservativa$$

Relazione tra forza ed energia potenziale

Si ha

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_{P_A} - E_{P_B} = -\int_A^B dE_P$$

quindi

$$\boxed{\vec{F} \cdot d\vec{r} = -dE_P}$$

sviluppando

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = F\ ds \cos\theta = -dE_P$$

dove ds è il modulo dello spostamento e θ l'angolo compreso tra $\vec{F}$ e $\vec{r}$

Risulta

$$F\ \cos\theta = \frac{-dE_P}{ds} \tag{8.5}$$

Noto $E_P(\vec{r})$ possiamo ricavare la componente di $\vec{F}$ in qualsiasi direzione

$\frac{-dE_P}{ds}$ è denominata derivata direzionale di E_P

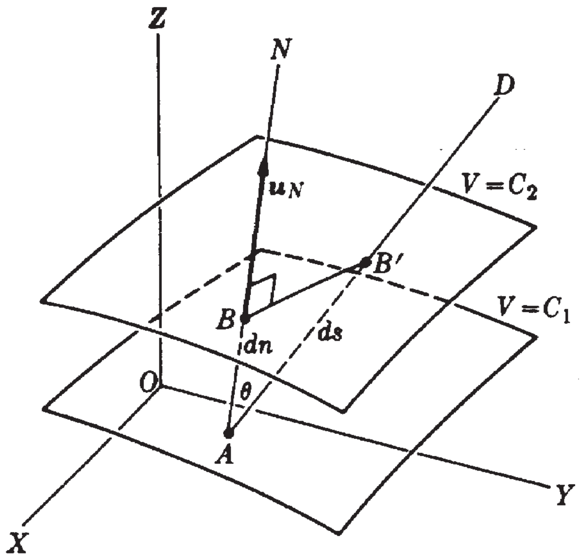
Gradiente di una funzione V

Consideriamo una funzione scalare $V(x, y, z)$

Tracciamo le due superfici

$$V(x, y, z) = C_1 \quad V(x, y, z) = C_2$$

dove C_1 e C_2 differiscono di una quantità infinitesima



si può scrivere

$$\frac{dV}{ds} = \frac{C_2 - C_1}{ds}$$

Variazione di V per unità di lunghezza (derivata direzionale di V)

Indicando con $\frac{dV}{dn}$ la derivata direzionale lungo la direzione normale AN si ha

$$\frac{dV}{ds} = \frac{dV}{dn}\frac{dn}{ds} = \frac{dV}{dn}\cos\theta \tag{8.6}$$

La derivata direzionale assume valore massimo per $\theta = 0$

Si definisce *gradiente* della funzione V il vettore

$$gradV = \vec{\nabla} V = \hat{u}_n \frac{dV}{dn} \tag{8.7}$$

perpendicolare alla superficie $V(x, y, z) = costante$

dalla (8.5), dalla (8.6) e dalla (8.7) si ottiene l'espressione della forza come gradiente della corrispondente energia potenziale cambiato di segno

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_P$$

In forma cartesiana l'espressione della forza risulta

$$\vec{F} = -\hat{u}_x \frac{\partial E_P}{\partial x} - \hat{u}_y \frac{\partial E_P}{\partial y} - \hat{u}_z \frac{\partial E_P}{\partial z}$$

L'operatore gradiente espresso in coordinate cartesiane è

$$\vec{\nabla} = \hat{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{u}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Quindi le componenti di una forza conservativa possono essere scritte come

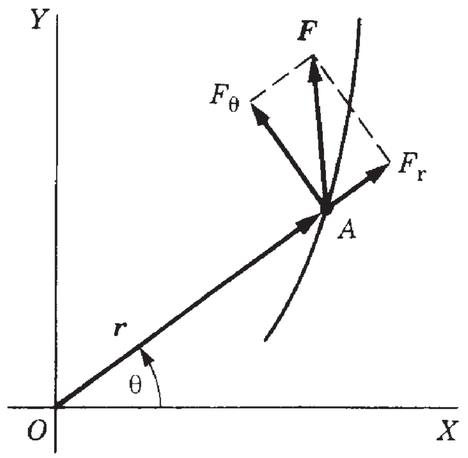
$$F_x = -\frac{\partial E_P}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial E_P}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial E_P}{\partial z};$$

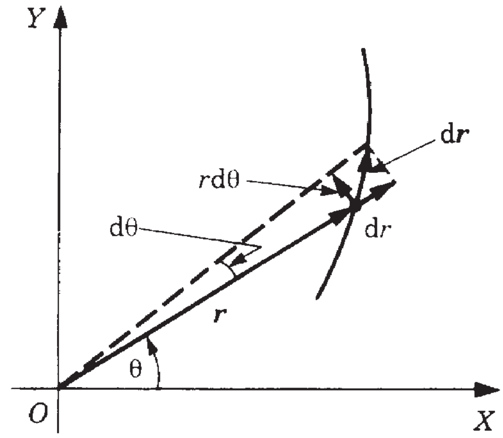
Applicando il teorema di Schwartz (le derivate parziali seconde miste di una funzione continua sono uguali):

$$\frac{\partial^2 E_P}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 E_P}{\partial y \partial x} \Rightarrow \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y}$$
$$\frac{\partial^2 E_P}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 E_P}{\partial z \partial x} \Rightarrow \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}$$
$$\frac{\partial^2 E_P}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 E_P}{\partial z \partial y} \Rightarrow \frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z}$$

Condizione necessaria e sufficiente perchè un campo di forze sia conservativo

Moto piano in un campo di forze centrali





in coordinate polari $\vec{F}$ è espresso dalla

$$\vec{F} = \vec{F}_r + \vec{F}_\theta = -\hat{u}_r \frac{\partial E_P}{\partial r} - \hat{u}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial E_P}{\partial \theta}$$

Quando E_P dipende soltanto da $|\vec{r}|$ e non da θ la forza è centrale, cioè ha componente soltanto radiale e la sua retta di azione passa sempre per un punto detto centro

Inversamente quando la forza è centrale E_P dipende soltanto da $|\vec{r}|$

L'energia potenziale associata a una forza centrale dipende soltanto dalla distanza della particella dal centro della forza

$$E_P(|\vec{r}|) \Leftrightarrow \text{Forza centrale}$$

Conservazione dell'energia meccanica di una particella

In presenza di un campo di forze conservative, si ha

- $W = E_{P_A} - E_{P_B}$
  Valida per forze conservative
- $W = E_{K_B} - E_{K_A}$
  Valida per qualsiasi forza

Per cui

$$E_{K_B} - E_{K_A} = E_{P_A} - E_{P_B}$$

cioè

$$(E_K + E_P)_B = (E_K + E_P)_A$$

La somma $E_K + E_P$ è definita *Energia Totale della particella*

$$E = E_K + E_P = \frac{1}{2}mv^2 + E_P(x, y, z)$$

Essendo A e B punti generici, si ha Il *Teorema di conservazione dell'Energia*

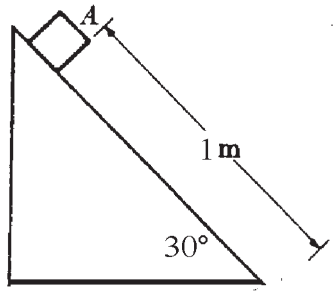
$$\boxed{E = E_K + E_P = cost} \tag{8.8}$$

L'Energia totale di una particella sottoposta a forze conservative è costante

Una tipica forza conservativa è la Forza di attrazione gravitazionale

$$E = E_K + E_P = \frac{1}{2}mv^2 + mgh = cost$$

ESEMPIO:Un blocco di 3Kg scivola senza attrito lungo un piano inclinato lungo $1m$. Determinare la velocità del blocco quando abbandona il piano inclinato.



Risulta $E_{P_i} = mgl\sin\frac{\pi}{6}$ e $v_i = 0$ quindi $E_{K_i} = 0$
Quando il corpo raggiunge la fine del piano inclinato risulta $E_{P_f} = 0$ e $E_{K_f} = \frac{1}{2}mv_f^2$
Dalla (8.8) si ricava

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = mgh$$

quindi $v_f = 3.13\ \frac{m}{s}$
Se si utilizzano le leggi di Newton

$$mg\sin\frac{\pi}{6} = ma$$

per cui $a = 4.9\ \frac{m}{s^2}$
utilizzando la $v_f^2 = v_i^2 + 2as$ si ottiene $v_f = 3.13\ \frac{m}{s}$
Se una particella parte da ferma da una altezza h_0 si può ottenere la velocità in un punto qualsiai tramite la relazione

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh = mgh_0$$

da cui $v^2 = 2g(h_0 - h)$ ricavabile anche da equazione del moto

Nella trattazione non è stato menzionato il tragitto seguito dalla particella: per una data energia totale il modulo della velocità in ogni punto è determinabile tramite le coordinate del punto stesso indipendentemente dal percorso seguito per raggiungere il punto

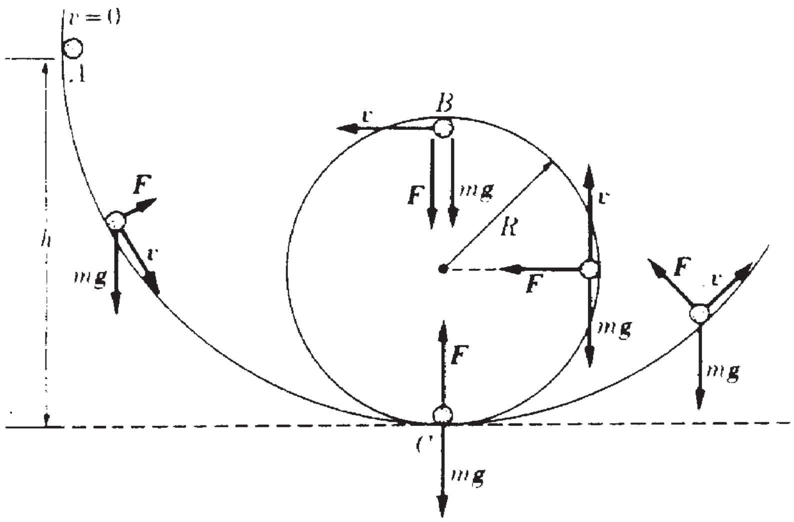
Il teorema della energia è stato dimostrato tramite le leggi del moto e non aggiunge leggi fondamentali nuove

Le leggi del moto permettono la risoluzione dei problemi di dinamica senza utilizzare il teorema di conservazione dell'energia quando

- si conosce $\vec{F}(t)$
- si è in grado di risolvere l'eq. differenziale del moto

Mentre la soluzione della equazione del moto è generalmente complicata, l'applicazione dei teoremi di conservazione dell'energia è molto più agevole

ESEMPIO: Determinare l'altezza minima da cui dovrebbe partire una pallina, in assenza di attrito, per percorrere interamente il circuito in figura



Nel punto più alto del cappio B risulta

$$F + mg = \frac{mv^2}{R}$$

La velocità minima si ricava ponendo $F = 0$, cioè

$$v = \sqrt{gR}$$

l'energia totale in A risulta

$$E_A = (E_K + E_P)_A = mgh$$

ed in B

$$E_B = (E_K + E_P)_B = \frac{1}{2}m(gR) + mg(2R) = \frac{5}{2}mgR$$

Essendo $E_A = E_B$ si ottiene $h = \frac{5}{2}R$

Moto rettilineo sotto l'azione di forze conservative

Mediante l'applicazione dei principi di conservazione si ricavano in generale le quantità dinamiche principali ma non si risolve l'equazione del moto $\vec{r} = \vec{r}(t)$
In alcuni casi semplici si ricava l'espressione completa del moto
Nel moto rettilineo sotto l'azione di forze conservative risulta

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + E_P(x) = cost \tag{8.9}$$

essendo $v = \frac{dx}{dt}$ si ha

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + E_P(x) = cost$$

risolvendo rispetto a $\frac{dx}{dt}$ si ha

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - E_P(x)]}$$

il moto può avvenire soltanto nelle regioni in cui $E \geq E_P$
Separando le variabili x e t ed integrando

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - E_P(x)]}} = \int_0^t dt = t$$

In presenza di una forza costante dalla $F = -\frac{dE_P}{dx}$ integrando si ottiene

$$E_P(x) = -Fx + C$$

Se poniamo $E_P = 0$ per $x = 0$ si ha $C = 0$, quindi

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{E + Fx}} = t$$

cioè

$$\frac{2}{F}\sqrt{(E + Fx)} - \frac{2}{F}\sqrt{E} = \sqrt{\frac{2}{m}}t$$

risolvendo rispetto a x

$$x = \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2 + \sqrt{\frac{2E}{m}}t$$

sostituendo $\frac{F}{m} = a$ e poichè $E = \frac{1}{2}mv_0^2 + E_{P_0} = \frac{1}{2}mv_0^2$ si ottiene

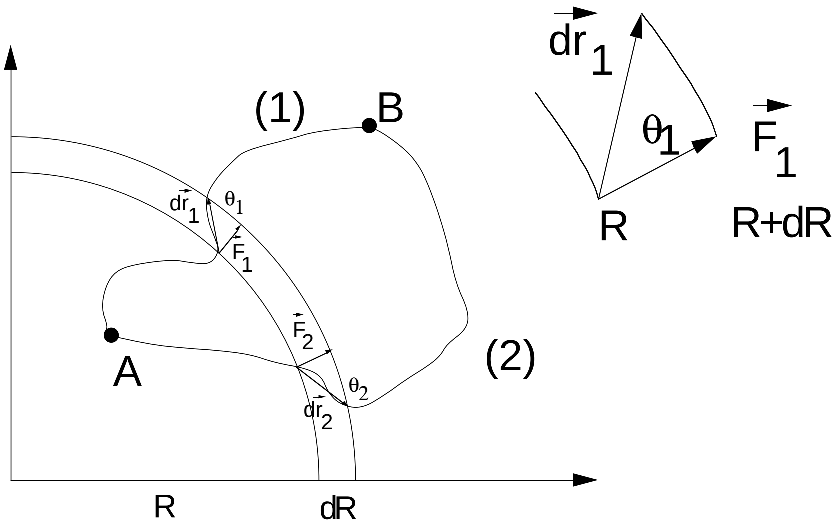
$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$$

L'espressione cinematica del moto uniformemente accelerato

Moto in un campo di forze centrali

Dimostriamo che una forza centrale è conservativa

Calcoliamo il lavoro compiuto dalla forza per spostare il corpo dal punto A al punto B



Consideriamo due tratti di traiettoria compresi tra le due sfere di raggio R e $R + dR$ e determiniamo

$$dW = (\vec{F} \cdot \vec{dr})_{R \Rightarrow R+dR}$$

Lungo i due percorsi

1. $\vec{F}_1 \cdot \vec{dr}_1 = F_1 dr_1 \cos\theta_1 = F dR$

2. $\vec{F}_2 \cdot \vec{dr}_2 = F_2 dr_2 \cos\theta_2 = F dR$

di conseguenza

$$\vec{F}_1 \cdot \vec{dr}_1 = \vec{F}_2 \cdot \vec{dr}_2$$

L'integrale non dipende dal percorso per qualsiasi percorso $\rightarrow$ $\vec{F}$ è una forza conservativa

L'energia potenziale è funzione soltanto di $|\vec{r}|$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + E_P(r) = cost$$

Il modulo di $\vec{v}$ dipende solo dalla distanza dal centro della forza

Il principio di conservazione dell'energia, grandezza scalare che non fornisce informazioni sulla direzione del moto, non è sufficiente per risolvere l'equazione del moto in un campo di forze centrali
Per ottenere la soluzione generale del moto in un campo di forze centrali devono essere applicati due principi di conservazione:

- Principio di conservazione dell'Energia
- Principio di conservazione del momento della quantità di moto ($\vec{L}$)

In coordinate polari la velocità è

$$v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

introducendo la relazione $L = mr^2\frac{d\theta}{dt}$ si ha

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{(mr)^2}$$

L'equazione di conservazione dell'energia diventa

$$\boxed{E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + E_P(r)}$$

Espressione analoga alla (8.9) relativa al moto rettilineo supponendo che nel moto radiale la particella si muova sotto l'azione di una energia potenziale efficace

$$E_{P_{eff}}(r) = E_P(r) + \frac{L^2}{2mr^2} = E_P(r) + E_{P_c}(r)$$

Il termine $E_{P_c}(r)$ è definito *Energia potenziale centrifuga*, in quanto la forza associata sarebbe diretta verso l'esterno

$$F_c = -\frac{\partial E_c}{\partial r} = -\frac{dE_c}{dr} = \frac{L^2}{mr^3}$$

L'$E_{P_c}(r)$ semplifica la trattazione
Sulla particella non agisce nessuna forza centrifuga non associata al potenziale $E_P(r)$

La soluzione del moto radiale $r = r(t)$ diventa analoga al caso rettilineo

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - E_{P_{eff}}(r)]}} = t$$

La parte angolare del moto è ottenuta dall'espressione del momento della quantità di moto $L = mr^2\frac{d\theta}{dt}$:

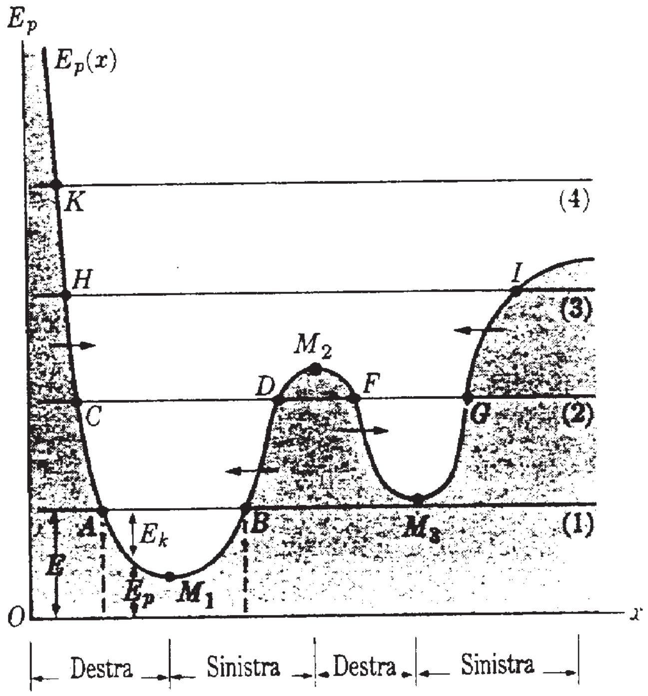
$$d\theta = \frac{L}{mr^2(t)}dt$$

Integrando

$$\theta = \theta_0 + \int_0^t \frac{L}{mr^2(t)} dt$$

Discussione sulle curve della energia potenziale

Nei problemi monodimensionali e in presenza di un campo di forze centrali, la rappresentazione grafica di $E_P(x)$ o di $E_P(r)$ è utile per comprendere le caratteristiche generali del moto



In ogni posizione x la forza che agisce sulla particella risulta

$$F = -\frac{dE_P}{dx}$$

F ha *verso opposto* rispetto alla pendenza della curva $E_P(x)$,cioè:

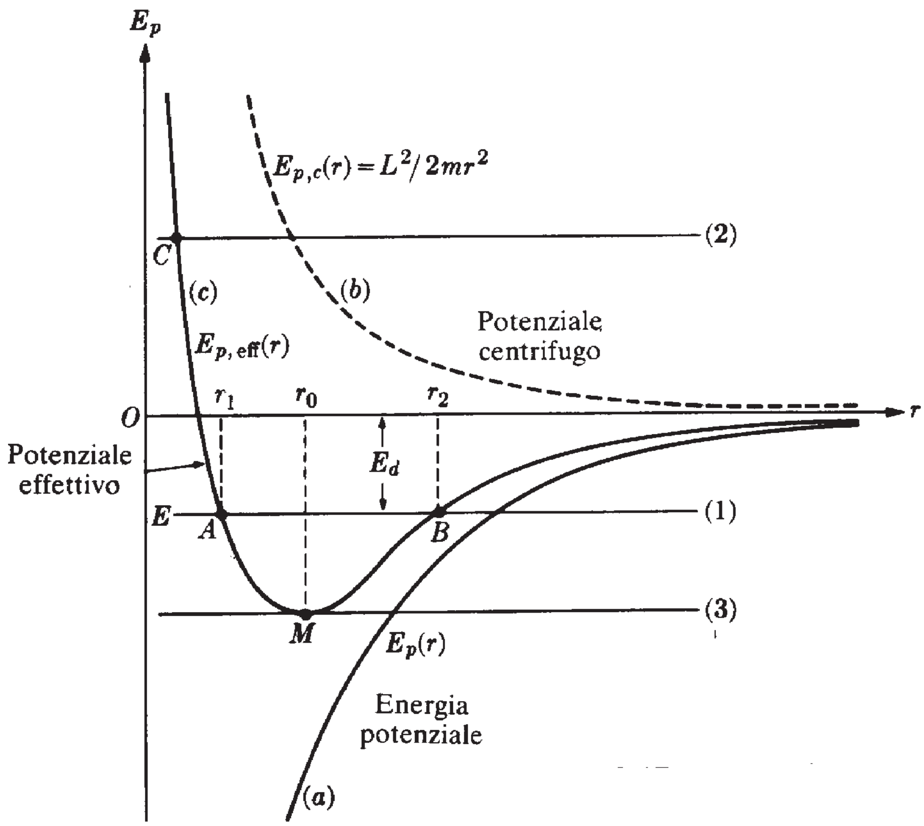
- è diretta verso sinistra quando E_P aumenta

- è diretta verso destra quando E_P diminuisce

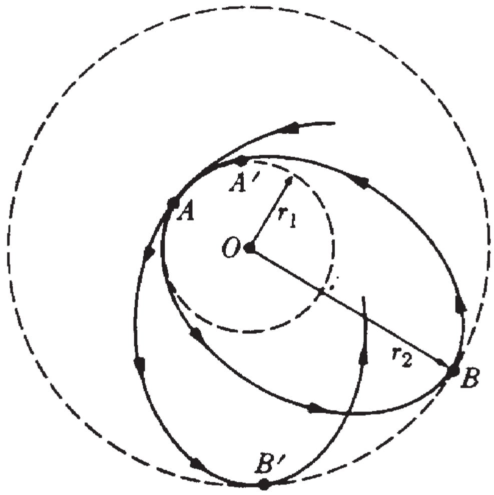
Si ha

- $E_P(x)$ minimo $\Rightarrow$ punto di equilibrio stabile
- $E_P(x)$ massimo $\Rightarrow$ punto di equilibrio instabile

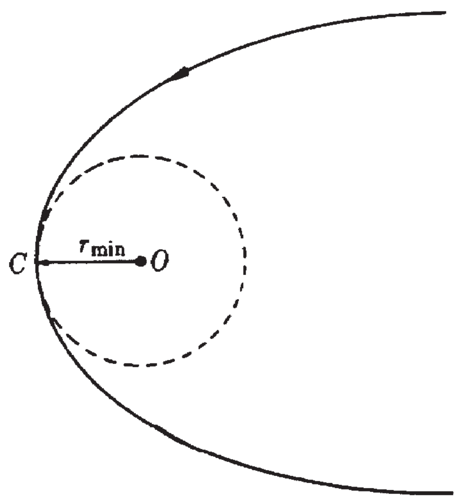
Consideriamo un campo di forze centrali attrattivo per qualsiasi distanza



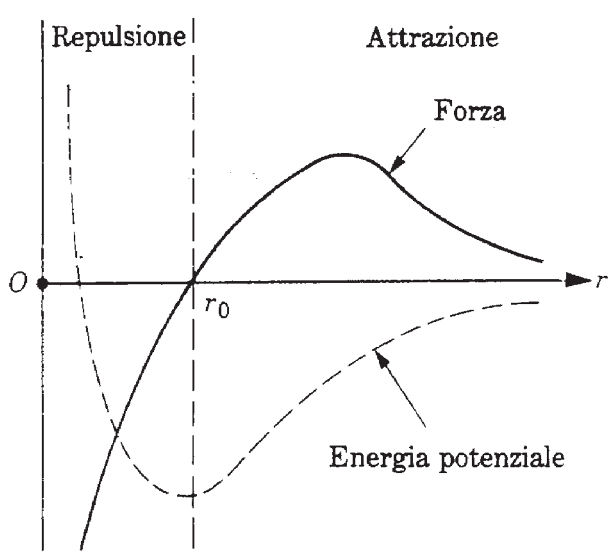
In presenza di una energia totale $E = E_d$ come in (1) si ha un moto del tipo



In presenza di una energia totale come in (2) si ha un moto del tipo



L'andamento della forza *efficace* è

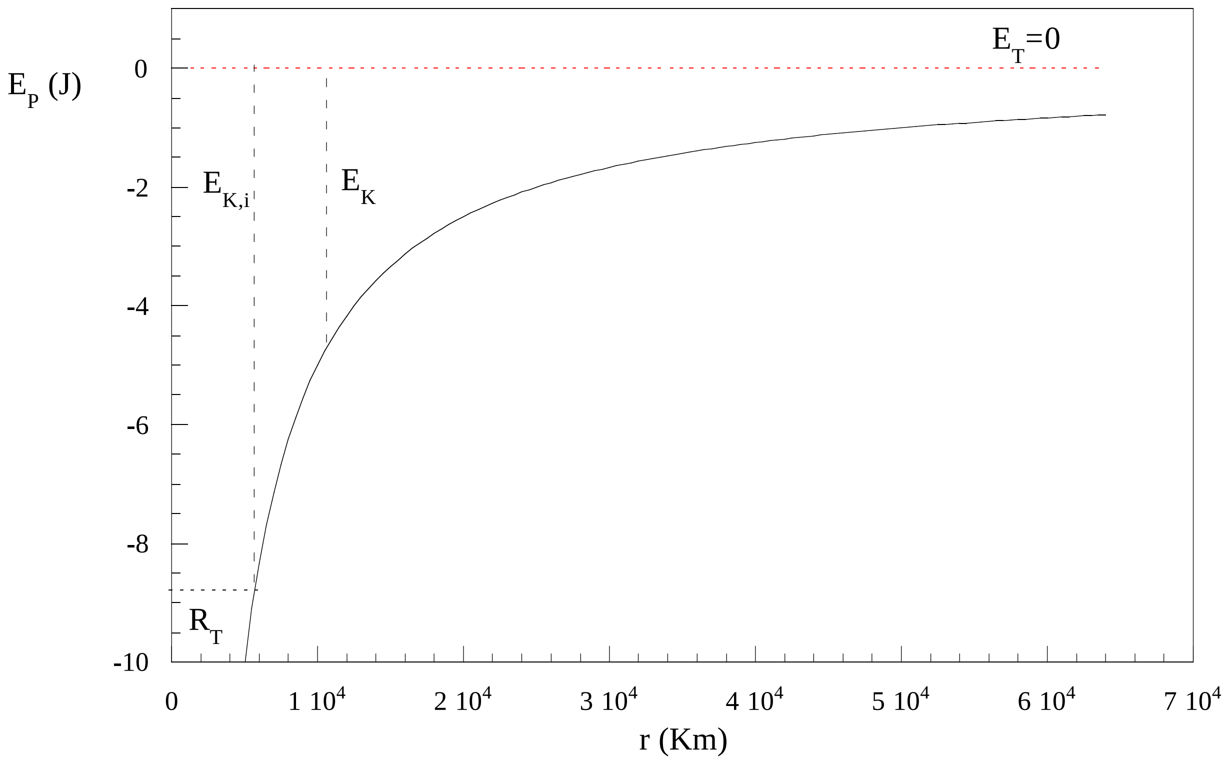


ESEMPIO: Calcolare la velocità di fuga dalla terra e dal sistema solare

Una particella di massa m e velocità v ha nel campo gravitazionale terrestre energia totale

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_T m}{R_T}$$

dove G = costante di gravitazione universale $= 6.67\ 10^{-8}\ \frac{dine\ cm^2}{g^2}$,$M_T$ $5.98\ 10^{27}\ g$, $R_T = 6.4\ 10^8\ cm$



Dopo il lancio l'energia si mantiene costante e deve essere uguale a zero,cioè:

$$\frac{1}{2}mv_F^2 = \frac{GM_T m}{R_T}$$

risulta

$$v_F = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = 10^6\ \frac{cm}{s}$$

Nel caso del sole ($R_S = 1.5\ 10^{13}\ cm$), si ha

$$v_S = \sqrt{\frac{2GM_S}{R_S}} = 4\ 10^6\ \frac{cm}{s}$$

Forze non conservative

L'attrito radente e l'attrito nei fluidi sono esempi di forze non conservative
Essi si oppongono sempre al moto per cui il lavoro compiuto lungo un percorso chiuso è diverso da zero

Una particella può in generale essere sottoposta a forze conservative e non conservative contemporaneamente

Il lavoro totale compiuto sulla particella quando si sposta da A a B, risulta

$$W = E_{K_B} - E_{K_A} = E_{P_A} - E_{P_B} + W'$$

dove W' è il lavoro compiuto dalle forze non conservative
Si ha quindi

$$(E_K + E_P)_B - (E_K + E_P)_A = W'$$

In generale W' è negativo quindi $(E_K + E_P)$ diminuisce passando da A a B

Il principio di conservazione della energia è valido in presenza di sole forze conservative

Nel caso di attriti l'energia perduta si è trasformata in calore: l'energia termica sviluppata è esattamente uguale all'energia meccanica dissipata

Il lavoro prodotto dalla forza di attrito è uguale e contrario all'aumento dell'energia termica Q

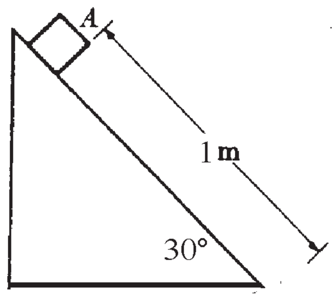
$$W' = -Q$$

Si può quindi scrivere

$$\boxed{(E_K + E_P)_B = (E_K + E_P)_A + W'} \qquad (8.10)$$

Principio di conservazione dell'energia dell'universo
L'energia si trasforma da una forma all'altra ma non può essere nè creata nè distrutta

ESEMPIO:Un blocco di 3Kg scivola soggetto a una forza di attrito $f_s = 5\ N$ lungo un piano inclinato lungo $l = 1m$. Determinare la velocità del blocco quando abbandona il piano inclinato.



Risulta $E_{P_i} = mgl \sin\frac{\pi}{6}$ e $v_i = 0$ quindi $E_{K_i} = 0$
Quando il corpo raggiunge la fine del piano inclinato risulta $E_{P_f} = 0$ e $E_{K_f} = \frac{1}{2}mv_f^2$

La forza di attrito compie il lavoro

$$W_S = -f_s l = -5\ J$$

Applicando la (8.10)

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = E_{P_i} + W_S = 9.7\ J$$

quindi $v_f = 2.54\ \frac{m}{s}$

ESEMPIO: Un corpo inizialmente in quiete cade attraverso un fluido viscoso da una altezza y_0. Determinare la rapidità con cui vengono dissipate la sua energia cinetica e potenziale gravitazionale

Si ha

$$\frac{d(E_K + E_P)}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2}mv^2 + mgy\right)}{dt}$$

inoltre

$$d(E_K + E_P) = dW'$$

per cui

$$\frac{d(E_K + E_P)}{dt} = \frac{dW'}{dt} = F'v$$

nel caso dei fluidi $F' = -K\eta v$, quindi

$$\frac{d(E_K + E_P)}{dt} = -K\eta v^2 \tag{8.11}$$

L'energia cinetica e potenziale sono trasformate in energia termica

Quando viene raggiunta la velocità limite, l'E_K diventa costante ed è la sola energia potenziale a essere trasformata in energia termica

$$\frac{d(E_K + E_P)_{ss}}{dt} = \frac{d(E_P)_{ss}}{dt} = mg\frac{dy}{dt} = mgv \tag{8.12}$$

Dalla (8.11) e (8.12) ricaviamo l'espressione già trovata della velocità limite

$$v_l = -\frac{mg}{k\eta}$$