

Teorema sull'*lca* (in rif. all'esercizio n° 3 pag. 193): Dato un albero binario completo B i cui nodi sono numerati con i *dfs numbers*,

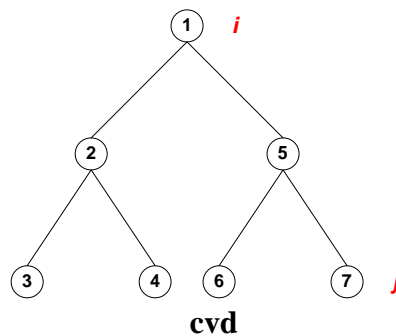
il nodo i è "*ancestor*" del nodo j

\Leftrightarrow

$l(i) \leq l(j)$ e $l(j) < l(i) + s(i)$.

DIM.:

\Rightarrow) Se i è antenato di j , allora $l(i) \leq l(j)$ è immediatamente provato per la numerazione *dfs* dei nodi dell'albero. Ma se i è antenato di j , si ha anche che $l(j) \leq l(i) + s(i) - 1$. Infatti il valore massimo che $l(j)$ può assumere è proprio $l(i) + s(i) - 1$ (vedi esempio in figura sotto).



\Leftarrow) Per dimostrare la seconda implicazione, poiché le due condizioni devono verificarsi contemporaneamente, supponiamo vera la prima e cerchiamo di arrivare ad una contraddizione relativa alla seconda.

Se $l(i) \leq l(j)$, ciò può voler dire che

- a) j appartiene al sottoalbero di i , ed in tal caso il teorema è banalmente dimostrato.
- b) j **non** appartiene al sottoalbero di i , e allora il suo valore $l(j)$ è $l(j) \geq l(i) + s(i)$. Ma ciò contraddice la seconda condizione, che deve necessariamente verificarsi insieme alla prima.

Si può concludere che il verificarsi di entrambe le disuguaglianze $l(i) \leq l(j)$ e $l(j) < l(i) + s(i)$ implica necessariamente che j appartiene al sottoalbero di i , e quindi che il nodo i è *ancestor* del nodo j .

cvd