

# Elettrostatica

## 1. Varie:

**Intensità della forza (forza di Coulomb):**

$$F = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \quad \text{con } k = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$$

**Densità lineare, spaziale e volumetrica:**

$$\lambda = \frac{dq}{dx} \Leftrightarrow \lambda l = q$$

$$\sigma = \frac{dq}{dA}$$

$$\rho = \frac{dq}{dVol}$$

**Intensità della forza di un'asta carica e di una carica esterna:**

$$F = \frac{k \cdot q^+ \cdot Q}{d \cdot (d + l)} \quad \text{con } \begin{cases} l = \text{lunghezza dell'asta} \\ d = \text{distanza carica-asta} \end{cases}$$

**Distribuzione sui punti dell'asse di un anello:**

$$dF_x = \frac{k \cdot \lambda \cdot dl}{r^2} \cdot \underbrace{\frac{x}{r}}_{\cos(\theta)} \Leftrightarrow F = F_x = \int \frac{k \cdot \lambda \cdot dl \cdot x}{r^3} \Leftrightarrow F_x = k \cdot \frac{q_x}{\sqrt{(r^2 + x^2)^3}}$$

**Intensità di corrente:**

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{I} = \frac{dQ}{dt} = \frac{dq}{dt} = \frac{V}{R} = \frac{\epsilon}{R} = \int J \cdot dA$$

$$\bar{I} = J \cdot A = n \cdot q \cdot v_x \cdot d \cdot A \quad \text{con } v_x \cdot d = \text{velocità di deriva}$$

## 2. Campo elettrico:

$$\vec{E} = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_{q_0}}{q_0} = k \cdot \frac{q^+}{r^2}$$

$$\text{puntiforme} \Rightarrow \vec{E} = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2}$$

$$\text{dipolo (punti dell'asse)} \Rightarrow \vec{E}_x = \frac{P}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^3} \quad \text{con } P = q \cdot a = \text{momento di dipolo}$$

$$\text{sbarra} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r}$$

$$\text{superficie piana} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0}$$

$$\text{lastra conduttrice} \Rightarrow \vec{E}_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \text{con } \begin{cases} \vec{E}_0 & \text{campo prima di aver inserito la lastra} \\ \vec{E}_L = 0 & \text{campo interno alla lastra} \end{cases}$$

$$\text{condensatore} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{\Delta V}{d} \quad \text{con } d = \text{distanza delle piastre del condensatore}$$

$$\text{cerchio} \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{2 \cdot \epsilon_0}$$

$$\text{anello} \Rightarrow \vec{E} = \frac{q_x}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \sqrt{(r^2 + x^2)^3}}$$

$$\begin{aligned}
\text{cilindro} &\Rightarrow \begin{cases} r > r_0 \Leftrightarrow \vec{E} = \frac{q \cdot r_0^2}{2 \cdot \epsilon_0 \cdot r} \\ r < r_0 \Leftrightarrow \vec{E} = \frac{q \cdot r}{2 \cdot \epsilon_0} \end{cases} \\
\text{sfera} &\Rightarrow \vec{E} = \begin{cases} r > r_0 \Leftrightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \\ r < r_0 \Leftrightarrow \vec{E} = 0 \end{cases} \\
\text{due sfere concentriche} &\Rightarrow \begin{cases} r > r_0 \Leftrightarrow \vec{E} = \frac{\rho \cdot r_0^3}{3 \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \rightarrow \text{campo coulombiano} \\ r < r_0 \Leftrightarrow \vec{E} = \frac{\rho \cdot r}{3 \cdot \epsilon_0} \rightarrow \text{campo non coulombiano} \end{cases}
\end{aligned}$$

### Densità di energia:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot E^2$$

### Energia del campo elettrico:

$$U = W \cdot Vol$$

### 3. Flusso:

$$\phi_s = \vec{E} \circ \vec{A} = |\vec{E}| \cdot |\vec{A}| \cdot \cos(\vartheta)$$

$$d\phi_s = \vec{E} \circ d\vec{A} \rightarrow \text{campo elettrico variabile}$$

$$\text{lastra conduttrice} \Rightarrow \phi = 2 \cdot A \cdot \vec{E} \quad \text{con } A = \text{area di base del cilindro}$$

$$\text{semicalotta sferica} \Rightarrow \phi = \pi \cdot r^2 \cdot \vec{E}$$

$$\text{sfera/superficie chiusa (con carica puntiforme all'esterno)} \Rightarrow \phi = 0$$

$$\text{sfera/superficie chiusa con carica puntiforme all'interno} \Rightarrow \phi = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\text{cerchio} \Rightarrow \phi = \frac{Q}{2 \cdot \epsilon_0}$$

### Teorema di Gauss:

$$\phi = \frac{\sum Q_i}{\epsilon_0}$$

### 4. Lavoro ed energia:

#### Energia cinetica:

$$L = \vec{F} \circ \Delta \vec{S} \Leftrightarrow L = \int_A^B \vec{F} \circ d\vec{S}$$

$$L = \Delta E_k = -\Delta U$$

#### Energia potenziale:

$$-q < 0 \Leftrightarrow \Delta U = -q\Delta V < 0 \text{ dato che } \Delta V = V_B - V_A > 0$$

$$q > 0 \Leftrightarrow \Delta U = -q\Delta V < 0 \text{ dato che } \Delta V = V_B - V_A < 0$$

$$\text{campo conservativo} \Rightarrow \begin{cases} \Delta U_{BA} = -\int_A^B \vec{F} \circ d\vec{S} \\ -\Delta U = \Delta E_k \Leftrightarrow \Delta E_k + \Delta U = 0 \Leftrightarrow \Delta(E_k + U) = 0 \end{cases}$$

$$\text{campo elettrico} \Rightarrow \Delta U_{BA} = -q \cdot \Delta V = -q \cdot \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\text{sistema di due cariche puntiformi} \Rightarrow U_{qQ} = \pm \frac{q_1 \cdot q_2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r}$$

**Circuitazione in un campo conservativo:**

$$\sum \vec{E} \cdot \Delta S \cdot \cos(\vartheta) = 0$$

**5. (Differenza di) Potenziale elettrico o tensione:**

$$\Delta V_{BA} = \frac{\Delta U_{BA}}{q} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \Leftrightarrow \vec{E} = - \frac{\Delta V}{\Delta l}$$

**Potenziale elettrico di una forza colombiana o carica puntiforme:**

$$\Delta V_{BA} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

$$V_r = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r}$$

**Potenziale elettrico con distribuzione continua:**

$$V_r = \int \frac{dq}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int \frac{dq}{r}$$

**Distribuzione sferica di carica uniforme (isolante):**

$$\begin{cases} r > r_0 \Leftrightarrow V = \frac{\rho \cdot r_0^3}{3 \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \\ r = r_0 \Leftrightarrow V = \frac{\rho \cdot r_0^2}{3 \cdot \epsilon_0} \\ r < r_0 \Leftrightarrow V = \frac{\rho \cdot r_0^2}{2} - \frac{\rho \cdot r^2}{6 \cdot \epsilon_0} \end{cases}$$

**Distribuzione sferica di carica uniforme (conduttore):**

$$\begin{cases} r > r_0 \Leftrightarrow V = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r} \\ r \leq r_0 \Leftrightarrow V = \frac{\sum q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_0} \end{cases}$$

**Sbarretta e punto esterno:**

$$V_p = \frac{\lambda}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left[ \ln(l + \sqrt{l^2 + d^2}) - \ln(d) \right] = \frac{\lambda}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \ln \left( \frac{l + \sqrt{l^2 + d^2}}{d} \right)$$

**Due sfere conduttrici collegate da un filo:**

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

**6. Generatore di corrente:**

Se si passa attraverso un generatore ideale nel verso della corrente, la variazione di potenziale è  $+\epsilon$ , nel verso opposto è  $-\epsilon$ .

**Forza elettromotrice (f.e.m.):**

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{\Delta q} = I \cdot R = \frac{P}{I}$$

**Potenza:**

$$P_\varepsilon = \frac{dU}{dt} = \frac{dq}{dt} \cdot \varepsilon = I \cdot \varepsilon$$

**In parallelo:**

$$\varepsilon_{tot} = \text{cost}$$

$$I_{tot} = \sum_{i=1}^n I_i$$

**In serie:**

$$\varepsilon_{tot} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$$

**7. Condensatori:**

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0 \cdot A} = \frac{\Delta V}{d} \quad \text{con } d = \text{distanza delle piastre del condensatore}$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\vec{E} \cdot d} = \frac{\varepsilon_0 \cdot A}{d} \quad \text{con } A = \text{area delle armature}$$

$$\Delta V = \frac{Q}{C} = \vec{E} \cdot d$$

**Condensatore sferico:**

$$C = \left| \frac{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0}{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}} \right| = \left| 4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{r_2 \cdot r_1}{r_1 - r_2} \right|$$

**In parallelo:**

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^n C_i$$

$$V_{tot} = \text{cost}$$

**In serie:**

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

$$C_{12} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$

$$V_{tot} = \sum_{i=1}^n V_i$$

**Lavoro di carica di un condensatore immagazzinato come energia potenziale  $U$ :**

$$L = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \cdot V^2 \cdot C = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot V$$

**Energia del condensatore:**

$$U_C = W \cdot Vol$$

**Condensatore con dielettrico:**

$$\begin{aligned} \text{con generatore scollegato} &\Rightarrow \begin{cases} V = \frac{V_0}{k} & \text{con } k = \text{costante dielettrica} \\ E = \frac{V}{d} = \frac{V_0}{k \cdot d} \Leftrightarrow E = \frac{V_0}{k \cdot d} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_p}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \sigma_p = \epsilon_0 \cdot \left( \frac{V_0}{k \cdot d} - E \right) + \sigma \\ C = k \cdot C_0 = k \cdot \frac{Q_0}{V_0} & \text{con } C_0 = \text{senza dielettrico} \end{cases} \\ \text{con generatore collegato} &\Rightarrow \begin{cases} V = \text{cost} \\ C = k \cdot C_0 = k \cdot \frac{Q_0}{V_0} \end{cases} \end{aligned}$$

**Forza attrattiva delle piastre:**

$$\vec{F} = \frac{Q^2}{2 \cdot \epsilon_0 \cdot A}$$

**Quantità di cariche all'interno di un condensatore:**

$$Q = n \cdot V \cdot q$$

**Densità di corrente:**

$$J = \frac{I}{A} = n \cdot q \cdot v_x \cdot d$$

**Carica e scarica di un condensatore:**

$$\begin{aligned} \text{carica} &\Rightarrow \begin{cases} \text{carica istantanea sulle piastre} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} Q = \epsilon \cdot C \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \right) \\ \text{carica sulle piastre} \Rightarrow Q(t) = Q(0) \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \right) & \text{con } Q(0) = \epsilon \cdot C \\ \text{intensità di corrente} \Rightarrow I(t) = I(0) \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} & \text{con } \begin{cases} I(0) = \frac{\epsilon}{R} \\ I(\infty) = 0 \end{cases} \\ \text{d.d.p. sulle piastre} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} V = \epsilon \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \right) \\ \text{lavoro della batteria} \Rightarrow L = C \cdot \epsilon^2 \\ \text{energia acquisita dal condensatore} \Rightarrow U = \frac{1}{2} \cdot C \cdot \epsilon^2 \end{cases} \\ \text{scarica} &\Rightarrow \begin{cases} \text{carica sulle piastre} \Rightarrow Q(t) = Q(0) \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} & \text{con } Q(0) = \epsilon_c \cdot C = V \cdot C \\ \text{intensità di corrente} \Rightarrow I(t) = -I(0) \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} & \text{con } I(0) = \frac{\epsilon_c}{R} = \frac{V}{R} \\ \text{d.d.p. sulle piastre} \Rightarrow V = \epsilon \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \\ \text{energia accumulata nel campo } \vec{E} \text{ del condensatore} \Rightarrow U = C \cdot V^2 \\ \text{energia dissipata dalla resistenza} \Rightarrow U = \frac{1}{2} \cdot C \cdot V^2 \end{cases} \end{aligned}$$

**8. Resistenze:**

Se si passa attraverso una resistenza nel verso della corrente, la variazione di potenziale è  $-IR$ , nel verso opposto è  $+IR$ .

### Leggi di Ohm:

$$R = \frac{V}{I}$$

$$R = \frac{l}{\sigma \cdot S} = \rho \cdot \frac{l}{S} \quad \text{con} \begin{cases} l = \text{lunghezza} \\ S = \text{sezione} \end{cases}$$

### In parallelo:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$

$$R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\Delta V = \text{cost}$$

### In serie:

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i$$

$$V_{tot} = \sum_{i=1}^n V_i$$

$$\Delta I = \text{cost}$$

### Potenza:

$$P_R = \frac{dq}{dt} \cdot I \cdot R = I^2 \cdot R = I \cdot V = \frac{V^2}{R}$$

### Resistività:

$$\rho = \frac{E}{J}$$

### Leggi di Kirchhoff:

- 1) *legge dei nodi* o *legge di conservazione delle cariche* = la somma delle correnti che giungono in un nodo è uguale alla somma delle correnti che se ne allontanano;
- 2) *legge delle maglie* o *principio di conservazione dell'energia in un circuito* = in un circuito il lavoro compiuto per far muovere una carica fino a riportarla allo stesso punto è pari a zero;