

Sistemi di molte particelle

1. Sistemi di molte particelle: sono necessarie delle **approssimazioni**, che hanno generalmente lo scopo di semplificare i calcoli e consistono in una (o entrambe) delle seguenti operazioni:

1) ignorare l'esistenza di un qualche tipo di forza, come ad es.: l'attrito, la risultante delle forze esterne e il loro momento risultante (per studiare soltanto i moti interni di un sistema di particelle, ignorando i moti di centro di massa), e le forze esterne (ma il sistema non può scambiare energia con l'esterno);

2) dare, di un certo fenomeno, una descrizione matematica più semplice di quella reale;

Per tali sistemi sono state studiate approssimazioni; ciascun tipo dà luogo ad un **modello** di materia e viene usato per descrivere alcune proprietà di una classe di materiali. Si ottengono quindi risposte ad una classe di problemi per mezzo del minor numero possibile di calcoli. Ciascun modello ha un suo campo di validità (l'insieme di fenomeni che riesce a descrivere e l'insieme di materiali ai quali si può applicare).

Stati della materia: vedi "*Modelli discreti*"; i modelli di materia si possono classificare in diversi modi, ma quella più antica si basa su alcune proprietà macroscopiche, ignorando la struttura microscopica:

1) solido = sistema materiale che possiede forma e volume propri;

2) liquido = sistema materiale che non possiede forma propria ed ha bisogno di stare in un contenitore;

3) gas = sistema materiale che non possiede né forma né volume propri;

Poiché il volume occupato è una proprietà del singolo sistema, è più agevole parlare di **densità** (= massa per unità di volume). Il costo energetico di una variazione di densità con mezzi meccanici (applicazione di forze) è molto alto per solidi e liquidi, tanto che spesso la densità viene considerata costante.

Modelli continui: altro tipo di classificazione dove si ignora la struttura granulare (atomi e molecole) della materia. Questo permette di descriverla utilizzando tutta la potenza dell'analisi matematica (calcolo differenziale ed integrale), ma non permette di spiegare tutti i fenomeni collegabili, appunto, a proprietà atomiche e molecolari. Il modello continuo più semplice è quello del **corpo rigido**. Il passaggio dal sistema rigido di particelle discrete (già visto) al sistema rigido continuo non comporta l'introduzione di nuovi concetti. Ad un livello più alto di complessità si trova il modello del **continuo elastico**, che consente di studiare fenomeni di deformazione (e di eventuale ritorno alla forma originaria) osservati nella maggior parte dei materiali solidi. Altro modello è quello del **fluido incompressibile**; consideriamo un recipiente indeformabile contenente un liquido sottoposto all'azione della forza di gravità:

ρ = densità uniforme in tutto il volume occupato dal liquido

$\vec{P}_{\Delta V} = \rho \cdot \Delta V \cdot \vec{g}$ = forza peso che agisce su ogni volumetto ΔV

ΔV = cubo di liquido con una colonna di sezione ΔA ed altezza h

La forza peso che tale colonna di liquido esercita su ΔV è:

$$\vec{P}_{\Delta V} = \rho \cdot \Delta A \cdot h \cdot \vec{g}$$

Poiché l'area ΔA dipende dal ΔV scelto, è più comodo parlare in termini della grandezza scalare **pressione**:

$$P = \rho \cdot h \cdot g$$

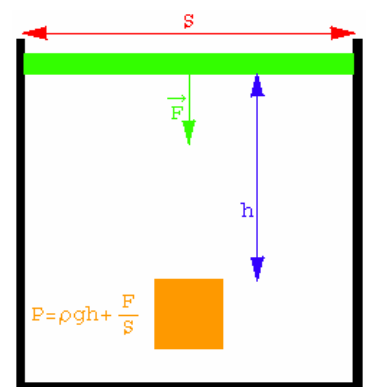
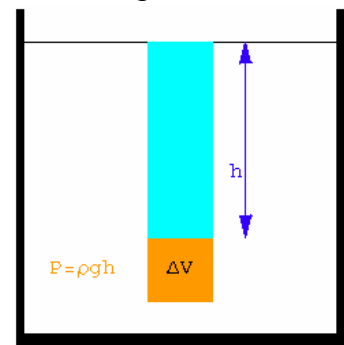
che agisce in tutte direzioni, esercitando una forza perpendicolarmente a ciascuna faccia di ΔV . La risultante di tutte le forze di pressione agenti su ΔV è zero, altrimenti il liquido in ΔV si muoverebbe. Se una faccia ΔS del volumetto ΔV è in contatto con la parete del contenitore, la risultante diventa pari a:

$$|F_p| = \rho \cdot \Delta S \cdot h \cdot g$$

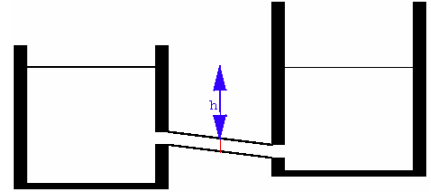
ed è perpendicolare alla parete e diretta verso l'esterno. Sulla parete del contenitore, alla profondità h , agisce la stessa pressione P che agisce nel liquido; la parete reagisce con una pressione diretta in senso opposto, in modo tale che su ciascun volumetto di liquido contiguo alla parete agisce una risultante nulla.

Statica dei fluidi: se applichiamo una pressione esterna (per esempio applicando una forza F ad un tappo scorrevole di area S), questa si trasmette per tutto il volume occupato dal fluido. La pressione alla profondità h sarà:

$$P_h = \frac{|F|}{S} + \underbrace{\rho \cdot h \cdot g}_{\text{liquido sovrastante}}$$



Considerando due **recipienti comunicanti** contenenti un liquido. All'equilibrio non deve esserci spostamento di fluido nel tubo, quindi una qualsiasi porzione del tubo deve essere soggetta alla stessa pressione dai due lati; ciò si ottiene se le superfici dei due recipienti si trovano alla stessa quota.



Nel **galleggiamento** consideriamo un cilindro verticale all'interno di un liquido:

ρ_l, ρ_c = densità del liquido e del cilindro

A = area della sezione del cilindro

D = altezza del cilindro

h = profondità della base inferiore del cilindro

quindi la forza peso agente sul cilindro e le forze di pressione sulle basi sono:

$$\vec{F}_p = A \cdot D \cdot \rho_c \cdot \vec{g}$$

$$\vec{F}_B = -A \cdot h \cdot \rho \cdot \vec{g} \quad \vec{F}_A = A \cdot (h + D) \cdot \rho \cdot \vec{g}$$

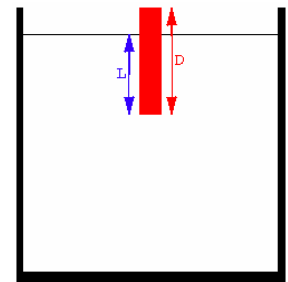
La risultante delle forze applicate al cilindro è:

$$\vec{F}_{ris} = \vec{F}_p + \vec{F}_B + \vec{F}_A = A \cdot D \cdot \rho_c \cdot \vec{g} - A \cdot h \cdot \rho \cdot \vec{g} + A \cdot (h + D) \cdot \rho \cdot \vec{g} = A \cdot D \cdot (\rho_c - \rho) \cdot \vec{g}$$

$$\begin{cases} \rho_c > \rho \Leftrightarrow \vec{F}_{ris} \text{ ha lo stesso verso di } \vec{g} \Leftrightarrow \text{il cilindro è spinto verso il basso} \\ \rho_c < \rho \Leftrightarrow \vec{F}_{ris} \text{ ha verso opposto a } \vec{g} \Leftrightarrow \text{il cilindro è spinto verso l'alto} \end{cases}$$

Se ci troviamo nel secondo caso, il **Principio di Archimede** dice che può accadere che il cilindro sia parzialmente immerso per una profondità L :

$$\left. \begin{aligned} \vec{F}_A &= 0 \\ \vec{F}_B &= -A \cdot L \cdot \rho \cdot \vec{g} \\ \vec{F}_p &= A \cdot D \cdot \rho_c \cdot \vec{g} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{F}_{ris} = \vec{F}_p + \vec{F}_B = A \cdot (D \cdot \rho_c - L \cdot \rho) \cdot \vec{g} \\ L = \frac{D \cdot \rho_c}{\rho} \Leftrightarrow \vec{F}_{ris} = 0 \Leftrightarrow \text{galleggia} \end{cases}$$



Fluidi in movimento: si considera un liquido, di densità ρ costante, che scorre all'interno di un condotto, riempiendone completamente la sezione di area S con velocità (costante in tutti i punti) U . Fissando un piano che taglia ortogonalmente il condotto, la quantità di liquido e la massa che passa, in un tempo Δt , dal piano è quella contenuta nel volume:

$$\Delta V = S \cdot \vec{U} \cdot \Delta t$$

$$\Delta M = \rho \cdot \Delta V$$

Il **flusso volumetrico** misura la portata del condotto ed è dato da:

$$Fl_{vol} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = S \cdot U$$

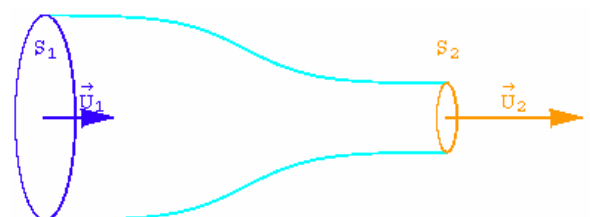
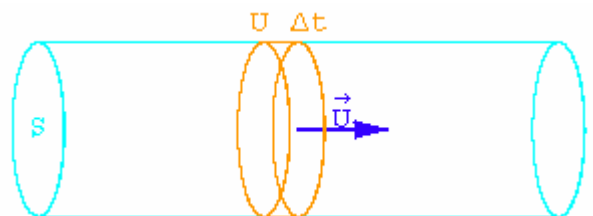
Il **flusso massico** misura la portata del condotto quando la densità è variabile:

$$Fl_{mas} = \frac{\Delta M}{\Delta t} = \rho \cdot Fl_{vol} = \rho \cdot S \cdot U$$

L'**equazione di continuità** si utilizza quando si ha che l'area della sezione del condotto varia. In due punti, con aree delle sezioni pari a S_1 ed S_2 , se non ci sono né immissioni né fuoruscite di fluido, i flussi nei due punti debbono essere uguali:

$$S_1 \cdot U_1 = S_2 \cdot U_2$$

- il condotto si allarga \Leftrightarrow velocità diminuisce;
- il condotto si restringe \Leftrightarrow velocità aumenta;



Modelli discreti: bisogna vedere come le molecole di una determinata sostanza si organizzano e si dispongono spazialmente, dato che cambiano sia le proprietà dei materiali che quelle dei modelli. Dal punto di vista microscopico, le caratteristiche che distinguono fra loro i principali stati sono:

- 1) solido = disposizione ordinata delle molecole (periodicità spaziale) e scarsa mobilità delle stesse (ciascuna particella ha, come vicine, sempre le stesse particelle);
- 2) liquido = manca l'ordine spaziale e le molecole sono molto mobili (fluidità): le particelle vicine spazialmente cambiano in continuazione. La densità è molto simile a quella del cristallo;
- 3) gassoso = maggiore fluidità che da una densità molto più piccola di quella dello stato liquido;

Alcuni materiali possono esistere nello **stato vetroso**, una struttura amorfa caratterizzata da disordine spaziale (come nei liquidi) e ridotta mobilità delle molecole (come nei solidi).

N.B.: il termine **cristallo** indica un materiale la cui struttura atomica o molecolare (a seconda dei casi) è ordinata in un reticolo cristallino.

N.B.: il termine **vetro** indica materiali con struttura amorfa, come il vetro per finestre, il quarzo fuso. Il cosiddetto “cristallo di Boemia”, per esempio, dal punto di vista della struttura interna, è un semplice vetro.

Propagazione del suono: consideriamo una catena lineare di particelle identiche, disposte lungo una retta a distanze uguali l'una dalla successiva. Poiché ci interesseremo solo a piccoli spostamenti delle particelle dalla loro posizione di equilibrio, anziché adoperare le forze intermolecolari, per semplificare le cose assumiamo che fra ciascuna particella e le sue due vicine ci sia una molla, la cui lunghezza a riposo è esattamente uguale alla distanza di equilibrio fra due particelle. Inizialmente tutte le particelle e le molle sono ferme, ciascuna nella sua posizione di equilibrio. Applicando un impulso J alla prima particella della catena, la prima particella acquista una quantità di moto ed un'energia cinetica:

$$\vec{p} = \vec{J}$$

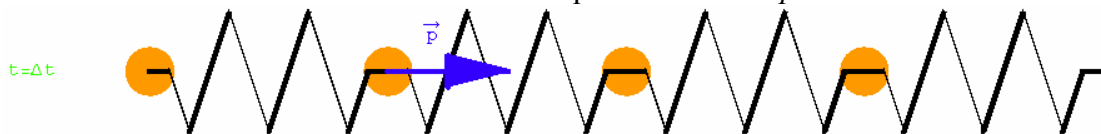
$$E_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{|p|^2}{m}$$



La prima particella parte in avanti, comprime la molla, la quale applica una forza sia alla prima che alla seconda particella. Siamo in presenza di un urto elastico, senza contatto diretto, fra la prima particella (che inizialmente ha quantità di moto p) e la seconda particella (che inizialmente è ferma):



Poiché le due particelle hanno la stessa massa, alla fine dell'urto, dopo un certo tempo Δt , avremo la prima particella ferma e la seconda che si muove con quantità di moto p :



Il processo si ripete fra la seconda particella e la terza, e così via. Ad ogni intervallo di tempo Δt abbiamo uno spostamento della quantità di moto e dell'energia cinetica da una particella alla successiva. Questo è il meccanismo base, a livello microscopico, con cui viaggia (si propaga) quello che chiamiamo suono.

Cerchiamo di rendere il modello più aderente alla realtà:

- 1) se abbiamo un sistema tridimensionale, da un punto di vista qualitativo non cambia molto, mentre i calcoli diventano più laboriosi;
- 2) se abbiamo un sistema disordinato, cioè le particelle non sono ordinate e disposte a distanza regolare, (un liquido, o un gas) i calcoli diventano più complessi, ma dal punto di vista qualitativo la situazione è la stessa: abbiamo un “pacchetto” contenente energia e quantità di moto che viaggia nello spazio, saltando da una particella all'altra (o da un insieme di particelle ad un altro);
- 3) con impulso si intende un “TOC”, mentre per suono si intende un qualcosa che ha una lunga durata nel tempo e può variare anche in modo complesso. Tutto quello di cui abbiamo parlato funziona seguendo esclusivamente l'equazione di Newton; solo per semplificare abbiamo adoperato concetti come quantità di moto, energia, urto, e comunque si tratta sempre di concetti derivati dall'equazione di Newton. Uno dei modi di leggerla in termini di causa (la forza) ed effetto (il movimento,

rappresentato dall'accelerazione) è che se la causa (= forza) è la sovrapposizione (= somma) di due cause F_1 ed F_2 ciascuna delle quali genera, rispettivamente, l'effetto a_1 ed a_2 (= accelerazione a_1 ed a_2), l'effetto risultante (= accelerazione) sarà la sovrapposizione (= la composizione) dei due moti:

$$\vec{a}_r = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$$

vale quello che si chiama il **Principio di sovrapposizione**. Considerando un suono realistico, una corda di chitarra che vibra, si può descrivere matematicamente tale vibrazione come una successione di impulsi di varia ampiezza. Grazie al principio di sovrapposizione possiamo descrivere la propagazione di un qualsiasi suono in un sistema di particelle allo stato fluido, come l'aria o l'acqua. Abbiamo presentato una descrizione della propagazione del suono in termini del meccanismo microscopico che ne costituisce la base. Tale meccanismo microscopico si trasferisce naturalmente in una rappresentazione matematica in termini di propagazione di impulsi.

Meccanica statistica: si indica un formalismo (cioè un insieme di concetti e di tecniche matematiche) che permette di passare, attraverso un insieme di semplificazioni, dalla descrizione microscopica (particella per particella) di un sistema ad una descrizione globale, per mezzo di grandezze fisiche macroscopiche. Dato un frammento anche piccolissimo di materia (un granello di polvere), non è possibile seguire la traiettorie, e quindi nemmeno misurare le velocità, di tutte le molecole che lo compongono. Si possono misurare soltanto grandezze macroscopiche, cioè grandezze fisiche che:

- 1) caratterizzano globalmente l'intero sistema (volume occupato, energia totale);
- 2) sono valori medi di proprietà della singola particella (densità, energia cinetica media delle particelle);

Per quanto riguarda i calcoli teorici, sebbene sia possibile scrivere le equazioni del moto di tutte le particelle di un sistema, in pratica non si possono seguire più di qualche milione di particelle. In un granello di polvere molto piccolo ci sono miliardi di milioni di molecole. Supponiamo tuttavia, per un momento, di poterlo fare. Per descrivere la configurazione di un sistema di N particelle uguali dobbiamo:

- 1) numerare tutte le particelle;
- 2) specificare l'insieme delle n posizioni r_n ;
- 3) specificare l'insieme delle n velocità v_n ;

Il **microstato** è l'insieme dei valori r_n ed v_n che individuano la configurazione microscopica del sistema. A causa del moto delle particelle, il microstato di un sistema va cambiando nel tempo. Per specificarlo si utilizza una descrizione statistica fornendo, anziché i valori di posizione e velocità per tutte le n particelle, le rispettive **densità di probabilità** o funzioni di distribuzione della posizione, della velocità e il numero medio previsto di particelle/massa per unità di volume (densità-numero/densità di massa):

$$f_{pos}(\vec{r}) \quad f_{vel}(\vec{v}) \quad n \cdot f_{pos}(\vec{r}) \quad \rho(\vec{r}) = m \cdot n \cdot f_{pos}(\vec{r})$$

Se scambiamo di posto due particelle, il microstato cambia ma la funzione di distribuzione no; lo stesso accade se scambiamo le velocità. Se lasciamo che il sistema si evolva nel tempo, dobbiamo aspettarci molti microstati che differiscono solo per minuti particolari di questo genere. Una funzione di distribuzione corrisponde quindi ad un grandissimo numero di microstati; l'insieme di questi, caratterizzati dalle stesse funzioni di distribuzione, si chiama **macrostato** o stato macroscopico del sistema. Potrebbe pure succedere che le funzioni di distribuzione siano indipendenti dal tempo; se è così, si dice che il macrostato, che corrisponde a quella funzione di distribuzione (che non dipende dal tempo), è (o descrive) uno **stato di equilibrio termodinamico**. Ci occuperemo principalmente di questo secondo caso ed assumeremo che qualsiasi sistema di particelle, lasciato indisturbato, raggiunge, prima o poi, uno stato di equilibrio termodinamico. **Grandezze o variabili termodinamiche** caratterizzano il sistema nel suo complesso per mezzo di opportune grandezze macroscopiche che derivano da proprietà delle singole particelle e si calcolano utilizzando le funzioni di distribuzione. Esempi sono:

- il volume occupato dal sistema di particelle;
- la densità media;
- l'energia cinetica totale e l'energia cinetica media;