

# Dinamica

## 1. Varie:

**Dinamica:** studia le cause del moto.

**Forza:** grandezza fisica in grado di modificare lo stato di moto di una particella.

**Seconda legge di Newton o Secondo principio della dinamica:** relazione che lega la forza che viene applicata su una particella al suo moto:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Fissando un sistema di riferimento  $xyz$ , si ha che la scomposizione lungo le componenti è data da:

$$(F_x, F_y, F_z) = m \cdot (a_x, a_y, a_z) = (m \cdot a_x, m \cdot a_y, m \cdot a_z) \Leftrightarrow \begin{cases} F_x = m \cdot a_x \\ F_y = m \cdot a_y \\ F_z = m \cdot a_z \end{cases}$$

Sulla particella di massa  $m$  agiscono le tre forze:

$$\begin{cases} F_x = (F_x, 0, 0) \Leftrightarrow \text{asse } x \\ F_y = (0, F_y, 0) \Leftrightarrow \text{asse } y \\ F_z = (0, 0, F_z) \Leftrightarrow \text{asse } z \end{cases}$$

**N.B.:** la forza ha stessa direzione e verso dell'accelerazione.

**Forza risultante:** somma (vettoriale) delle forze applicate contemporaneamente ad una particella.

**Prima legge di Newton o Primo principio della dinamica:** *“ogni corpo non soggetto a forze persevera nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme”*. Quindi se la forza risultante è nulla ( $F=0$ ), lo sarà anche l'accelerazione ( $a=0$ ) e quindi il vettore velocità istantanea sarà costante  $v=\text{cost.}$  Si può avere:

1)  $v=0 \Rightarrow$  la particella è ferma e vi resta;

2)  $v \neq 0 \Rightarrow$  la particella è in movimento e continuerà a muoversi con traiettoria rettilinea;

**Terza legge di Newton o Principio di azione e reazione:** *“ad ogni azione corrisponde una reazione con direzione uguale e verso contrario”*.

**Peso:** è una forza.

**Massa:** misura la quantità di materia.

**Forze fondamentali:**

- 1) gravitazionale;
- 2) elettromagnetica;
- 3) nucleare debole;
- 4) nucleare forte;

**Forza di gravità o Forza peso:** forza “naturale” che definisce la direzione verticale. L'accelerazione di gravità ha lo stesso valore per tutti i corpi; questo significa che su ogni oggetto agisce una forza di gravità proporzionale alla massa dell'oggetto stesso. La forza gravitazionale è la forza che fa cadere gli oggetti verso il centro della Terra e che la mantiene, insieme con gli altri pianeti, in orbita intorno al Sole, che governa il moto delle stelle e delle galassie. Essa si esercita sempre fra masse: due masse si attraggono sempre, a qualunque distanza l'una dall'altra si trovino. Tuttavia, man mano che aumenta la distanza, la forza gravitazionale fra due masse va diminuendo:

$$|\vec{F}| = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad \text{con} \quad \begin{cases} G \simeq 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \\ r = |r_1 - r_2| \end{cases}$$

**N.B.:** se, in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $xyz$ , uno degli assi (ad es. l'asse  $z$ ) è diretto verticalmente, la forza di gravità si esprime come:

$$\vec{G} \Rightarrow \begin{cases} G_x = m \cdot a_x = 0 \Leftrightarrow \text{asse } x \\ G_y = m \cdot a_y = 0 \Leftrightarrow \text{asse } y \\ G_z = m \cdot a_z = m \cdot g \Leftrightarrow \text{asse } z \end{cases}$$

**Accelerazione di gravità:** accelerazione diretta verticalmente verso il basso con valore costante:

$$\vec{g} \approx 9.8 \frac{m}{s^2}$$

**Campo gravitazionale:** interpretazione dell'accelerazione di gravità come forza peso per unità di massa.

## 2. Vincoli:

**Vincolo:** qualsiasi sistema materiale che limita la libertà di movimento di una particella.

**Reazione vincolare:** forza (vettore) esercitata da un vincolo e perpendicolare ad esso, che non ha modulo fissato a priori ma si adegua caso per caso.

**Piano inclinato senza attrito:** si prendere un sistema di riferimento ortogonale  $xy$  con l'asse  $x$  parallelo al piano inclinato:

$$\vec{G} = m \cdot \vec{g} = (G_{tan}, G_{nor}) = (-m \cdot g \cdot \sin(\alpha), -m \cdot g \cdot \cos(\alpha))$$

$$\vec{G} = \vec{G}_{tan} + \vec{G}_{nor} \quad \text{con} \begin{cases} \vec{G}_{tan} = (-m \cdot g \cdot \sin(\alpha), 0) \\ \vec{G}_{nor} = (0, -m \cdot g \cdot \cos(\alpha)) \end{cases}$$

$$\vec{V} = (0, V)$$

$$\vec{F}_{ris} = \vec{G} + \vec{V} = (-m \cdot g \cdot \sin(\alpha), V - m \cdot g \cdot \cos(\alpha))$$

$$\vec{F}_{ris_y} = V - m \cdot g \cdot \cos(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \vec{F}_{ris} = (-m \cdot g \cdot \sin(\alpha), 0) = \vec{G}_{tan}$$

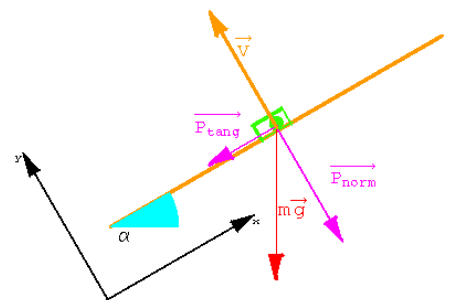
$$\vec{G} = \vec{G}_{tan} = -m \cdot g \cdot \sin(\alpha)$$

$$a = g \cdot \sin(\alpha)$$

$$\vec{G} + \vec{V} = m \cdot \vec{a} \Leftrightarrow m \cdot g \cdot \frac{h}{l} = m \cdot a \Leftrightarrow a = g \cdot \frac{h}{l} \quad \text{con} \begin{cases} h = \text{altezza} \\ l = \text{lunghezza} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} h = l \cdot \cos(\alpha) \\ l = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot l}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot l \cdot l}{g \cdot h}} = l \cdot \sqrt{\frac{2}{g \cdot h}} \\ a = g \cdot \frac{h}{l} \\ v = a \cdot t = g \cdot \frac{h}{l} \cdot t \end{array} \right\} \Leftrightarrow v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

$$t = \sqrt{\frac{h}{g \cdot \sin(\alpha)}}$$



**Binario circolare (moto circolare uniforme):**

$m$  = massa della particella

$R$  = raggio del binario circolare

$v = \text{cost}$  velocità (scalare) del carrello

$$\vec{a}_{tan} = 0 \Leftrightarrow v = \text{cost}$$

$\vec{a}_{rad}$  = diretta verso il centro della circonferenza

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}_{rad} = m \cdot R \cdot \omega^2 = \text{forza esercitata dal binario diretta verso il centro della circonferenza}$$

**3. Forze variabili - Forze dipendenti dalla posizione:** forze che variano anche per piccoli spostamenti della particella sulla quale agiscono.

**Forza di richiamo elastica:** la forza esercitata dalla molla tende a riportare la lunghezza di questa al valore corrispondente alla configurazione di riposo (principio di azione e reazione):

$$\vec{F}_{est} = -\vec{F}_{mol}$$

$$\vec{F}_{mol} = m \cdot a = -k \cdot \overrightarrow{\Delta L} \quad \text{con} \begin{cases} k = \text{costante elastica} \\ \overrightarrow{\Delta L} = L_0 - L = \text{vettore allungamento} \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} a &= -\frac{k}{m} \cdot \overrightarrow{\Delta L} \\ \omega^2 &= \frac{k}{m} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow a = -\omega^2 \cdot \overrightarrow{\Delta L}$$

**Forza di gravità o forza peso:** vedi prima e dopo.

**4. Forze variabili - Forze dipendenti dalla velocità:** forze che dipendono dalla velocità della particella sulla quale agiscono.

**Forza centripeta:** quando una particella è obbligata a percorrere una traiettoria curva, la velocità della particella cambia direzione, quindi la particella è soggetta ad una accelerazione (radiale). L'accelerazione radiale, e quindi anche la corrispondente forza che la genera, è sempre diretta verso il centro della curva:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}_{rad} = m \cdot R \cdot \omega^2$$

Classificare una forza come centripeta significa mettere in evidenza l'effetto che essa provoca, anziché il meccanismo che fa agire la forza.

**Viscosità:** forza di reazione che si oppone al moto e che a livello microscopico nasce dall'interazione fra:

- 1) le molecole della superficie dell'oggetto che si muove nel fluido;
- 2) le molecole del fluido che entrano in contatto con l'oggetto;

$$\vec{F}_{vis} = -\eta \cdot \vec{v} \quad \text{con} \begin{cases} \vec{F}_{vis} = \text{forza che il fluido agisce sulla particella} \\ \eta = \text{costante che indica la forma della particella e la viscosità del mezzo} \\ \vec{v} \neq 0 = \text{velocità della particella} \end{cases}$$

**Moto di un corpo in un mezzo viscoso:**

$$\vec{F}_{vis} = -\eta \cdot \vec{v} \Leftrightarrow m \cdot a = -\eta \cdot \vec{v} \Leftrightarrow m \cdot a_x = -\eta \cdot v_x \Leftrightarrow m \cdot \frac{d'v_x}{dt} = -\eta \cdot v_x \Leftrightarrow v_x = v_0 \cdot \exp\left[-t \cdot \left(\frac{\eta}{m}\right)\right]$$

**Caduta di un corpo in un mezzo viscoso:**

$$\left. \begin{aligned} F_{ris_x} &= F_{gra_x} + F_{vis_x} = m \cdot g - \eta \cdot v_x \\ F_{ris_x} &= 0 \Leftrightarrow m \cdot g - \eta \cdot v_x = 0 \Leftrightarrow v_{F=0} = \frac{m \cdot g}{\eta} = \text{cost} \\ v_x \neq v_{F=0} &\Leftrightarrow v_x = v_{F=0} + u \Leftrightarrow g = \frac{d'v_x}{dt} = \frac{d'(v_{F=0} + u)}{dt} = \frac{d'u}{dt} \\ u &= v_x - v_{F=0} \Leftrightarrow v_x = v_{F=0} + (v_0 - v_{F=0}) \cdot \exp\left[-t \cdot \left(\frac{\eta}{m}\right)\right] \\ v_0 &= 0 \Leftrightarrow v_x = v_{F=0} \left\{ 1 - \exp\left[-t \cdot \left(\frac{\eta}{m}\right)\right] \right\} \\ \text{velocità limite} &\Rightarrow v_{lim} = g \cdot \left(\frac{m}{\eta}\right) \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow m \cdot \frac{d'u}{dt} = -\eta \cdot u \Leftrightarrow u = u_0 \cdot \exp\left[-t \cdot \left(\frac{\eta}{m}\right)\right]$$

**Attrito:** forza di reazione che si oppone al moto e che dipende dalla:

- 1) forza con cui i due oggetti sono premuti l'uno contro l'altro;
- 2) natura dei materiali di cui sono fatti i due oggetti;
- 3) maggiore o minore rugosità dei materiali di cui sono fatti i due oggetti;

Si può avere:

- 1) radente = quando c'è uno slittamento di un corpo sull'altro;
- 2) volvente o di rotolamento = quando un oggetto rotola su una superficie;

Ha due tipi di comportamento:

- 1) attrito statico = se i due corpi sono fermi l'uno rispetto all'altro;

$$A_{sta,max} = c_{sta} \cdot |P| = c_{sta} \cdot m \cdot g$$

- 2) attrito dinamico = se i due corpi sono in moto l'uno rispetto all'altro;

$$A_{dim} = c_{dim} \cdot |P| = c_{dim} \cdot m \cdot g$$

**Piano inclinato con attrito:** si prendere un sistema di riferimento ortogonale  $xy$  con l'asse  $x$  parallelo al piano inclinato:

$$\vec{G} = m \cdot \vec{g} = (G_{tan}, G_{nor}) = (m \cdot g \cdot \sin(\alpha), -m \cdot g \cdot \cos(\alpha))$$

$$\vec{V} = (0, V) = (0, m \cdot g \cdot \cos(\alpha)) = (0, -G_{nor})$$

$$\vec{A} = (A, 0)$$

$$\vec{F}_{ris} = \vec{G} + \vec{A} = (G_{tan} + A, 0) = (m \cdot g \cdot \sin(\alpha) + A, 0)$$

$$A_{max} = c \cdot G_{nor} = c \cdot m \cdot g \cdot \cos(\alpha)$$

I. Statico  $\Rightarrow$  Statico

$$|G_{tan}| \leq A_{max}$$

$$m \cdot g \cdot \sin(\alpha) \leq c \cdot m \cdot g \cdot \cos(\alpha) \Leftrightarrow \tan(\alpha) \leq c$$

$$A = -G_{tan} \Leftrightarrow A + G_{tan} = 0 = F_{ris,tan}$$

II. Statico  $\Rightarrow$  Dinamico

$$|G_{tan}| > A_{max}$$

$$m \cdot g \cdot \sin(\alpha) > c \cdot m \cdot g \cdot \cos(\alpha) \Leftrightarrow \tan(\alpha) > c$$

$$A = -A_{max} \Leftrightarrow m \cdot g \cdot \sin(\alpha) - c \cdot m \cdot g \cdot \cos(\alpha) = F_{ris,tan} \neq 0$$

$$A = g \cdot \sin(\alpha) - c \cdot g \cdot \cos(\alpha)$$

III. Dinamico  $\Rightarrow$  Dinamico/Statico

$$\vec{v} = (v_0, 0) \Leftrightarrow A = A_{max}$$

$$\vec{F}_{ris} = (m \cdot g \cdot \sin(\alpha) + A, 0)$$

1.  $A$  stesso verso di  $v \Rightarrow |v|$  aumenta  $\Rightarrow$  dinamico;

2.  $A$  verso opposto di  $v \Rightarrow |v|$  diminuisce  $\Rightarrow$  statico;

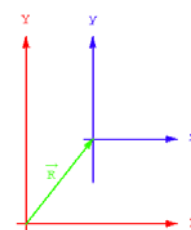
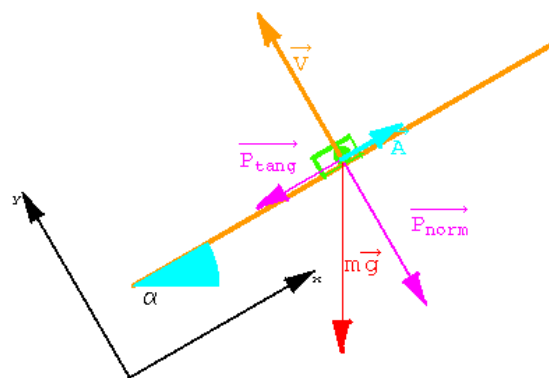
**Equazione di Newton in forma differenziale:** se la forza è in funzione della posizione della particella:

$$\vec{F}(\vec{r}) = m \cdot \vec{a} \Leftrightarrow \vec{F}(\vec{r}) = m \cdot \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

**5. Moti relativi e forze d'inerzia:** fissiamo due sistemi di riferimento cartesiani in modo tale che gli assi dell'uno siano paralleli agli assi dell'altro:

**Due sistemi immobili:** i due sistemi sono fermi l'uno rispetto all'altro:

- 1) il primo,  $xyz$ , solidale con l'oggetto;
- 2) il secondo,  $XYZ$ , solidale con la terra (e quindi fermo);
- 3) l'origine di  $xyz$  si trova nel punto  $\vec{R}_0$  di  $XYZ$ ;
- 4) l'origine di  $XYZ$  si trova nel punto  $\vec{r}_0$  di  $xyz$ ;
- 5)  $\vec{R}_0 = -\vec{r}_0$ ;



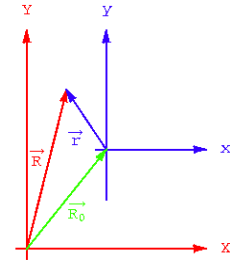
Una particella si troverà, rispetto ad ogni sistema di riferimento:

- 1) nel primo,  $xyz$ , in posizione  $\vec{r}$ ;
- 2) nel secondo,  $XYZ$ , in posizione  $\vec{R}$ ;

Si ha che:

$$\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{r}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{R} = -\vec{R}_0 + \vec{R}$$



**Due sistemi di cui uno in movimento:** il sistema  $xyz$  (quello solidale con l'oggetto) si muove rispetto ad  $XYZ$  con velocità  $\vec{V}_0$  ed accelerazione  $\vec{A}_0$ , e la particella rimane ferma rispetto a quest'ultimo:

- 1)  $\vec{R} = cost$ ;
- 2)  $\vec{R}_0 = \vec{R}_0(t)$ ;
- 3)  $\vec{r} = -\vec{R}_0(t) + \vec{R}$ ;

La velocità è:

$$1) \text{ in } XYZ \Rightarrow \vec{V} = \frac{d'\vec{R}}{dt} = 0;$$

$$2) \text{ in } xyz \Rightarrow \vec{v} = \frac{d'\vec{r}}{dt} = \frac{d'\vec{R}}{dt} - \frac{d'\vec{R}_0}{dt} = -\frac{d'\vec{R}_0}{dt} = -\vec{V}_0;$$

L'accelerazione è:

$$3) \text{ in } XYZ \Rightarrow \vec{A} = \frac{d'\vec{V}}{dt} = 0;$$

$$4) \text{ in } xyz \Rightarrow \vec{a} = \frac{d'\vec{v}}{dt} = -\frac{d'\vec{V}_0}{dt} = -\vec{A}_0;$$

Si ha quindi che:

$$\vec{V}_0 = cost \Leftrightarrow \vec{a} = -\vec{A}_0 = 0$$

$$\vec{V}_0 \neq cost \Leftrightarrow \vec{a} = -\vec{A}_0 \neq 0$$

**Sistemi inerziali:** sistemi di riferimento nei quali vale il principio di relatività galileiana.

**Principio di relatività galileiana (PRG):** “le leggi della dinamica hanno la stessa forma in sistemi di riferimento in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro”.

Questo principio si basa sull'ipotesi dell'esistenza di un tempo assoluto o universale; due osservatori, situati in due differenti sistemi di riferimento, potranno sempre sincronizzare i rispettivi orologi con infinita precisione. Le conseguenze immediate sono:

- 1) dati due sistemi di riferimento inerziali, non è possibile stabilire quale sia quello fermo e quale quello in moto, anzi non ha senso porsi una domanda del genere. L'unica cosa certa è che se il sistema #1 appare in moto con velocità  $v$  rispetto al #2, quest'ultimo appare in moto con velocità  $-v$  rispetto al primo;
- 2) vale il principio di composizione delle velocità: una particella con velocità  $w$  nel sistema #1 (che si muove con velocità  $v$  rispetto al sistema #2) avrà, nel sistema #2, una velocità pari a  $v+w$ ;

Quindi, non esiste un sistema di riferimento assoluto. Ma si può anche dire che qualsiasi sistema inerziale “può” essere adoperato come sistema di riferimento assoluto. Per motivi pratici spesso si adopera, come sistema, quello delle stelle fisse, cioè il sistema di riferimento solidale con il Sole e con l'orientazione degli assi stabilita dalla posizione delle stelle fisse (quelle stelle per le quali, da secoli, non sono stati osservati spostamenti misurabili). La Terra non è un sistema di riferimento inerziale, poiché non si muove di moto rettilineo uniforme, ma percorre un'orbita attorno al Sole, oltre a girare su sé stessa. Tuttavia, per esperimenti di laboratorio (esperimenti di breve durata e che interessino brevi distanze), il sistema di laboratorio si può spesso approssimare con un sistema inerziale.

In questo contesto, il I° principio della dinamica equivale a dire che, in assenza di forze, a qualsiasi particella può essere associato un sistema di riferimento inerziale. Quando si misura una forza, si ottiene

lo stesso valore, qualsiasi sia il sistema inerziale nel quale si esegue la misura. Pertanto il II° principio ha la stessa forma in tutti i sistemi inerziali. Un aspetto pratico della faccenda è che, in un sistema inerziale, qualsiasi forza deve essere una forza effettiva, cioè deve avere dietro qualcuno, o qualcosa, che la applica.

**Sistemi non inerziali:** se un sistema di riferimento esegue un moto accelerato rispetto al sistema delle stelle fisse (o rispetto ad un qualsiasi sistema inerziale) non è un sistema inerziale. La principale differenza fra un sistema non inerziale che esegue un moto puramente traslatorio ed uno che esegue un moto rotatorio sta nella complessità dei calcoli necessari per descrivere i fenomeni osservati.

**Forza fittizia o d'inerzia:** forza che esiste solo in un sistema di riferimento non inerziale, non una forza effettiva, cioè attribuibile ad un qualche agente reale (come la forza di gravità).

**Sistemi non inerziali – moto rotatorio:** sulla particella agisce una forza diretta radialmente verso l'esterno (forza centrifuga) e si osserva che la traiettoria della particella non è dritta ma curva, segno che sulla particella agisce anche una forza ortogonale alla velocità (forza di Coriolis). Le due forze (fittizie) si osservano soltanto in sistemi non inerziali che sono in rotazione rispetto ad un qualsiasi sistema inerziale.

## 6. Leggi di conservazione:

**Legge di conservazione:** una grandezza fisica (quindi misurabile) mantiene sempre lo stesso valore, a meno che non accada qualcosa di ben preciso (che dipende da quale legge di conservazione abbiamo preso in considerazione), nel qual caso la legge di conservazione non è più applicabile.

**Sistema fisico:** qualsiasi cosa sulla quale si possono compiere osservazioni e misure.

**Configurazione del sistema:** descrizione completa del sistema, cioè l'insieme dei valori delle grandezze fisiche che forniscono la descrizione dello stato del sistema.

**Energia:** grandezza fisica scalare, alla quale non è associata alcuna direzione. Esistono diverse forme di energia, che possono trasformarsi l'una nell'altra. Quando avvengono queste trasformazioni, il principio di conservazione dell'energia prescrive che la quantità totale di energia (a prescindere da quale forma assume) deve essere sempre la stessa, prima, durante e dopo le trasformazioni.

**Energia cinetica:** proprietà della singola particella che dipende soltanto dalla velocità e dalla massa:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot |v|^2 \geq 0$$

**Lavoro:** quantità scalare che ha le dimensioni fisiche di un'energia e, in particolare, individua un particolare modo in cui l'energia fluisce o si trasforma:

$$L = \vec{F} \circ \Delta \vec{S} = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cdot \cos(\alpha) \quad \text{con } \alpha = \text{angolo compreso tra i vettori } \vec{F} \text{ ed } \vec{S}$$

I valori che può assumere sono:

$$\alpha < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow L > 0 \quad \alpha = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow L = 0 \quad \alpha > \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow L < 0$$

Se la forza è variabile e la traiettoria della particella non è rettilinea si divide questa in  $n$  tratti più piccoli (infinitesimi), separati da  $n+1$  punti, nei quali sia la forza che la traiettoria rimangono costanti:

$$L = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \circ \Delta \vec{S}_i$$

**Equazione di Newton, energia cinetica e lavoro:** quando una forza agisce su una particella di massa  $m$ , la particella acquista una accelerazione, cioè la velocità della particella subisce una variazione; se questa varia, varia pure l'energia cinetica. La particella sulla quale agisce la forza si sposta, e lo stesso fa il punto di applicazione della forza che, quindi, compie un lavoro:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \Leftrightarrow \vec{F} \cdot \Delta t = m \cdot \Delta \vec{v} = m \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \Leftrightarrow \vec{F} \cdot (\vec{v}_1 \cdot \Delta t) = m \cdot (\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 - |\vec{v}_1|^2) \Leftrightarrow \vec{F} \cdot \Delta \vec{S} = \Delta L$$

**Teorema del lavoro-energia:** è un'uguaglianza istante per istante, ossia il bilancio energetico deve sempre essere costante:

$$\Delta L = \Delta E_k = -\Delta E_p \Leftrightarrow \Delta E_k + \Delta E_p = 0 \Leftrightarrow \text{forze conservative} \Leftrightarrow \text{conserv. energia} \Leftrightarrow E_k + E_p = \text{cost}$$

**7. Forze conservative:** la circuitazione è zero:

$$\sum \vec{F} \cdot \Delta \vec{S} \cdot \cos(\vartheta) = 0$$

**Forza di gravità o forza peso:** il lavoro svolto dalla forza peso su una massa  $m$  non dipende dal particolare percorso scelto per spostare la massa, ma soltanto dalla componente verticale dello spostamento totale. Nel caso di traiettoria chiusa (**circuitazione**) si ha che:

$$L = L_{1,2} + L_{2,1} = 0 \Leftrightarrow L_{1,2} = -L_{2,1}$$

**8. Forze non conservative:** esiste almeno un percorso chiuso lungo il quale la circuitazione è diversa da zero; si perde energia meccanica e non si può parlare di potenziale:

$$\sum \vec{F} \cdot \Delta \vec{S} \cdot \cos(\vartheta) \neq 0$$

**Attrito:** il lavoro svolto dalla forza peso quando la massa esegue uno spostamento  $\Delta S$  qualsiasi è dato dalla forza d'attrito (dinamico), che forma un angolo di  $180^\circ$  con lo spostamento, per lo spostamento:

$$|A_{dim}| = A_{dim_{max}} = c_{dim} \cdot m \cdot g$$

$$L_{A_{dim}} = \vec{A}_{dim} \circ \Delta \vec{S} = -c_{dim} \cdot m \cdot g \cdot |\Delta S| < 0$$

Il lavoro svolto dalla forza d'attrito è sempre negativo, quindi lungo un qualsiasi cammino chiuso (circuitazione) la forza d'attrito compie sempre un lavoro non nullo.

**Viscosità:** la forza viscosa agente sulla particella ed il lavoro svolto durante il tempo  $\Delta t$  sono:

$$\vec{F}_{vis} = -\eta \cdot \vec{v}$$

$$\Delta L = \vec{F}_{vis} \circ \Delta \vec{S} = -\eta \cdot \vec{v} \circ \vec{v} \cdot \Delta t = -\eta \cdot |\vec{v}|^2 \cdot \Delta t < 0$$

Il lavoro svolto dalla forza viscosa è sempre negativo e valgono quindi le stesse conclusioni di prima.

**9. Energia potenziale:** energia che si associa alla quota (cioè alla posizione) alla quale si trova la particella. Una particella soggetta soltanto alla forza di gravità:

1) se perde quota (passa da una posizione più alta ad una più bassa) acquista energia cinetica;

2) se guadagna quota (passa da una posizione più bassa ad una più alta) perde energia cinetica; dato che l'energia cinetica non può diventare negativa, la particella non può salire oltre una certa quota;

$$\Delta E_p = m \cdot g \cdot h$$

$$\Delta E_p = -\Delta L = -\Delta E_k \Leftrightarrow \Delta E_k + \Delta E_p = 0 \Leftrightarrow \text{forze conservative} \Leftrightarrow \text{conserv. energia} \Leftrightarrow E_k + E_p = \text{cost}$$

**N.B.:** l'energia potenziale gravitazionale viene sempre misurata a partire da una quota di riferimento, e può quindi essere sia positiva che negativa.

**Moto verticale di un corpo (caduta di un grave):** al suolo si avrà che l'energia potenziale si sarà trasformata in cinetica:

$$\left. \begin{aligned} E_p &= m \cdot g \cdot h \\ E_k &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot |\vec{v}|^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow E_p = E_k \Leftrightarrow v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

**Moto verticale di un corpo (lancio verso l'alto di un grave):** inverso del problema della particella in caduta libera o caduta di un grave:

$$E_k \rightarrow E_p \Leftrightarrow v = 0$$

**Particella su un piano orizzontale con attrito:**

$$\left. \begin{aligned} A_{dim} &= c_{dim} \cdot m \cdot g \\ L_{A_{dim}} &= A_{dim} \cdot \Delta S = c_{dim} \cdot m \cdot g \cdot \Delta S \\ E_k &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_{0x}^2 + v_{0y}^2) \\ L &= E_k \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \Delta S = \frac{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}{2 \cdot c_{dim} \cdot g}$$

**Potenza:** grandezza scalare che indica la quantità di energia che può essere erogata in un tempo:

$$W = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

Una macchina che applica una forza ad un corpo che si sposta con una velocità in un tempo compie lavoro:

$$\Delta L = \vec{F} \circ \vec{v} \cdot \Delta t$$

$$W = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \vec{F} \circ \vec{v}$$

**10. Quantità di moto ed Impulso:** grandezza vettoriale con stessa direzione e verso del vettore velocità:

$$\left. \begin{aligned} \vec{p} &= m \cdot \vec{v} \\ \vec{p} &= \vec{J} = \vec{F} \cdot t \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} \vec{p} &= \vec{F} \cdot t \\ \vec{F} \cdot t &= m \cdot \vec{v} \Leftrightarrow \vec{F} \cdot \Delta t = m \cdot \Delta \vec{v} \end{aligned} \right.$$

**Quantità di moto ed equazione di Newton:**

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d'\vec{v}}{dt} = \frac{d'(m \cdot \vec{v})}{dt} = \frac{d'\vec{p}}{dt} \Leftrightarrow \vec{F} = \frac{d'\vec{p}}{dt}$$

**Principio di conservazione della quantità di moto:** vedi “Casistica dei problemi”:

$$\vec{F} = \frac{d'\vec{p}}{dt} \Rightarrow \vec{F} = 0 \Leftrightarrow \frac{d'\vec{p}}{dt} = 0 \Leftrightarrow \vec{p} = cost \Rightarrow \text{principio di conservazione della quantità di moto}$$

**Impulso:** se la forza varia nel tempo (molto breve) si ha la grandezza vettoriale:

$$\left. \begin{aligned} \vec{F} &= \frac{d'\vec{p}}{dt} \Leftrightarrow d'\vec{p} = \vec{F} \cdot dt \Leftrightarrow \Delta \vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t \\ \vec{p} &= \vec{J} = \vec{F} \cdot t \Leftrightarrow \Delta \vec{p} = \Delta \vec{J} = m \cdot \Delta \vec{v} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \Delta \vec{J} = \vec{F} \cdot \Delta t = m \cdot \Delta \vec{v}$$

**11. Sistemi di particelle:**

**Centro di massa:** preso un insieme costituito da  $n$  particelle, numerate da 1 ad  $n$ ; la generica particella  $i$ -esima ha massa  $m_i$  e si trova nella posizione  $\vec{r}_i$ . Su ciascuna particella agiscono due tipi di forze:

- 1) **forze esterne**  $\vec{F}_{ext, i}$  (che agiscono sulla particella  $i$ -esima) = forze che agirebbero sulla particella anche se tutte le altre non ci fossero;
- 2) **forze interne**  $\vec{F}_{int, j>i}$  (che la particella  $j$ -esima esercita sulla  $i$ -esima) = forze che agiscono sulla particella esclusivamente a causa della presenza delle altre; la risultante di tali forze interne è:

$$\vec{F}_{int, tot} = \sum_{j=1, j \neq i}^n \vec{F}_{int, j \rightarrow i}$$

Per il principio di azione e reazione si ha:

$$\vec{F}_{int, i>j} = -\vec{F}_{int, j>i}$$

La **massa totale del sistema** sarà la somma delle masse di tutte le particelle:

$$m_{tot} = \sum_{i=1}^n m_i$$

La **posizione del centro di massa**, cioè il valore medio (media pesata) delle posizioni delle particelle:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{m_{tot}} \cdot \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{r}_i$$

**N.B.:** condizioni di simmetria dell'oggetto possono bastare.

**Velocità del centro di massa:** se le  $n$  particelle si muovono, la posizione di ciascuna particella varia col tempo, così come la posizione del centro di massa. Facendo la derivata rispetto al tempo si ha:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(t)$$

$$\vec{r}_{cm} = \vec{r}_{cm}(t)$$

$$\vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \frac{1}{m_{tot}} \cdot \sum_{i=1}^n m_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{m_{tot}} \cdot \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{v}_i$$

la velocità della particella  $i$ -esima si può scomporre come la somma di:

1) velocità del centro di massa  $\Rightarrow \vec{v}_{cm}$ ;

2) velocità rispetto al centro di massa  $\Rightarrow \vec{u}_i = \vec{v}_i - \vec{v}_{cm}$ ;

**Accelerazione del centro di massa:** facendo la derivata rispetto al tempo si ha:

$$\vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{1}{m_{tot}} \cdot \sum_{i=1}^n m_i \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{1}{m_{tot}} \cdot \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{a}_i$$

**Energia cinetica del centro di massa:** l'energia cinetica dell'intero sistema di particelle è:

$$E_{k_{tra}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot |\vec{v}_i|^2$$

l'energia cinetica totale si esprime come la somma dei contributi:

1) energia cinetica del centro di massa;

2) energia cinetica dei corpi in moto (traslatorio) rispetto al centro di massa;

$$E_{k_{tot}} = \frac{1}{2} \cdot m_{tot} \cdot |\vec{v}_{cm}|^2 + \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot |\vec{v}_i|^2}_{E_{k_{tra}}}$$

**Equazione del moto del centro di massa:** si scrive l'equazione di Newton per la generica particella:

$$m_i \cdot \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_{ext, i} + \sum_{j=1, j \neq i}^n \vec{F}_{int, j \rightarrow i}$$

ed estendendo a tutte le particelle si ha:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n m_i \cdot \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2}}_{m_{tot} \cdot \vec{a}_{cm}} = \underbrace{\sum_{i=1}^n \vec{F}_{ext, i}}_{\vec{F}_{ext, tot}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \vec{F}_{int, j \rightarrow i}}_0 \Leftrightarrow m_{tot} \cdot \vec{a}_{cm} = \vec{F}_{ext, tot}$$

quindi il centro di massa si comporta come se fosse una singola particella alla quale si applica soltanto la risultante delle forze esterne, mentre quelle interne, che a coppie si annullano, non hanno alcun effetto.

**Rotazioni:** in questo caso il centro di massa rimane fermo, quindi la risultante (o somma) delle forze esterne è nulla; ciò non vuol dire che non ci sono forze esterne. Si possono quindi avere due moti:

1) rotazioni di tutto il sistema (rigido);

2) movimenti delle particelle le une rispetto alle altre;

**N.B.:** per semplificare si cerca sempre di separare i due tipi di moti: se l'interesse principale riguarda i moti di centro di massa, si può considerare il sistema come se fosse rigido; se siamo interessati ai moti interni, possiamo assumere (se è possibile) che non ci siano forze esterne

1) Considerando un corpo rigido (non ci sono movimenti delle particelle le une rispetto alle altre) si possono avere movimenti attorno all'**asse di rotazione**  $R$ . Questa è una retta (fissa) attorno alla quale le particelle si muovono, cioè le particelle si muovono descrivendo traiettorie circolari e rimanendo sempre alla stessa distanza da  $R$ . Si fissano due piani ( $P_0$  fisso e  $P$  solidale con il sistema di particelle) passanti per la retta  $R$  e l'angolo  $\phi$  compreso tra essi.

Il **momento della forza** (rispetto all'asse) o **momento meccanico** o **torcente** è parallelo all'asse ed è:

$$\vec{\tau} = \vec{F} \times \vec{r}_{ort} \quad \text{con } \vec{r}_{ort} = \text{vettore distanza della forza dall'asse di rotazione}$$

L'**equazione di Newton per i moti rotatori** ed il **momento d'inerzia** sono:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \Leftrightarrow \vec{\tau} = \vec{F} \times \vec{r} = m \cdot \vec{a} \times \vec{r} \Leftrightarrow \vec{\tau} = m \cdot r^2 \cdot \vec{a}$$

$$I = m \cdot r^2 \Leftrightarrow \vec{\tau} = I \cdot \vec{a}$$

$$I_{tot} = \sum_{i=1}^n I_i = \sum_{i=1}^n m_i \cdot |\vec{r}_i|^2$$

L'energia cinetica è: vedi "Energia cinetica del centro di massa"; la velocità dell' $i$ -esima particella è:

- 1) velocità di rotazione che la particella avrebbe se il sistema fosse rigido  $\Rightarrow \vec{\omega} \times \vec{r}_i$ ;
- 2) velocità relativa a questo sistema rigido fittizio  $\Rightarrow \vec{u}_i = \vec{v}_i - \vec{\omega} \times \vec{r}_i \Leftrightarrow \vec{v}_i = \vec{u}_i + \vec{\omega} \times \vec{r}_i$ ;

L'energia cinetica si può scrivere come somma di:

- 1) energia cinetica relativa alla rotazione attorno al centro di massa (come se fosse un sistema rigido);
- 2) energia cinetica relativa ai moti disordinati (moto rispetto al centro di massa);

$$E_{k_{tot}} = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot I \cdot |\vec{\omega}|^2}_{E_{k_{rot}}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot |\vec{u}_i|^2}_{E_{k_{int}}}$$

Tutta l'energia cinetica di un sistema di particelle è data da:

- 1) energia cinetica del moto traslatorio del centro di massa (nulla se il centro di massa è fermo);
- 2) energia cinetica del moto rotatorio attorno al centro di massa (nulla se non ci sono rotazioni);
- 3) energia cinetica dei moti interni o disordinati (nulla se il sistema è rigido);

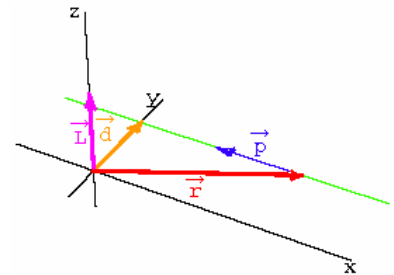
$$E_{k_{tot}} = \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot |\vec{v}_i|^2}_{E_{k_{tra}}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot I \cdot |\vec{\omega}|^2}_{E_{k_{rot}}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot |\vec{u}_i|^2}_{E_{k_{int}}}$$

Il **momento della quantità di moto** o **momento angolare** è una grandezza vettoriale che ha sempre la direzione dell'asse di rotazione:

$$\vec{L} = \vec{p} \times \vec{r} = m \cdot \vec{v} \times \vec{r}$$

$$|L| = |p| \cdot |r(t)| \cdot \cos[\phi(t)] = |p| \cdot d$$

$$\text{con} \begin{cases} r(t) = \text{distanza della particella dall'asse} \\ \phi(t) = \text{posizione angolare} \\ d = \text{modulo della minima distanza della particella dall'asse} \end{cases}$$



Il **Principio di conservazione del momento angolare** ("se il momento della forza è nullo, il momento angolare resta costante") si ha riprendendo la relazione tra quantità di moto ed equazione di Newton:

$$\vec{F} = \frac{d'\vec{p}}{dt} \Leftrightarrow \vec{F} \times \vec{r} = \frac{d'(\vec{p} \times \vec{r})}{dt} \Leftrightarrow \vec{\tau} = \frac{d'\vec{L}}{dt}$$

**N.B.:** il momento della forza può essere nullo anche senza che lo sia la forza, ad es. quando  $F$  ed  $r$  hanno la stessa direzione e quindi la particella si dirige verso l'asse.

Estendendo ad un sistema rigido di particelle vincolato a ruotare su un asse, per l' $i$ -esima particella si ha:

$$\vec{F}_{i, ext} + \vec{F}_{i, int} = \frac{d'\vec{p}_i}{dt} \Leftrightarrow \vec{F}_{i, ext} \times \vec{r}_i + \vec{F}_{i, int} \times \vec{r}_i = \frac{d'\vec{p}_i}{dt} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i, ext} \times \vec{r}_i = \frac{d' \sum_{i=1}^n \vec{p}_i}{dt}$$

$$\text{con} \begin{cases} \vec{F}_{i, ext} = \text{risultante delle forze esterne} \\ \vec{F}_{i, int} = \text{risultante delle forze interne} \\ \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i, ext} \times \vec{r}_i = \text{momento risultante delle forze esterne} \equiv \vec{\tau}_{ris, ext} \\ \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \text{momento angolare totale} \equiv \vec{L}_{tot} \end{cases}$$

2) Il secondo tipo di moto dipende sia dalle forze interne che da quelle esterne che agiscono su ciascuna particella. Riprendendo il conteggio di tutta l'energia cinetica si ha che:

$$1) \text{risultante delle forze esterne nulla } \vec{F} = 0 \Leftrightarrow E_{k_{tra}} = \text{cost} ;$$

2) momento risultante delle forze esterne nullo  $\vec{\tau}_{ris_{ext}} = 0 \Leftrightarrow \vec{L}_{tot} = cost \Leftrightarrow \omega \neq cost \Rightarrow E_{k_{rot}} \neq cost$ ;

3) momento d'inerzia varia  $I \neq cost \Leftrightarrow$  il sistema non è rigido  $\Leftrightarrow E_{p_{int}} \neq cost$ ;

Per la **conservazione dell'energia meccanica** (o interna) se le forze esterne non compiono lavoro:

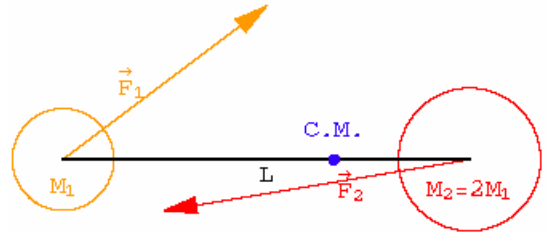
$$U = E_{k_{int}} + E_{p_{int}} \Rightarrow U = cost \Leftrightarrow \text{non ci sono scambi d'energia (meccanica) con l'esterno}$$

**12. Sistemi di due particelle:** ad essi si possono ridurre sistemi di molte particelle vedendo cos'accade a due particelle per volta. Tra di esse si possono esercitare forze (interne) di varia natura.

**Sistema rigido di due particelle (vincolate a distanza fissa):** due particelle sono vincolate alla distanza  $L$  e le forze giacciono sul piano  $xy$ . La massa totale e la posizione del centro di massa sono:

$$m_{tot} = m_1 + m_2$$

$$\vec{r}_{cm} \begin{cases} d_1 = \frac{L \cdot m_2}{m_{tot}} & \text{dalla massa 1} \\ d_2 = \frac{L \cdot m_1}{m_{tot}} & \text{dalla massa 2} \end{cases}$$

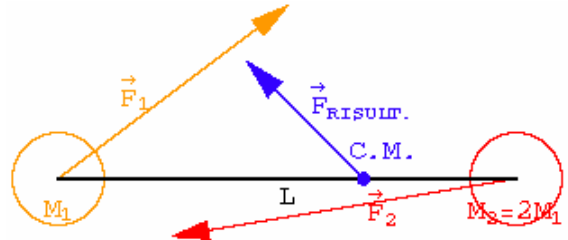


In un **moto traslatorio** la risultante delle forze e l'accelerazione del centro di massa sono:

$$\vec{F}_{tot} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\vec{F}_{tot} = \frac{m_{tot} \cdot d^2 \vec{r}_{cm}}{dt^2}$$

$$\vec{a}_{cm} = \frac{\vec{F}}{m_{tot}}$$



In un **moto rotatorio**, nel piano  $xy$ , il momento d'inerzia è:

$$I = \frac{L^2 \cdot m_1 \cdot m_2}{m_{tot}}$$

Il momento risultante delle forze è parallelo alla asse  $z$  ed uguale a:

$$\vec{\tau}_{ris} = \vec{F}_1 \times \vec{d}_1 + \vec{F}_2 \times \vec{d}_2$$

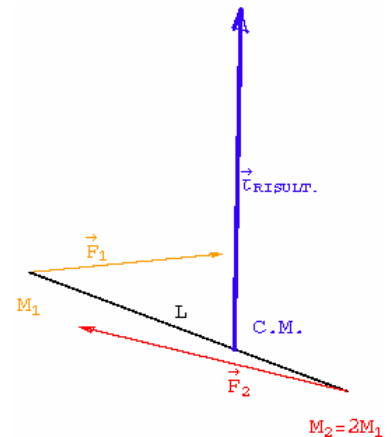
Le posizioni delle due particelle rispetto al centro di massa sono:

$$\vec{d}_1 = \vec{r}_1 - \vec{r}_{cm}$$

$$\vec{d}_2 = \vec{r}_2 - \vec{r}_{cm}$$

La rotazione attorno al centro di massa è con accelerazione angolare:

$$\vec{a} = \frac{\vec{\tau}_{ris}}{I}$$



**Sistema elastico di due particelle (legate da una molla):** due particelle sono collegate da una molla di massa trascurabile. La massa totale del sistema e la posizione del centro di massa sono:

$$m_{tot} = m_1 + m_2$$

$$\vec{r}_{cm} \begin{cases} d_1 = \frac{L_0 \cdot m_2}{m_{tot}} & \text{dalla massa 1} \\ d_2 = \frac{L_0 \cdot m_1}{m_{tot}} & \text{dalla massa 2} \end{cases}$$



Questo è un modello di molecola biatomica che differisce dal sistema rigido per la presenza di un grado di libertà interno. Per specificare completamente la configurazione del sistema ad un dato istante, dobbiamo dare la posizione del centro di massa, l'orientazione del sistema e la distanza fra le particelle.

In un **moto vibrazionale interno** si assume che non ci siano forze esterne. Se le due masse vengono allontanate, la molla si allunga ed esercita una forza (interna) di richiamo tendente a riportare la lunghezza al valore  $L_0$ . Il centro di massa, inizialmente fermo, non subirà spostamenti. Il sistema esegue un moto vibratorio e la distanza fra le due particelle varia nel tempo con legge sinusoidale. Si pone l'asse  $x$  parallelo al segmento che congiunge le due masse e l'origine nel centro di massa del sistema. In

condizioni di riposo le posizioni delle particelle, dal centro di massa, sono:

$$\left. \begin{aligned} x_{0,1} = -d_{0,1} = -\frac{L_0 \cdot m_2}{m_{tot}} & \text{dalla particella 1} \\ x_{0,2} = d_{0,2} = \frac{L_0 \cdot m_1}{m_{tot}} & \text{dalla particella 2} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow x_{0,2} - x_{0,1} = L_0$$

A causa di un allungamento (o accorciamento) la molla arriva ad una lunghezza  $L$ ; le posizioni delle particelle e le forze di richiamo esercitate sulle particelle sono:

$$\left. \begin{aligned} x_1 = -d_1 = -\frac{L \cdot m_2}{m_{tot}} & \text{dalla particella 1} \\ x_2 = d_2 = \frac{L \cdot m_1}{m_{tot}} & \text{dalla particella 2} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow x_2 - x_1 = L$$

$$\vec{F}_1 = -k \cdot (x_1 - x_{0,1}) = \frac{k \cdot (L - L_0) \cdot m_2}{m_{tot}} \quad \text{sulla particella 1}$$

$$\vec{F}_2 = -k \cdot (x_2 - x_{0,2}) = -\frac{k \cdot (L - L_0) \cdot m_1}{m_{tot}} \quad \text{sulla particella 2}$$

le equazioni del moto per le due particelle sono:

$$\left. \begin{aligned} \vec{F}_1 = m_1 \cdot \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{k \cdot (L - L_0) \cdot m_2}{m_{tot}} & \Leftrightarrow \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{k \cdot (L - L_0) \cdot m_2}{m_1 \cdot m_{tot}} \\ \vec{F}_2 = m_2 \cdot \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\frac{k \cdot (L - L_0) \cdot m_1}{m_{tot}} & \Leftrightarrow \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\frac{k \cdot (L - L_0) \cdot m_1}{m_2 \cdot m_{tot}} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 x_2}{dt^2} - \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\frac{k \cdot (L - L_0) \cdot m_1}{m_2 \cdot m_{tot}} - \frac{k \cdot (L - L_0) \cdot m_2}{m_1 \cdot m_{tot}} \Leftrightarrow \frac{d^2 (x_2 - x_1)}{dt^2} = -\frac{k}{m_{tot}} \cdot (L - L_0) \cdot \left( \frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_1} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} x_2 - x_1 &= L \\ d^2 (L_0 = \text{cost}) &= 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{d^2 (L - L_0)}{dt^2}}_a = -\underbrace{\frac{k}{m_{tot}} \cdot \left( \frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_1} \right)}_{\omega_0^2} \cdot \underbrace{(L - L_0)}_{\Delta L} \Leftrightarrow a = -\omega_0^2 \cdot \Delta L$$

Questa è l'equazione del moto armonico per una massa attaccata ad una molla di lunghezza  $L_0$  se:

$$\left\{ \begin{aligned} \text{massa} &= m_{tot} \\ \text{costante elastica} &= k \cdot \left( \frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_1} \right) \end{aligned} \right\} \quad \text{oppure} \quad \left\{ \begin{aligned} \text{massa} &= m_{tot} \cdot \left( \frac{m_2}{m_1} + \frac{m_1}{m_2} \right) \\ \text{costante elastica} &= k \end{aligned} \right\}$$

e la soluzione è:

$$\vec{\Delta L} = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{aligned} \vec{\Delta L} &= L_0 - L = \text{vettore allungamento} \\ A &= \text{ampiezza del moto} \\ \omega_0 &= \text{pulsazione iniziale} \end{aligned} \right.$$

Accoppiando il **moto rotatorio** con quello **vibrazionale interno** si ha che la vibrazione interna fa variare sia la distanza fra le due particelle che il momento d'inerzia del sistema  $I(t)$ . Se il momento risultante delle forze esterne  $\vec{\tau}_{ris_{ext}}$  è nullo, il momento angolare del sistema  $I_0 \cdot \omega_0$  rimane costante. Ma, dato che  $I(t)$  varia col tempo, anche la velocità angolare deve variare col tempo:

- 1) se le particelle si avvicinano  $\Leftrightarrow$  il momento d'inerzia diminuisce e la velocità angolare aumenta;
- 2) se le particelle si allontanano  $\Leftrightarrow$  il momento d'inerzia aumenta e la velocità angolare diminuisce;

il tutto, però, in modo tale che diventi costante e quindi indipendente dal tempo:

$$I(t) \cdot \omega(t) = I_0 \cdot \omega_0$$

C'è quindi un accoppiamento fra il moto vibrazionale e quello rotazionale che comporta trasferimenti di energia fra l'uno e l'altro tipo di moto. E' chiaro che il problema diventa alquanto complesso.

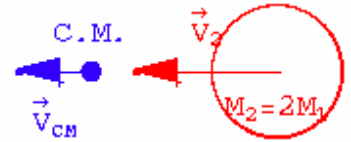
**Urto fra due particelle:** l'interazione più semplice fra particelle. Urti in un sistema di molte particelle si scompongono in una successione di urti, ciascuno dei quali coinvolge solo due particelle per volta.

In un **urto centrale** si considerano particelle perfettamente sferiche, omogenee, indeformabili, di raggio finito, con forze esterne assenti (deve conservarsi la quantità di moto totale e quindi il centro di massa delle due particelle continua indisturbato il suo moto) e con forze interne (che si esercitano fra le particelle) differenti da zero solo nell'attimo in cui le due sfere si toccano.

I centri delle due sfere stanno viaggiando lungo la stessa direzione (l'asse  $x$ ) con verso opposto:

$$\begin{cases} m_1, m_2 = \text{masse delle due particelle} \\ \vec{v}_1, \vec{v}_2 = \text{velocità iniziali (prima dell'urto)} \\ \vec{v}_{1+}, \vec{v}_{2+} = \text{velocità dopo l'urto (da determinare)} \end{cases}$$

$$\vec{F}_{ext} = 0 \Leftrightarrow m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = m_1 \cdot \vec{v}_{1+} + m_2 \cdot \vec{v}_{2+}$$



La seconda equazione si ottiene dalla conservazione dell'energia meccanica con due casi (estremi):

1) urto (centrale) **perfettamente elastico**  $\Leftrightarrow$  l'energia meccanica si conserva integralmente:

$$\begin{cases} m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = m_1 \cdot \vec{v}_{1+} + m_2 \cdot \vec{v}_{2+} \\ m_1 \cdot \vec{v}_1^2 + m_2 \cdot \vec{v}_2^2 = m_1 \cdot \vec{v}_{1+}^2 + m_2 \cdot \vec{v}_{2+}^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_{1+}) = -m_2 \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_{2+}) \\ m_1 \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_{1+}) \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}_{1+}) + m_2 \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_{2+}) \cdot (\vec{v}_2 + \vec{v}_{2+}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\vec{v}_1 - \vec{v}_{1+}) \cdot [(\vec{v}_1 + \vec{v}_{1+}) - (\vec{v}_2 + \vec{v}_{2+})] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (\vec{v}_1 - \vec{v}_{1+}) = 0 \\ (\vec{v}_1 + \vec{v}_{1+}) - (\vec{v}_2 + \vec{v}_{2+}) = 0 \end{cases}$$

quindi:

$$1 \begin{cases} m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = m_1 \cdot \vec{v}_{1+} + m_2 \cdot \vec{v}_{2+} \\ (\vec{v}_1 - \vec{v}_{1+}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{se non c'è urto, proseguono mantenendo la propria velocità;}$$

$$2 \begin{cases} m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = m_1 \cdot \vec{v}_{1+} + m_2 \cdot \vec{v}_{2+} \\ (\vec{v}_1 + \vec{v}_{1+}) - (\vec{v}_2 + \vec{v}_{2+}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{v}_{1+} = \frac{[(m_1 - m_2) \cdot \vec{v}_1 + 2 \cdot m_2 \cdot \vec{v}_2]}{m_1 + m_2} \\ \vec{v}_{2+} = \frac{[(m_2 - m_1) \cdot \vec{v}_2 + 2 \cdot m_1 \cdot \vec{v}_1]}{m_1 + m_2} \end{cases};$$

$$\text{A. Due particelle di massa uguale } \Leftrightarrow m_1 = m_2 = m \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{v}_{1+} = \vec{v}_2 \\ \vec{v}_{2+} = \vec{v}_1 \end{cases};$$

$$\text{B. Due particelle di massa uguale delle quali #2 ferma } \Leftrightarrow m_1 = m_2 = m \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{v}_{1+} = \vec{v}_2 = 0 \\ \vec{v}_{2+} = \vec{v}_1 \neq 0 \end{cases};$$

$$\begin{array}{l} \text{C. Una particella contro una parete ferma} \\ \Leftrightarrow m_2 \rightarrow +\infty \\ m_2 \gg m_1 \\ \vec{v}_2 = 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = \text{massa della particella} \\ m_2 = \text{massa della parete} \end{cases} \begin{cases} \vec{v}_{1+} = \frac{\left[\left(\frac{m_1}{m_2}\right) - 1\right] \cdot \vec{v}_1}{\left(\frac{m_1}{m_2}\right) + 1} = -\vec{v}_1 \Leftrightarrow \Delta E_{k_1} = 0 \\ \vec{v}_{2+} = \frac{2 \cdot \left(\frac{m_1}{m_2}\right) \cdot \vec{v}_1}{\left(\frac{m_1}{m_2}\right) + 1} = 0 \end{cases};$$

D. Una particella contro una parete in movimento

$m_1$  = massa della particella  
 $m_2$  = massa della parete  
 $\Leftrightarrow m_2 \rightarrow +\infty$   
 $m_2 \gg m_1$   
 $\vec{v}_2 \neq 0$

$$\begin{cases} \vec{v}_{1+} = -\vec{v}_1 + 2 \cdot \vec{v}_2 \\ \vec{v}_{2+} = \vec{v}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta E_{k_1} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot (\vec{v}_{1+}^2 - \vec{v}_1^2) = \\ = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot [(-\vec{v}_1 + 2 \cdot \vec{v}_2)^2 - \vec{v}_1^2] = \\ = 2 \cdot m_1 \cdot \vec{v}_2 \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \end{cases}$$

**N.B.:** la variazione d'energia cinetica della particella proviene dal lavoro compiuto dalla parete, è dato da:

- variazione della quantità di moto della particella  $\Leftrightarrow \Delta \vec{p} = m_1 \cdot (\vec{v}_{1+} - \vec{v}_1)$ ;
- impulso applicato dalla parete  $\Leftrightarrow \Delta \vec{J} = \vec{F}_{med} \cdot \Delta t \Leftrightarrow \Delta \vec{p} = \vec{F}_{med} \cdot \Delta t$ ;
- spostamento della parete durante il tempo  $\Delta t \Leftrightarrow \Delta s = \vec{v}_2 \cdot \Delta t$ ;

$$\Delta L = \vec{F}_{med} \cdot \Delta s = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} \cdot \vec{v}_2 \cdot \Delta t = \Delta \vec{p} \cdot \vec{v}_2 = m_1 \cdot (\vec{v}_{1+} - \vec{v}_1) \cdot \vec{v}_2 = m_1 \cdot (\vec{v}_{1+} - \vec{v}_1) \cdot \vec{v}_2 =$$

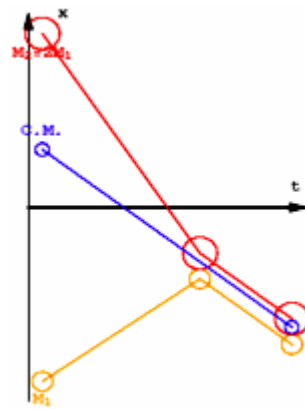
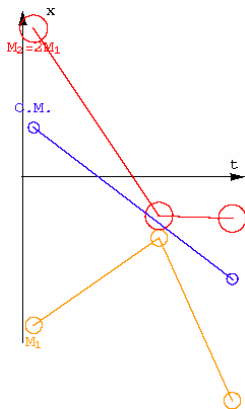
$$= m_1 \cdot (-\vec{v}_1 + 2 \cdot \vec{v}_2 - \vec{v}_1) \cdot \vec{v}_2 = 2 \cdot m_1 \cdot \vec{v}_2 \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

2) urto (centrale) **totalmente anelastico**  $\Leftrightarrow$  l'energia meccanica non si conserva e le particelle restano attaccate l'una all'altra, quindi con la stessa velocità:

$$\begin{cases} m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = m_1 \cdot \vec{v}_{1+} + m_2 \cdot \vec{v}_{2+} \\ \vec{v}_{1+} = \vec{v}_{2+} = \vec{v}_+ \end{cases} \Leftrightarrow m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \cdot \vec{v}_+ \Leftrightarrow \vec{v}_+ = \frac{(m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2)}{m_1 + m_2} = \vec{v}_{cm}$$

La variazione di energia cinetica è data da:

$$\left. \begin{aligned} E_{k+} &= \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot \vec{v}_+^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{(m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2)^2}{m_1 + m_2} \\ E_k &= \frac{1}{2} \cdot (m_1 \cdot \vec{v}_1^2 + m_2 \cdot \vec{v}_2^2) \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow E_{k+} - E_k = - \left[ \frac{m_1 \cdot m_2}{2 \cdot (m_1 + m_2)} \right] \cdot (\vec{v}_1^2 + \vec{v}_2^2) \Leftrightarrow \Delta E_k < 0$$



**Urto fra due particelle nel piano:** segue le stesse regole dell'urto centrale ma con calcoli un poco più complessi. Si ha sempre che, con forze esterne assenti, deve conservarsi la quantità di moto totale e quindi il centro di massa delle due particelle continua indisturbato il suo moto:

$$m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = m_1 \cdot \vec{v}_{1+} + m_2 \cdot \vec{v}_{2+}$$

Anche in questo caso si utilizza la conservazione dell'energia meccanica con due casi (estremi):

1) urto (centrale) **perfettamente elastico**  $\Leftrightarrow$  l'energia meccanica si conserva integralmente:

$$m_1 \cdot |\vec{v}_1|^2 + m_2 \cdot |\vec{v}_2|^2 = m_1 \cdot |\vec{v}_{1+}|^2 + m_2 \cdot |\vec{v}_{2+}|^2$$

2) urto (centrale) **totalmente anelastico**  $\Leftrightarrow$  l'energia meccanica non si conserva e le particelle restano attaccate l'una all'altra, quindi con la stessa velocità:

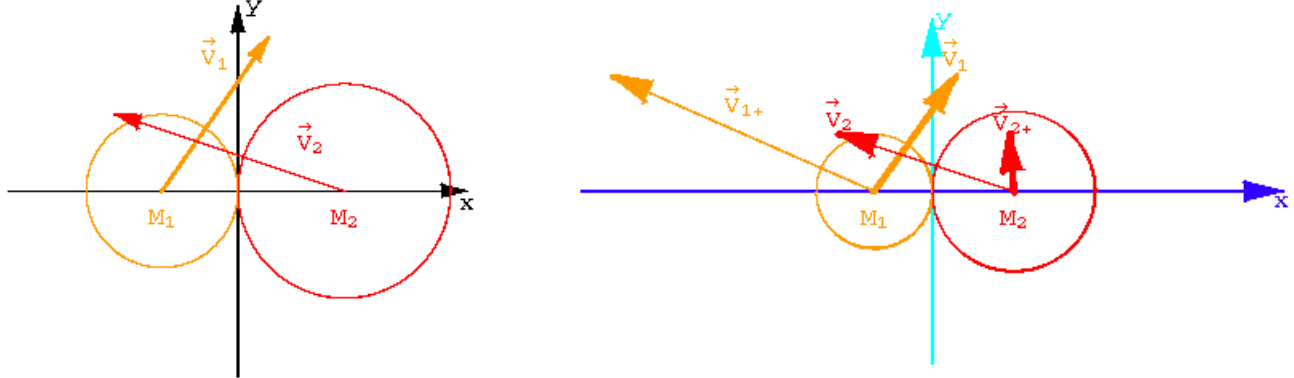
$$\vec{v}_{1+} = \vec{v}_{2+} = \vec{v}_+ = \vec{v}_{cm}$$

Se le due particelle sono delle sfere dure, le forze interne fra di esse si eserciteranno soltanto nell'istante dell'urto. Tali forze agiranno soltanto nel punto di contatto ed avranno direzione parallela alla retta che

passa per i centri delle due sfere. Scegliendo il seguente sistema di riferimento:

- asse  $x \Rightarrow$  retta passante per i centri delle sfere e chiamiamo questa direzione come direzione dell'urto centrale;
- asse  $y \Rightarrow$  retta perpendicolare all'asse  $x$  e passante per il punto di contatto delle due sfere;

La forza (o per meglio dire l'impulso) che agisce sulla particella #1 (o #2) è parallela all'asse  $x$ . Quindi solo la componente  $x$  di  $\vec{v}_1$  (cioè lungo la direzione dell'urto centrale) subirà una variazione (e si potrà descrivere come un urto centrale "classico"), mentre la componente  $y$  rimarrà inalterata. La figura mostra le velocità delle particelle immediatamente prima e immediatamente dopo l'urto:



**Esplosioni:** fenomeno nel quale un singolo oggetto si spezza in due o più pezzi, che si allontanano l'uno dall'altro. In un certo senso è l'inverso dell'urto anelastico e come tale viene trattato matematicamente. Nell'esplosione con la formazione di due soli frammenti bisogna aspettarsi la conservazione della quantità di moto totale ed il centro di massa che prosegue il suo moto indisturbato. Se conosciamo la massa e la velocità di un frammento possiamo calcolare la massa e la velocità dell'altro. Controllando il bilancio energetico si ha che l'energia cinetica totale è aumentata e l'energia meccanica che troviamo in più proviene dalla trasformazione di energia interna al sistema.

**Due particelle legate dalla forza gravitazionale – Moti orbitali:** vedi “Forza di gravità o Forza peso”; si assume che non ci siano forze esterne:

$$|\vec{F}| = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad \text{con} \quad \begin{cases} G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \\ r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \end{cases}$$

Le **condizioni iniziali del sistema** al tempo  $t=0$  sono:

- 1)posizioni delle particelle sono  $\vec{r}_{0,1}$  e  $\vec{r}_{0,2}$  rispettivamente;
- 2)velocità delle particelle sono  $\vec{v}_{0,1}$  e  $\vec{v}_{0,2}$  rispettivamente;
- 3)quantità di moto totale è  $\vec{p} = m_1 \cdot \vec{v}_{0,1} + m_2 \cdot \vec{v}_{0,2}$ ;
- 4)momento angolare totale è  $\vec{L}_{tot}$  (da calcolare);

e poiché non ci sono forze interne di alcun tipo, tali quantità si debbono conservare. Quanto all'energia:

$$1) \text{energia cinetica è } E_k = \frac{1}{2} \cdot \left( m_1 \cdot |\vec{v}_{0,1}|^2 + m_2 \cdot |\vec{v}_{0,2}|^2 \right);$$

$$2) \text{energia potenziale gravitazionale è } E_{gra} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

e poiché non ci sono forze esterne la loro somma deve rimanere costante.

Si prende il **sistema di riferimento** con l'origine nel centro di massa che assumiamo sia fermo, il che equivale a dire che la quantità di moto totale è zero:

$$\vec{p} = m_1 \cdot \vec{v}_{0,1} + m_2 \cdot \vec{v}_{0,2} = 0$$

Questo implica che le velocità iniziali delle due particelle debbono stare nello stesso piano  $xy$ , e quindi il momento angolare iniziale del sistema deve essere diretto lungo l'asse  $z$ . Dato che il momento angolare totale si deve conservare, il moto delle due particelle dovrà svolgersi sempre sul piano  $xy$ . In questo modo abbiamo semplificato il problema e si può lavorare in due sole dimensioni.

**Due particelle legate dalla forza gravitazionale – Moti orbitali in due dimensioni:** vedi “Forza di gravità o Forza peso” e “Due particelle legate dalla forza gravitazionale – Moti orbitali”.

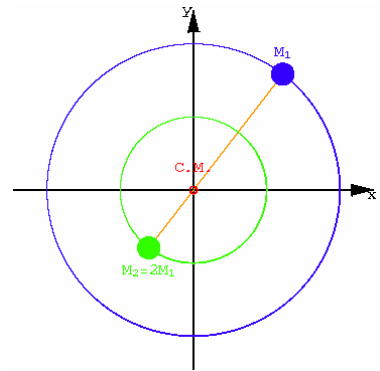
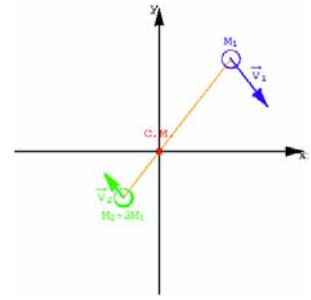
Le **condizioni iniziali del sistema** al tempo  $t=0$  sono:

- 1) posizioni delle particelle sono  $\vec{r}_{0,1}$  e  $\vec{r}_{0,2}$  rispettivamente;
- 2) velocità delle particelle sono  $\vec{v}_{0,1}$  e  $\vec{v}_{0,2}$  rispettivamente;
- 3) quantità di moto totale è  $\vec{p} = m_1 \cdot \vec{v}_{0,1} + m_2 \cdot \vec{v}_{0,2} = 0$  (resta costante);
- 4) momento angolare totale è  $\vec{L}_{tot} = m \cdot \vec{v} \times \vec{r} = m_1 \cdot \vec{v}_{0,1} \times \vec{r}_{0,1} + m_2 \cdot \vec{v}_{0,2} \times \vec{r}_{0,2}$  (deve restare costante);
- 5) energia cinetica è  $E_k = \frac{1}{2} \cdot (m_1 \cdot |\vec{v}_{0,1}|^2 + m_2 \cdot |\vec{v}_{0,2}|^2)$ ;
- 6) energia potenziale gravitazionale è  $E_{gra} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$ ;
- 7) energia meccanica è  $U = E_k + E_{gra}$  (deve restare costante);

In seguito agli spostamenti delle due particelle si potrà avere conversione di energia potenziale in energia cinetica, o viceversa. Osserviamo che:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_k \geq 0 \\ E_{gra} \leq 0 \\ r \rightarrow \infty \Leftrightarrow E_{gra} = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} U < 0 \Leftrightarrow \text{le particelle si allontanano ma fino ad una certa distanza massima} \\ U > 0 \Leftrightarrow \text{le particelle si allontanano indefinitivamente} \end{array} \right.$$

Nel primo caso ( $U < 0$ ), se il momento angolare totale è diverso da zero, vuol dire che le due particelle gireranno attorno al loro centro di massa percorrendo delle traiettorie chiuse di forma ellittica (**orbite**) col centro di massa in uno dei fuochi dell'ellisse. La particella di massa più grande percorre l'orbita più interna; questo è il caso, per esempio, del moto della Terra e del Sole, dove la distanza della Terra dal centro di massa dei due pianeti è il 99,997% della distanza Terra-Sole. Quindi dire che il Sole sta fermo e la Terra gira intorno è una buona approssimazione.



### 13. Casistica dei problemi:

**Massa su un ripiano + carrucole + peso:** fune priva di massa ed inestensibile, assenza d'attrito, carrucole prive di massa:

$m_1, m_2$  = massa sul ripiano e del peso

$T_1, T_2$  = tensioni della fune

$m_1 \cdot g, m_2 \cdot g$  = forza peso della massa sul ripiano e del peso

$V$  = reazione del vincolo alla componente verticale della forza peso della massa sul ripiano

$$V = m_1 \cdot g$$

$$1) \text{ripiano} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = T_1 = m_1 \cdot a_{1x} \\ \sum F_y = V - m_1 \cdot g = m_1 \cdot a_{1y} = 0 \end{cases}$$

$$2) \text{peso} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = T_2 - m_2 \cdot g = -m_2 \cdot a_{2y} \end{cases}$$

**N.B.:** se la fune è priva di massa  $\Rightarrow T_1 = T_2 = T$ ;

**N.B.:** se la fune è inestensibile  $\Rightarrow a_{1x} = a_{2y} = a$ ;

$$\begin{aligned}
1) \text{ripiano} &\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} T &= m_1 \cdot a \\ V &= -m_1 \cdot g \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} m_1 \cdot a - m_2 \cdot g &= -m_2 \cdot a \Leftrightarrow a = \frac{m_2 \cdot g}{m_1 + m_2} \\ T &= \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot g}{m_1 + m_2} \end{aligned} \right. \\
2) \text{peso} &\Rightarrow \left\{ T - m_2 \cdot g = -m_2 \cdot a \right\}
\end{aligned}$$

**Binario rettilineo + carrello + peso in movimento:** si utilizza il principio di conservazione della quantità di moto totale:

$m_{car}$  = massa del carrello

$m_{pes}$  = massa del peso

$\vec{v}_{car, 0} = \vec{v}_{pes, 0} = 0$  = velocità iniziale del carrello e del peso

$\vec{v}_{pes} = cost$  = velocità del peso (in movimento)

Il centro di massa del sistema era fermo e vi rimane, mentre il carrello:

$$\vec{p} = (m_{car} \cdot \vec{v}_{car} + m_{pes} \cdot \vec{v}_{pes}) = (m_{car} + m_{pes}) \cdot \vec{v}_{cm} = cost$$

$$\vec{v}_{cm} = \frac{(m_{car} \cdot \vec{v}_{car} + m_{pes} \cdot \vec{v}_{pes})}{(m_{car} + m_{pes})} = 0 \Leftrightarrow \vec{v}_{car} = -\left(\frac{m_{pes}}{m_{car}}\right) \cdot \vec{v}_{pes}$$

**Lancio di un satellite artificiale:** l'altezza massima  $h$  raggiunta dal satellite dipende dalla componente parallela alla forza peso della velocità iniziale:

$v_0$  = velocità iniziale del satellite

$\alpha$  = angolo tra la superficie e la direzione di  $v_0$

$m_{ter}, m_{sat}$  = massa della Terra e del satellite

$r_{ter}$  = raggio della Terra

$h$  = altezza massima raggiunta del satellite

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot m_{sat} \cdot [v_0 \cdot \sin(\alpha)]^2 &= \frac{G \cdot m_{ter} \cdot m_{sat}}{r_{ter}} - \frac{G \cdot m_{ter} \cdot m_{sat}}{(r_{ter} + h)} \\ \vec{g} &= G \cdot \frac{m_{ter}}{r_{ter}^2} \Leftrightarrow G \cdot \frac{m_{ter}}{r_{ter}} = \vec{g} \cdot r_{ter} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot [v_0 \cdot \sin(\alpha)]^2 = \frac{\vec{g} \cdot r_{ter} \cdot h}{r_{ter} + h}$$

Alla quota massima  $h$  la componente orizzontale della velocità si annulla e rimane soltanto la componente ortogonale alla forza peso; questa è la forza centripeta, che cambia la direzione del satellite posto ad  $h$ :

$$|F_{cen}| = m_{sat} \cdot \vec{g} \cdot \left[ \frac{r_{ter}}{r_{ter} + h} \right]^2$$

Per rimanere in orbita circolare alla quota  $h$  il satellite deve avere una velocità ortogonale alla forza centripeta e tale che:

$$m_{sat} \cdot \underbrace{a_{cen}}_{\frac{v^2}{r}} = m_{sat} \cdot \frac{v^2}{r_{ter} + h} = |F_{cen}| = m_{sat} \cdot \vec{g} \cdot \left[ \frac{r_{ter}}{r_{ter} + h} \right]^2 \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{g \cdot r_{ter}^2}{r_{ter} + h}}$$