

Cinematica

Cinematica: studia il moto di un corpo, indipendentemente dalle cause.

1. Moto di una particella:

Particella: frammento di materia sufficientemente piccolo da poter essere individuato, per gli scopi che ci prefiggiamo, con un punto dello spazio. Una particella, in realtà, piccola per quanto sia, occupa sempre un volume finito. Rappresentare una particella con un punto, quindi, costituisce una approssimazione, che può essere più o meno buona a seconda di quello che vogliamo studiare.

Posizione: coordinate in base al sistema di riferimento.

Gradi di libertà: numero di coordinate nel sistema di riferimento.

Spostamento: vettore che descrive un cambiamento della posizione della particella. Si ha come differenza tra il vettore posizione finale \vec{r}_2 ed il vettore posizione iniziale \vec{r}_1 e dipende solo da questi due.

Traiettoria o Percorso: insieme dei punti che la particella occupa durante il suo moto; è quindi una curva, eventualmente chiusa, dello spazio che non presenta discontinuità. Per definirla si danno delle equazioni parametriche, cioè in funzione di un parametro quale il tempo, per ognuna delle coordinate.

Distanza percorsa: quantità scalare che misura la lunghezza del tratto di traiettoria percorso.

Moto in una dimensione: vengono stabiliti:

- 1) sistema di riferimento (retta);
- 2) nome alla coordinata che indica un punto generico;
- 3) verso positivo;
- 4) unità di misura per la posizione;
- 5) origine o punto a partire dal quale si misura la posizione della particella;

Equazione oraria: equazione che da informazioni sulla posizione della particella istante per istante:

$$y = y(t)$$

Tabella oraria: tabella nella quale si inserisce: tempo, posizione/coordinata, velocità media, accelerazione.

Grafico orario: grafico che si ricava o dall'equazione oraria o dalla tabella oraria e nel quale uno degli assi rappresenta il tempo.

2. Moto rettilineo:

Posizione:

$$1 \text{ dim} \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{v} \cdot t$$

$$2 \text{ dim} \Rightarrow \begin{cases} r_x = r_{x,1} + v_x \cdot t \\ r_y = r_{y,1} + v_y \cdot t \end{cases}$$

Velocità media: vettore, parallelo al vettore spostamento, dato da:

$$1 \text{ dim} \Rightarrow \vec{v}_{med} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad \text{con } \Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$2 \text{ dim} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_{med} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \\ \Delta \vec{r} = (\Delta x, \Delta y) \Rightarrow \vec{v}_{med} = \frac{(\Delta x, \Delta y)}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t} \right) \quad \text{con } \begin{cases} \Delta x = x_2 - x_1 \\ \Delta y = y_2 - y_1 \end{cases} \end{cases}$$

Velocità istantanea: vettore, parallelo al vettore spostamento o con direzione della retta tangente alla traiettoria nel punto in cui si trova la particella, dato da:

$$1 \text{ dim} \Rightarrow \vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$2 \text{ dim} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \\ d\vec{r} = (dx, dy) \Rightarrow \vec{v}_{med} = \frac{(d'x, d'y)}{dt} = \left(\frac{d'x}{dt}, \frac{d'y}{dt} \right) \end{cases}$$

Il concetto di valore istantaneo di una grandezza fisica è una astrazione matematica, che non corrisponde a qualcosa di effettivamente misurabile. Il fatto vero è che qualsiasi procedimento di misura richiede, per essere eseguito, un tempo finito; piccolo per quanto sia, ma sempre finito e misurabile.

Velocità scalare: modulo della velocità istantanea. Il suo valore ci da informazioni su:

- 1) positivo \Rightarrow moto in avanti;
- 2) nullo \Rightarrow particella ferma;
- 3) negativo \Rightarrow moto all'indietro;

Accelerazione media: vettore dato da:

$$\vec{a}_{med} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad \text{con } \Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

Accelerazione istantanea: vettore dato da:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

Il suo valore ci da informazioni su:

- 1) positivo \Rightarrow velocità aumenta;
- 2) nullo \Rightarrow velocità costante;
- 3) negativo \Rightarrow velocità diminuisce;

Variazione del vettore velocità: durante il tempo dt , in due direzioni si possono avere i casi:

- 1) varia solo il modulo \Rightarrow la particella percorre una traiettoria rettilinea e l'accelerazione è parallela alla velocità e tangente alla traiettoria = **accelerazione tangenziale**;
- 2) varia solo la direzione \Rightarrow la particella percorre, con velocità scalare costante, una traiettoria curva. La variazione della velocità è un vettore (infinitesimo) perpendicolare alla traiettoria, e l'accelerazione è anch'essa ortogonale alla traiettoria, ma diretta sempre verso il centro di curvatura della curva = **accelerazione radiale o centripeta**;
- 3) varia sia il modulo che la direzione \Rightarrow l'accelerazione viene scomposta nelle due componenti ortogonali:
 - A. componente tangenziale = parallela alla velocità, quindi tangente alla traiettoria, che misura la variazione del modulo della velocità nell'unità di tempo;
 - B. componente radiale = ortogonale alla traiettoria, che misura la variazione della direzione della velocità nell'unità di tempo;

Si possono avere le seguenti combinazioni:

- 1) accelerazione tangenziale $\neq 0 \Rightarrow$ moto vario;
- 2) accelerazione tangenziale $= 0 \Rightarrow$ moto curvilineo uniforme;
- 3) accelerazione radiale $\neq 0 \Rightarrow$ moto curvilineo;
- 4) accelerazione radiale $= 0 \Rightarrow$ moto rettilineo vario;
- 5) accelerazione tangenziale = accelerazione radiale $= 0 \Rightarrow$ moto rettilineo uniforme;

Accelerazione \rightarrow posizione:

$$1) \left\{ \vec{v}(t) = 0 \Leftrightarrow \text{traiettoria} = \text{punto} \right.$$

$$2) \text{moto rettilineo} \left\{ \begin{array}{l} \vec{v}(t) = \text{cost} \Leftrightarrow \text{traiettoria} = \text{retta} \Leftrightarrow \vec{a} = 0 \\ \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t \Leftrightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^t \vec{v}(t) \cdot dt = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot \int_{t_0}^t dt = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot (t - t_0) \end{array} \right.$$

$$3) \text{moto rettilineo uniformemente accelerato} \left\{ \begin{array}{l} \vec{v}(t) \neq \text{cost} \\ \vec{a}(t) = \text{cost} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^t \vec{a} \cdot dt = \vec{v}_0 \pm \vec{a} \cdot (t - t_0) \\ \vec{v}(r)^2 = (\vec{v}_0)^2 + 2 \cdot \vec{a} \cdot (t - t_0) \\ \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot (t - t_0) \pm \frac{1}{2} \cdot \vec{a} \cdot (t - t_0)^2 \end{array} \right.$$

3. Moto verticale di un corpo (caduta di un grave): con asse verticale rivolto verso il basso:

$$\text{equazione parametrica} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{cases}$$

$$\text{velocità} \Rightarrow \vec{v} \Rightarrow \begin{cases} v_x = \frac{d'x}{dt} = 0 \\ v_y = \frac{d'y}{dt} = g \cdot t \end{cases} \Leftrightarrow \vec{v} = (0, g \cdot t)$$

$$\text{modulo} \Rightarrow |v| = |g \cdot t|$$

$$\text{tempo} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} \quad \text{con } h = y$$

$$\text{accelerazione (di gravità)} \Rightarrow \vec{g} \simeq 9.8 \frac{m}{s^2}$$

	y	v_0	v	g	t
$v = v_0 - g \cdot t$		✓	✓	✓	✓
$y = y_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$	✓	✓		✓	✓
$v^2 = v_0^2 - 2 \cdot g \cdot (y - y_0)$	✓	✓	✓	✓	
$y = y_0 + \frac{1}{2} \cdot (v_0 + v) \cdot t$	✓	✓	✓		✓
$y = y_0 + v \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$	✓		✓	✓	✓

4. Moto verticale di un corpo (lancio verso l'alto di un grave): con asse verticale rivolto verso l'alto:

$$\text{equazione parametrica} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ y = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{cases}$$

$$\text{velocità} \Rightarrow \vec{v} \Rightarrow \begin{cases} v_x = \frac{d'x}{dt} = 0 \\ v_y = \frac{d'y}{dt} = v_0 - g \cdot t \end{cases} \Leftrightarrow \vec{v} = (0, v_0 - g \cdot t)$$

$$\text{modulo} \Rightarrow |v| = |v_0 - g \cdot t|$$

	y	v_0	v	a	t
$v = v_0 + a \cdot t$		✓	✓	✓	✓
$y = y_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$	✓	✓		✓	✓

$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot (y - y_0)$	✓	✓	✓	✓	
$y = y_0 + \frac{1}{2} \cdot (v_0 + v) \cdot t$	✓	✓	✓		✓
$y = y_0 + v \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$	✓		✓	✓	✓

5. Moto armonico:

Semplice:

$$\text{equazione parametrica} \Rightarrow \vec{r} = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \quad \text{con} \quad \begin{cases} A = \text{ampiezza del moto} \\ \omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} \text{ pulsazione o frequenza angolare} \\ \varphi = \text{fase iniziale (in radianti)} \\ (\omega \cdot t + \varphi) = \text{fase del moto al tempo } t \end{cases}$$

$$\text{periodo} \Rightarrow T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega}$$

$$\text{frequenza} \Rightarrow \nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2 \cdot \pi}$$

$$\text{velocità} \Rightarrow \vec{v} \Rightarrow \left\{ \frac{d'r}{dt} = \omega \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) \right.$$

$$\text{accelerazione} \Rightarrow \vec{a} \Rightarrow \left\{ \frac{d''r}{dt^2} = \frac{d'v}{dt} = -\omega^2 \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) = -\omega^2 \cdot r \right.$$

Con forza elastica:

$$\text{equazione parametrica} \Rightarrow \vec{r} = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \quad \text{con} \quad \begin{cases} \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ k = \text{costante della forza elastica} \\ m = \text{massa del punto materiale} \end{cases}$$

$$\text{periodo} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\text{frequenza} \Rightarrow \nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2 \cdot \pi}$$

$$\text{velocità} \Rightarrow \vec{v} \Rightarrow \left\{ \frac{d'r}{dt} = \omega \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) \right. \quad \text{oppure} \quad \vec{v} = \frac{\lambda}{T} \quad \text{con } \lambda = \text{lunghezza d'onda}$$

$$\text{accelerazione} \Rightarrow \vec{a} \Rightarrow \left\{ \frac{d''r}{dt^2} = \frac{d'v}{dt} = -\omega^2 \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) = -\omega^2 \cdot r \right.$$

6. Moto nel piano:

Moto uniforme:

$$\text{equazione parametrica} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + k \cdot t \\ y = y_0 + m \cdot t \end{cases} \quad \text{con } \vec{v} = (k, m)$$

$$\text{traiettoria} \Rightarrow \begin{cases} \frac{(x - x_0)}{k} = \frac{(y - y_0)}{m} \\ \text{pendenza} \Rightarrow \frac{k}{m} \end{cases}$$

$$\text{velocità} \Rightarrow \vec{v} \Rightarrow \begin{cases} v_x = \frac{d'x}{dt} = k \\ v_y = \frac{dy}{dt} = m \end{cases} \Leftrightarrow \vec{v} = (k, m)$$

$$\text{modulo} \Rightarrow |v| = \sqrt{k^2 + m^2}$$

accelerazione $\Rightarrow \vec{a} = 0 \Rightarrow$ dato che la velocità della particella è costante sia in direzione che in modulo

Moto uniformemente accelerato:

$$\text{equazione parametrica} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + k \cdot t^2 \\ y = y_0 + m \cdot t^2 \end{cases}$$

$$\text{traiettoria} \Rightarrow \begin{cases} \frac{(x - x_0)}{k} = \frac{(y - y_0)}{m} \\ \text{pendenza} \Rightarrow \frac{k}{m} \end{cases}$$

$$\text{velocità} \Rightarrow \vec{v} \Rightarrow \begin{cases} v_x = \frac{d'x}{dt} = 2 \cdot k \cdot t \\ v_y = \frac{dy}{dt} = 2 \cdot m \cdot t \end{cases} \Leftrightarrow \vec{v} = (2 \cdot k \cdot t, 2 \cdot m \cdot t) = 2 \cdot t \cdot (k, m)$$

$$\text{modulo} \Rightarrow |v| = 2 \cdot t \cdot \sqrt{k^2 + m^2}$$

$$\text{accelerazione (tangenziale)} \Rightarrow \vec{a}_{tan} \Rightarrow \begin{cases} a_x = \frac{d''x}{dt^2} = \frac{d'v_x}{dt} = 2 \cdot k \\ q_y = \frac{d''y}{dt^2} = \frac{d'v_y}{dt} = 2 \cdot m \end{cases} \Leftrightarrow \vec{a}_{tan} = (2 \cdot k, 2 \cdot m) = 2 \cdot (k, m)$$

	x	v_0	v	a	t
$v = v_0 + a \cdot t$		✓	✓	✓	✓
$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$	✓	✓		✓	✓
$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot (x - x_0)$	✓	✓	✓	✓	
$x = x_0 + \frac{1}{2} \cdot (v_0 + v) \cdot t$	✓	✓	✓		✓
$x = x_0 + v \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$	✓		✓	✓	✓

Moto circolare uniforme:

$$\text{equazione parametrica} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + c \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ y = y_0 + c \cdot \sin(\omega \cdot t) \end{cases} \quad \text{con } c = \text{raggio del cerchio}$$

$$\text{traiettoria} \Rightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = c^2$$

$$\text{velocità} \Rightarrow \vec{v} \Rightarrow \begin{cases} v_x = \frac{d'x}{dt} = -c \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t) \\ v_y = \frac{dy}{dt} = c \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) \end{cases} \Leftrightarrow \vec{v} = (-c \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t), c \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t))$$

$$\text{modulo} \Rightarrow |v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{-c \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t)^2 + c \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)^2} = c \cdot \omega$$

$$\text{accelerazione (radiale alla velocità)} \Rightarrow \vec{a}_{rad} \Rightarrow \begin{cases} a_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 v_x}{dt} = -c \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ q_y = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 v_y}{dt} = -c \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) \\ \text{modulo} \Rightarrow |a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = c \cdot \omega^2 \end{cases}$$

Moto parabolico: si utilizza il principio di indipendenza dei moti simultanei (rettilineo uniforme ed uniformemente accelerato):

$$\text{equazione parametrica} \Rightarrow \begin{cases} x = v_{0x} \cdot t \\ y = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{cases}$$

$$\text{traiettoria} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{x}{v_{0x}} \right)^2 & \text{con } t = \frac{x}{v_{0x}} \end{cases}$$

$$\text{velocità} \Rightarrow \vec{v} \Rightarrow \begin{cases} v_x = \frac{d^2 x}{dt} = v_{0x} \\ v_y = \frac{d^2 y}{dt} = v_{0y} - g \cdot t \end{cases} \Leftrightarrow \vec{v} = (v_{0x}, v_{0y} - g \cdot t)$$

$$\text{modulo} \Rightarrow |v| = \sqrt{v_{0x}^2 + (v_{0y} - g \cdot t)^2}$$

$$\text{altezza massima e gittata} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{x}{v_0} \right)^2 \\ x = \sqrt{\frac{2 \cdot v_0^2 \cdot y}{g}} \end{cases} \Leftrightarrow k = \frac{g}{2 \cdot v_0^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y = k \cdot x^2 \\ x = \sqrt{\frac{y}{k}} \end{cases}$$

Moto di un proiettile:

$$\text{equazione parametrica} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + v_{0x} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a_x \cdot t^2 = [v_0 \cdot \cos(\alpha_0)] \cdot t \\ y = y_0 + v_{0y} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a_y \cdot t^2 = [v_0 \cdot \sin(\alpha_0)] \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{cases}$$

$$\text{velocità} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_0 \Rightarrow \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cdot \cos(\alpha_0) \\ v_{0y} = v_0 \cdot \sin(\alpha_0) \end{cases} \\ \vec{v} \Rightarrow \begin{cases} v_x = \frac{d^2 x}{dt} = v_{0x} + a_x \cdot t = v_0 \cdot \cos(\alpha_0) \\ v_y = \frac{d^2 y}{dt} = v_{0y} + a_y \cdot t = v_0 \cdot \sin(\alpha_0) - g \cdot t \end{cases} \\ \text{modulo} \Rightarrow |v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{-2 \cdot g \cdot t \cdot v_0 \cdot \sin(\alpha_0) + g^2 \cdot t^2 + v_0^2} \end{cases}$$

$$\text{alzo} \Rightarrow \begin{cases} \tan(\alpha_0) = \frac{v_y}{v_x} \Leftrightarrow \alpha_0 = \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right) \end{cases}$$

$$\text{traiettoria (equazione parabola)} \Rightarrow \begin{cases} y = [\tan(\alpha_0)] \cdot x - \frac{g}{2 \cdot [v_0 \cdot \cos(\alpha_0)]^2} \cdot x^2 = b \cdot x - a \cdot x^2 \end{cases}$$

$$\text{gittata} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2 \cdot v_0^2}{g} \cdot \sin(\alpha_0) \cdot \cos(\alpha_0) = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin(2 \cdot \alpha_0) \\ x_{\max} \Leftrightarrow \sin(2 \cdot \alpha_0) = 1 \Leftrightarrow \text{alzo } \alpha_0 = 45^\circ \end{cases}$$

7. Sistemi di particelle:

Rotazioni: in questo caso il centro di massa rimane fermo, quindi la risultante (o somma) delle forze esterne è nulla; ciò non vuol dire che non ci sono forze esterne. Si possono quindi avere due moti:

- 1) rotazioni di tutto il sistema (rigido);
- 2) movimenti delle particelle le une rispetto alle altre;

N.B.: per semplificare si cerca sempre di separare i due tipi di moti: se l'interesse principale riguarda i moti di centro di massa, si può considerare il sistema come se fosse rigido; se siamo interessati ai moti interni, possiamo assumere (se è possibile) che non ci siano forze esterne

1) Considerando un corpo rigido (non ci sono movimenti delle particelle le une rispetto alle altre) si possono avere movimenti attorno all'**asse di rotazione** R . Questa è una retta (fissa) attorno alla quale le particelle si muovono, cioè le particelle si muovono descrivendo traiettorie circolari e rimanendo sempre alla stessa distanza da R . Si fissano due piani (P_0 fisso e P solidale con il sistema di particelle) passanti per la retta R e l'angolo ϕ compreso tra essi.

La **velocità angolare** è:

$$\omega_{med} = \frac{\Delta \phi}{\Delta t}$$

$$\omega = \frac{d\phi}{dt}$$

Il **vettore velocità angolare** ha:

- 1) modulo $\Rightarrow |\omega|$;
- 2) direzione \Rightarrow parallela all'asse di rotazione;
- 3) verso \Rightarrow destrorso;

La **velocità scalare** è:

$$|v| = \omega \cdot d \quad \text{con} \begin{cases} v = \text{velocità scalare della particella a distanza } d \\ d = \text{distanza della particella dall'asse di rotazione} \end{cases}$$

Relazione vettoriale fra velocità traslazionale e velocità angolare:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad \text{con } \vec{r} = \text{vettore distanza della particella dall'asse di rotazione}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_{par} + \vec{r}_{ort} \quad \text{con} \begin{cases} \vec{r}_{par} = \text{parallelo ad } \vec{\omega} \\ \vec{r}_{ort} = \text{ortogonale ad } \vec{\omega} \end{cases}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times (\vec{r}_{par} + \vec{r}_{ort}) = \vec{\omega} \times \vec{r}_{ort}$$

Il **vettore accelerazione angolare** è:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt}$$