Simboli

$\in$ appartiene
$\notin$ non appartiene
: tale che
$\forall$ per ogni
$\exists$ esiste
/$\exists$ non esiste
$\exists!$ esiste ed è unico
$\Rightarrow$ se…allora…
$\Rightarrow$/ se non…allora non…
$\Leftrightarrow$ se e solo se
$\rightarrow$ corrisponde un unico
$\rightarrow$/ non corrisponde un unico
$\leftrightarrow$ corrisponde biunivocamente

Insiemistica

S $\subseteq$ E S è sotto insieme di E
E $\supseteq$ S E è sovra insieme di S
$\cap$ intersezione
$\cup$ unione
Δ differenza

Varie

-n; +n opposto
n/d; n/d inverso
N numeri positivi
Z numeri positivi e negativi
Q numeri razionali relativi

Prodotti notevoli

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$
$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$$
$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$
$$(a+b)^3=a^3+b^3+3a^2b+3ab^2$$
$$a^3+b^3=(a+b)\cdot(a^2+b^2-ab)$$
$$a^3-b^3=(a-b)\cdot(a^2+b^2+ab)$$

Frazioni

$$\frac{0}{a}=0 \quad \forall\ a\in R$$
$$\frac{a}{\infty}=0 \quad \forall\ a\in R$$
$$\frac{1}{0}=\infty$$

Elevazione a potenza

$$a^1=a$$
$$a^0=1$$
$$a^{-x}=\frac{1}{a^x}=\left(\frac{1}{a}\right)^x$$
$$a^x\cdot a^y=a^{x+y}$$
$$a^x:a^y=a^{x-y}$$
$$\left(a^x\right)^y=a^{x\cdot y}$$
$$(a\cdot b)^x=a^x\cdot b^x$$
$$(a:b)^x=a^x:b^x$$

Radicali

$$\sqrt[n]{a^k}=a^{\frac{k}{n}}$$
$$\sqrt[1]{a}=a$$
$$\sqrt[n]{a^n}=a \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x^2}=|x|$$
$$\sqrt[n\cdot k]{a^{p\cdot k}}=\sqrt[n]{a^p}$$
$$\sqrt[n]{a^p}=\sqrt[n\cdot k]{a^{p\cdot k}}$$
$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$$
$$\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$
$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\sqrt[n]{a^k}$$
$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[n\cdot k]{a}$$
$$\sqrt[n]{a}\pm\sqrt[k]{b}=\sqrt[n\cdot k]{a^k\pm b^n}$$
$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$

con ($A^2 - B$) = quadrato perfetto

Logaritmi

$$Log_a(b)=x \Leftrightarrow a^x=b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a,b\in R \\ a>0, a\neq 1 \\ b>0 \end{cases}$$
$$Log_a(b) \begin{cases} \text{str. crescente } \forall a \text{ et } b \text{ concordi} \\ \text{str. decresente } \forall a \text{ et } b \text{ discordi} \end{cases}$$
$$a^{Log_a(b)}=b \ \Leftrightarrow \ Log_a(b)=x$$
$$Log_a(1)=0 \ \Leftrightarrow \ a^0=1$$
$$Log_a(a)=1 \ \Leftrightarrow \ a^1=a$$
$$Log_a(x\cdot y)=Log_a(x)+Log_a(y) \ \Leftrightarrow \begin{cases} a>0,\ a\neq 1 \\ x,y>0 \end{cases}$$
$$Log_a\left(\frac{x}{y}\right)=Log_a(x)-Log_a(y) \ \Leftrightarrow \begin{cases} a>0,\ a\neq 1 \\ x,y>0 \end{cases}$$

$Log_a(b)^x = xLog_a(b) \iff \forall x \in R$ et $b > 0$

$Log_a(\sqrt[x]{b}) = 1/x \cdot Log_a(b)$

$Log_b(x) = Log_b(a) \cdot Log_a(x)$

$Log_a(x) < Log_a(y) \iff a > 1$ et $x < y$

$Log_a(x) > Log_a(y) \iff 0 < a < 1$ et $x < y$

$$Log_a(x) = Log_a(y) \iff \begin{cases} x = y \\ x, y > 0 \\ y \in R \end{cases}$$

$$Log_a(x) = \frac{Log_b(x)}{Log_b(a)} \iff \begin{cases} a > 0,\ a \neq 1 \\ x > 0 \\ b > 0,\ b \neq 1 \end{cases}$$

$$Log_a(x) = \frac{1}{Log_x(a)} \iff \begin{cases} a > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$Ln(x) \neq 0 \quad \forall x > 0$

$Ln(x) = 0 \Rightarrow x = 1$

$Ln(x) > 0 \Rightarrow x > 1$

$Ln(x) \in R \Rightarrow x > 0$

$$Ln(x) \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x > 0 \end{cases}$$

$Ln(x) < x \quad \forall x > 0$

$Ln(n+1) \leq n \quad \forall n \in N$

Esponenziali

$$a^x = b \iff \begin{cases} a, b \in R \\ a > 0, a \neq 1 \\ b > 0 \end{cases}$$

$a^x > 0$ sempre $\forall x \in R$ et $\forall a > 0$

$a^x = 0$ impossibile $\forall x \in R$ et $\forall a > 0$

$$a^x > 0 \begin{cases} \text{str. crescente } \forall a > 1 \\ \text{str. decresente } \forall 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$0 < a < 1 \Rightarrow \begin{cases} a^x = 1 \iff x = 0 \\ a^x < 1 \iff x > 0 \\ a^x > 1 \iff x < 0 \end{cases}$$

$$a > 1 \Rightarrow \begin{cases} a^x < a^0 = 1 \iff x < 0 \\ a^x > a^0 = 1 \iff x > 0 \end{cases}$$

$a > 1$ et $x_1 < x_2 \iff a^{x_1} < a^{x_2}$

$a = 1$ et $x_1 \neq x_2 \iff a^{x_1} = a^{x_2}$

$0 < a < 1$ et $x_1 < x_2 \iff a^{x_1} > a^{x_2}$

$f(x)^{g(x)} = e^{Lnf(x)^{g(x)}} = e^{g(x) \cdot Lnf(x)}$

$$e > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \forall n \in N$$

Equazioni di II° grado

$ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$$\begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \Delta = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-b}{2a} \\ \Delta < 0 \Rightarrow \nexists \text{ soluzioni reali} \end{cases}$$

Si può scomporre in:

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) =$

$$= ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2 \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Disequazioni di II° grado

$ax^2 + bx + c \gtreqless 0 \iff ax^2 + bx + c = 0 \iff$

$$\iff \begin{cases} \Delta > 0 \begin{cases} a \text{ et } f(x) \text{ con.} \iff x \leq x_1 \ \vee \ x \geq x_2 \\ a \text{ et } f(x) \text{ dis.} \iff x_1 \leq x \leq x_2 \end{cases} \\ \Delta = 0 \begin{cases} a \text{ et } f(x) \text{ con.} \iff \forall x \in R - \left\{-\dfrac{b}{2a}\right\} \\ a \text{ et } f(x) \text{ dis.} \iff \nexists \text{ soluzioni reali} \end{cases} \\ \Delta < 0 \begin{cases} a \text{ et } f(x) \text{ con.} \iff \forall x \in R \\ a \text{ et } f(x) \text{ dis.} \iff \nexists \text{ soluzioni reali} \end{cases} \end{cases}$$

Disequazioni irrazionali

$$\sqrt[n]{P(x)} \leq Q(x) \Rightarrow \begin{cases} \text{n dispari} \rightarrow P(x) \leq [Q(x)]^n \\ \text{n pari} \rightarrow \begin{cases} P(x) \leq [Q(x)]^n \\ P(x) \geq 0 \\ Q(x) \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{P(x)} > Q(x) \Rightarrow \begin{Bmatrix} P(x) \geq 0 \\ Q(x) < 0 \end{Bmatrix} \cup \begin{Bmatrix} P(x) > [Q(x)]^n \\ Q(x) > 0 \end{Bmatrix}$$

Valore assoluto

$$|x| = \begin{cases} x \iff x \geq 0 \\ -x \iff x < 0 \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$|x| = |-x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$|x| \geq 0 \iff \forall x \in \mathbb{R}$

$|x| = 0 \iff x = 0$

$|x| = \sqrt{x^2}$

$$|P(x)| \leq a \Rightarrow \begin{cases} P(x) \leq a \iff -a \leq P(x) \leq a \\ P(x) \geq -a \iff P(x) \leq -a \vee P(x) \geq a \end{cases}$$

$|P(x)| \geq a \Rightarrow P(x) \geq a \cup P(x) \leq -a$

$|x+y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

$||x| - |y|| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

$|x-y| \leq |x-z| + |z-y| \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad \forall x, y \in R$ et $y \neq 0$

Parte principale

$Lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g^\alpha(x)} = \ell \Rightarrow$ parte principale di $f(x)$ è:

$P.P.f(x) = \ell g^\alpha(x)$

Continuità e discontinuità

Sia c un elemento dell'insieme S. Si dice che la funzione *f*: S→R è <u>continua in c</u> se c è isolato (ossia non è di accumulazione per S) o se, essendo c di accumulazione per S, risulta che il valore della funzione *f*(c) è uguale al valore finito del limite per x che tende a c. Si dice che una funzione *f*: S→R è <u>continua in S</u> se è continua per ogni x appartenente ad S.

La definizione di continuità per una funzione *f* viene data solo per i punti del suo dominio S; quella di discontinuità viene di solito data, per certi versi impropriamente, anche per i punti di accumulazione di S che non gli appartengono.

Poiché la definizione di continuità in un punto c richiede che si verifichino tre condizioni:

1)*f* sia definita in c;
2)*f* ammetta lim finito per x che tende a c;
3)il valore del limite sia uguale a quello della funzione;

si parla in generale di <u>punto di discontinuità</u> se in c viene meno una di queste condizioni, cioè se in c *f* non è definita, se il limite non esiste o è infinito, se *f*(c) e il limite finito sono diversi.

Se per x che tende a c il lim non esiste (perché i limiti destro e sinistro sono finiti ma diversi) si dice che in c la funzione *f* ha una <u>discontinuità a salto</u>.

Se per x che tende a c esiste finito il lim L, ma in c la funzione *f* non è definita, si dice che *f* si può <u>prolungare per continuità</u> ponendo *f*(c)=L.

Se esistono sia il limite per x che tende a c, sia il valore della funzione *f*(c), ma sono diversi tra loro, si dice che in c la funzione *f* presenta una <u>discontinuità eliminabile</u> ponendo *f*(c)=L.

Uniforme continuità

$$\left.\begin{array}{l} f(x): A \subseteq \Re \to \Re \\ c \in A \end{array}\right\} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_{(\varepsilon)} / \text{per } x_1, x_2 \in$$

$$\left]c - \frac{\delta}{2}, c + \frac{\delta}{2}\right[\Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Per Heine-Cantor ogni funzione reale continua in un intervallo chiuso e limitato (cioè compatto) è uniformemente continua.

Punti particolari

- Angoloso: $f'(x_{0^-}) \neq f'(x_{0^+}) \in \Re$
- Cuspidale: $f'(x_{0^-}) = -f'(x_{0^+}) = \pm\infty$
- A tangente verticale: $f'(x_{0^-}) = f'(x_{0^+}) = \pm\infty$
- "Brutti": $f'(x_{0^-}); f'(x_{0^+}) = N.E.$

Lipschtzianità

$f(x)$ è lipsc. se $\exists\, \mathrm{k} > 0 / |f(x_1) - f(x_2)| \leq \mathrm{k}|x_1 - x_2|$

cioè $Lim_{x \to +\infty} f'(x) = \ell$

Una funzione Lipschitziana è uniformemente continua, ma non è vero il contrario. Tutte le funzioni continue e con asintoto obliquo sono uniformemente continue.

Tipi di funzioni

<u>Iniettiva</u>: ad elementi distinti corrispondono elementi distinti.

<u>Surgettiva</u>: ogni elemento del condominio è immagine di almeno un elemento del dominio.

<u>Biunivoca</u>: iniettiva + surgettiva.

Teorema di Rolle

$$\left.\begin{array}{l} f(x): [a,b] \to \Re \\ f(x) \text{ continua } [a,b] \\ f(x) \text{ derivabile in }]a,b[\end{array}\right\} f(a) = f(b) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists \xi > 0 \,/\, f'(\xi) = 0$ (ξ è un max. o un min.)

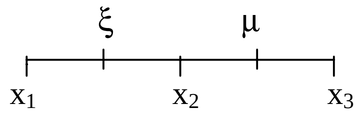
Applicazioni del teorema di Rolle

$$P(x) = x^n + ax + b \Rightarrow \begin{cases} \text{n pari} \Rightarrow \text{max. 2 radici reali} \\ \text{n dispari} \Rightarrow \text{max. 3 radici reali} \end{cases}$$

si considera la derivata prima:

$$P'(x) = nx^{n-1} + a \Rightarrow P'(x) = 0 \Leftrightarrow x^{n-1} = -\frac{a}{n}$$

•n pari $\Rightarrow$ (n-1) dispari $\Rightarrow$ $x = \sqrt[n-1]{-\frac{a}{n}} \Rightarrow$ P'(x) ammette una sola radice reale*. Infatti, supponendo che n sia pari, per assurdo si ipotizza che P(x) ammetta 3 radici reali distinte: x_1, x_2 e $x_3 \Rightarrow P(x_1) = P(x_2) = P(x_3) = 0$ per cui, secondo il teorema di Rolle esistono due valori ξ e μ tali che $P'(\xi) = P'(\mu) = 0$.



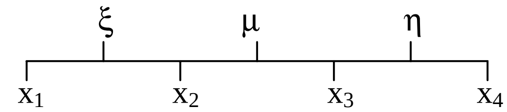
$P(x_1)=0$ $P(x_2)=0$ $P(x_3)=0$

Ciò significa che la derivata prima del polinomio ammetterà 2 radici reali, ma è impossibile per quanto precedentemente dimostrato in *, quindi P(x) ammette al più 2 radici reali distinte.

•n dispari $\Rightarrow$ (n-1) pari $\Rightarrow$

$$\begin{cases} a > 0 \Rightarrow x = \sqrt[n-1]{-\frac{a}{n}} \Rightarrow \text{non } \exists \text{ radici di P'(x)} \\ a < 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt[n-1]{\frac{a}{n}} \Rightarrow \exists \text{ due radici di P'(x)**} \end{cases}$$

Supponendo che n sia dispari, per assurdo ipotizziamo che P(x) ammetta 4 radici reali distinte x_1, x_2, x_3 e x_4 $\Rightarrow P(x_1) = P(x_2) = P(x_3) = P(x_4) = 0$; per cui, per il teorema di Rolle, esistono 3 valori ξ, μ e η tali che $P'(\xi) = P'(\mu) = P'(\eta) = 0$.



$P(x_1)=0$ $P(x_2)=0$ $P(x_3)=0$ $P(x_4)=0$

Ciò significa che la derivata prima del polinomio ammetterà 3 radici reali, ma ciò è impossibile per quanto precedentemente dimostrato in **, quindi al più P(x) ammetterà 3 radici reali distinte.