Metodi di integrazione

1)Per **parti**: $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

2)**Sostituzioni goniometriche**:

A) $\int \Re(senx, \cos^2 x)\cos x dx = \int \Re(1-\cos^2 x, \cos x) dsenx$ (con t = senx)

B) $\int \Re(sen^2 x, \cos x) senx dx = -\int \Re(1-\cos^2 x, \cos x) d\cos x$ (con t = cosx)

C) $\int \Re(sen^2 x, \cos^2 x, senx\cos x)dx$

con $\left(dx = \frac{1}{1+t^2}dt \,;\, \tan x = t \,;\, \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \,;\, sen^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \,;\, senx\cos x = \frac{t}{1+t} \right)$

D)Trasformando ax^2+bx+c in una somma o differenza di quadrati. L'integrale $\int \Re(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ si riconduce a una delle seguenti forme:

- $\int \Re(x, \sqrt{a^2+x^2})dx$ $\left(\text{con } x = a\tan t \,;\, dx = \frac{a}{\cos^2 t}dt \,;\, \sqrt{a^2+x^2} = \frac{a}{\cos t}\right)$
- $\int \Re(x, \sqrt{x^2-a^2})dx$ $\left(\text{con } x = aSect \,;\, \sqrt{x^2-a^2} = a\tan t \,;\, dx = a\frac{sent}{\cos^2 t}dt\right)$
- $\int \Re(x, \sqrt{a^2-x^2})dx$ (con $x = asent \,;\, dx = a\cos tdt \,;\, \sqrt{a^2-x^2} = a\cos t$)

3)**Denominatore** con **delta negativo**:

Si cerca di ricondurre l'integrale alla forma: $\int \frac{f'x}{1+[fx]^2}dx$

Se è presente il numeratore si può usare la formula:

$$\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}dx = \frac{a}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2b-ap}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}$$

Se bisogna calcolare un integrale del tipo: $J_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}dx$ si può considerare l'integrale:

$J_1 = \int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + c$ ed applicare la formula $J_{n+1} = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}J_n$

4)Funzioni **razionali** $\frac{N(x)}{D(x)}$:

A) $\begin{cases} \text{improprie} \\ \text{grado } N(x) \geq \text{grado } D(x) \end{cases} \Rightarrow \frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$ fino a quando grado $N(x) <$ grado $D(x)$

B) $\begin{cases} \text{proprie} \\ \text{grado } N(x) < \text{grado } D(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ \Delta > 0 \\ \bullet\ \Delta = 0 \\ \bullet\ \Delta < 0 \end{cases}$

$\bullet\ \Delta > 0 \begin{cases} 1° \text{ caso} \\ 2° \text{ caso} \\ 3° \text{ caso} \\ 4° \text{ caso} \end{cases}$

$$1^\circ \text{ caso - radici reali e distinte:} \begin{cases} \displaystyle\int \frac{2x-3}{x^2-x-2}dx \\ x^2-x-2=(x+1)(x-2) \\ \displaystyle\frac{2x-3}{x^2-x-2}=\frac{A}{(x+1)}+\frac{B}{(x-2)} \end{cases}$$

$$2^\circ \text{ caso - radici reali e multiple:} \begin{cases} \displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x-2)^2}dx \\ \displaystyle\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{(x+1)}+\frac{B}{(x-2)}+\frac{C}{(x-2)^2} \end{cases}$$

$$3^\circ \text{ caso - radici complesse semplici:} \begin{cases} \displaystyle\int \frac{2x+10}{(x-2)(x^2+x+1)}dx \\ \displaystyle\frac{2x+10}{(x-2)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{(x^2+x+1)} \end{cases}$$

$$4^\circ \text{ caso - radici complesse multiple:} \begin{cases} \displaystyle\int \frac{x^6}{(x^2+1)^4}dx \\ \displaystyle\frac{x^6}{(x^2+1)^4}=\frac{A_1x+B_1}{x^2+1}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+1)^2}+\frac{A_3x+B_3}{(x^2+1)^3} \end{cases}$$

$\bullet\ \Delta = 0 \Rightarrow \text{XXX}$

$$\bullet\ \Delta<0 \Rightarrow \int \frac{N(x)}{(x^2+px+q)^\nu}dx \begin{cases} \left.\begin{cases} \displaystyle\frac{\Delta}{4}=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q<0 \\ \alpha=\displaystyle\frac{p}{2} \\ \beta=-\displaystyle\frac{\Delta}{4}=q-\left(\frac{p}{2}\right)^2>0 \end{cases}\right\} \Rightarrow (x^2+px+q)^\nu=(x+\alpha)^2+\beta \Rightarrow \\ \Rightarrow \left.\begin{cases} \text{si divide il den. per } \beta \\ t=\displaystyle\frac{x+\alpha}{\sqrt{\beta}} \end{cases}\right\} \Rightarrow = \displaystyle\int \frac{N(x)}{\left[(x+\alpha)^2+\beta\right]^\nu}dx \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ \nu=1 \\ \bullet\ \nu\neq 1 \end{cases} \\ \bullet\ \nu=1 \left.\begin{cases} x=t\sqrt{\beta}-\alpha \\ dx=\sqrt{\beta}dt \end{cases}\right\} \Rightarrow = \begin{cases} \displaystyle\frac{1}{\sqrt{\beta}}\int\frac{at+b}{t^2+1}dt=\frac{a}{\sqrt{\beta}}\int\frac{t}{t^2+1}dt+\frac{b}{\sqrt{\beta}}\int\frac{1}{t^2+1}dt= \\ =\displaystyle\frac{a}{\sqrt{\beta}}Ln(t^2+1)+\frac{b}{\sqrt{\beta}}Arctg(t)+c \end{cases} \\ \bullet\ \nu=1 \Rightarrow \text{XXX} \end{cases}$$

5)Funzioni **irrazionali**:

$$\text{A)}\int f(x^{r_1},x^{r_2},..,x^{r_k})dx \left.\begin{cases} r_1=\displaystyle\frac{m_1}{q_1},\ ...,r_k=\frac{m_k}{q_k} \text{ esponenti razionali} \\ k \text{ numero delle variabili} \\ n=\text{minimo comun denominatore di } (q_1,q_2,...,q_k) \\ x=t^n \end{cases}\right\} \Rightarrow = n\int f(t^{m_1},..,t^{m_k})t^{n-1}dt$$

$$\text{B)}\int f(x,\sqrt[n]{ax+b})dx\left\{\begin{array}{l} t=\sqrt[n]{ax+b}\\ x=\dfrac{t^{n}-b}{a}\\ dx=\dfrac{nt^{n-1}}{a}dt \end{array}\right\}\Rightarrow=\frac{n}{a}\int f\left(\frac{t^{n}-b}{a},t\right)t^{n-1}dt$$

$$\text{C)}\int f\left(x,\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx\left\{\begin{array}{l} a\cdot d-b\cdot c\neq 0\\ t=\sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\\ x=\dfrac{d\cdot t^{n}-b}{a-c\cdot t^{n}}\\ dx=\dfrac{n(a\cdot d-b\cdot c)t^{n-1}}{(a-c\cdot t^{n})^{2}}dt \end{array}\right\}\Rightarrow=\text{A)}$$

$$\text{D)}\int f(x,\sqrt{ax^{2}+bx+c})dx\left\{\begin{array}{l}
\bullet\ a<0\Rightarrow\ \Delta>0\left\{\begin{array}{l}
\alpha<\ \beta \text{ radici reali e distinte del trinomio}\\
=\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta}=\sqrt{-a(x-\alpha)(\beta-x)}=(x-\alpha)\sqrt{-a}\sqrt{\dfrac{\beta-x}{x-\alpha}}\\
\left.\begin{array}{l} t=\sqrt{\dfrac{\beta\text{-}x}{x-\alpha}}\\ x=\dfrac{\beta-\alpha t^{2}}{1+t^{2}}\end{array}\right\}\Rightarrow\\
\Rightarrow t(x-\alpha)\sqrt{-a}=t\sqrt{-a}\left(\dfrac{\beta-\alpha t^{2}}{1+t^{2}}-\alpha\right)=t\sqrt{-a}\left(\dfrac{\beta-\alpha}{1+t^{2}}\right)
\end{array}\right.\\
\bullet\ a=0\Rightarrow \text{si ricade nel caso 2}\\
\bullet\ a>0\ \Rightarrow\ \Delta<0\left\{\begin{array}{l}
ax^{2}+bx+c=(x\sqrt{a}+t)^{2}\Rightarrow\sqrt{ax^{2}+bx+c}=x\sqrt{a}+t\\
x=\dfrac{c-t^{2}}{2t\sqrt{a}-b}\\
=\sqrt{a}\,\dfrac{c-t^{2}}{2t\sqrt{a}-b}+t
\end{array}\right.
\end{array}\right.$$

6)Funzioni **trascendenti**:

$$\text{A)}\int f(e^{x})dx\left\{\begin{array}{l} t=e^{x}\\ x=Ln(t)\\ dx=\dfrac{1}{t}dt \end{array}\right\}\Rightarrow=\int f(t)\frac{1}{t}dt$$

B) $\int f(Sinx, Cosx)dx \left\{ \begin{array}{l} dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt \\ t = Tg\left(\dfrac{x}{2}\right) \\ Sinx = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ Cosx = \dfrac{1\text{-}t^2}{1+t^2} \end{array} \right\} \Rightarrow = \int f\left(\dfrac{2t}{1+t^2}, \dfrac{1\text{-}t^2}{1+t^2}\right)\dfrac{2}{1+t^2}dt$

C) $\int f(Sin^2x, Cos^2x, SinxCosx, Tgx)dx \left\{ \begin{array}{l} t = Tgx \\ Sin^2x = \dfrac{t^2}{1+t^2} \\ Cos^2x = \dfrac{1}{1+t^2} \\ SinxCosx = \dfrac{t}{1+t^2} \end{array} \right\} \Rightarrow = \int f\left(\dfrac{t^2}{1+t^2}, \dfrac{1}{1+t^2}, \dfrac{t}{1+t^2}, t\right)dx$

7)**Criterio** del **confronto**: $f(x) \le g(x) \Rightarrow \begin{cases} \text{f(x) converge} \Leftrightarrow \text{g(x) converge} \\ \text{g(x) diverge} \Leftrightarrow \text{f(x) diverge} \end{cases}$

8)**Criterio asintotico** ($\int_a^b f(x)dx$, con a, b $\in$ R):

$$\begin{cases} \bullet\ a \text{ è singolare}: Lim_{x\to a^+} \int_x^b \dfrac{f(x)}{g(x)}dx \left(\text{con } g(x) = \dfrac{1}{(x-a)^\alpha}\right) \\ \bullet\ b \text{ è singolare}: Lim_{x\to b^-} \int_a^x \dfrac{f(x)}{g(x)}dx \left(\text{con } g(x) = \dfrac{1}{(b-x)^\alpha}\right) \\ \text{In entrambi i casi tale limite deve essere finito e} \ne 0 \text{ e l'integrale di partenza}: \begin{cases} \text{Converge se } 0 \le \alpha \le 1 \\ \text{Diverge se } \alpha > 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bullet\ a = -\infty: Lim_{x\to -\infty} \int_x^b \dfrac{f(x)}{g(x)}dx \left(\text{con } g(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}\right) \\ \bullet\ b = +\infty: Lim_{x\to +\infty} \int_x^b \dfrac{f(x)}{g(x)}dx \left(\text{con } g(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}\right) \\ \text{In entrambi i casi tale limite deve essere finito e} \ne 0 \text{ e l'integrale di partenza}: \begin{cases} \text{Converge se } \alpha > 1 \\ \text{Diverge se } 0 \le \alpha \le 1 \end{cases} \end{cases}$$

9)**Studio** di **funzioni integrali** $F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)dt$:

A)Studio completo di h(t);
B)Determinare il dominio di F(x) in base al dominio di h(t);

C)Controllo della convergenza agli estremi del dominio di F(x) e nei punti di discontinuità di h(t), mediante un criterio: $\begin{cases} Lim_{t \to t_0} h(t) = \ell \in \Re \Rightarrow F(x) \text{ converge} \\ \\ Lim_{t \to +\infty} h(t) = \ell \in \Re \Rightarrow \text{controllare se} \begin{cases} \text{F(x)} \\ \text{F(x) è definita a} + \infty \end{cases} \end{cases}$;

D)Studiare F'(x)=h(t) per la crescenza e determinare max. e min. e se…tramite il grafico di h(t);

E)Studiare F''(x)=h'(t) per la concavità e determinare i punti di flesso mediante i max. e i min. di h(t);

F)Disegnare il grafico di F(x);