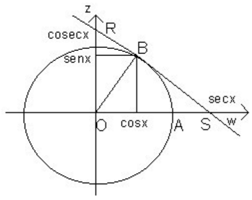
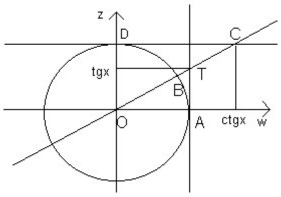
Trigonometria

Definizioni:

Seno di x è l'ordinata del punto B. Coseno di x è l'ascissa del punto B. Tangente di x è l'ordinata del punto T. Cotangente di x è l'ascissa del punto C. Secante di x è l'ascissa del punto S. Cosecante di x è l'ordinata del punto R.

L'inversa del seno ristretto all'intervallo [-π/2, π/2] è l'arcoseno, che ad ogni x reale tale che -1<x<1 associa l'arco il cui seno vale x. L'inversa del coseno ristretto all'intervallo [0, π] è l'arcocoseno, che ad ogni x reale tale che -1<x<1 associa l'arco il cui coseno vale x. L'inversa della tangente ristretta all'intervallo]-π /2, π/2[è l'arcotangente, che ad ogni x reale associa l'arco la cui tangente vale x.





Periodicità:

Seno, coseno, secante e cosecante = 2π
Tangente e cotangente = π

Relazioni:

$$Sin^2(a)+Cos^2(a)=1$$

$$Sin(a)=\pm\sqrt{1-Cos^2(a)}$$

$$Cos(a)=\pm\sqrt{1-Sin^2(a)}$$

$$|Sin(a)|=|Cos(a)|\leq 1 \quad \forall a\in\mathbb{R}$$

$$Sin(a)=Cos(a)<a \quad \forall a\in\mathbb{R}$$

$$Sin(a)\leq a\leq Tg(a) \quad \forall 0<|a|<\frac{\pi}{2}$$

$$|Sin(b)-Sin(a)|\leq|b-a| \quad \forall a,b\in\mathbb{R}$$

$Sin(-a)=-Sin(a) \;\Rightarrow\; Sin(a)$ è dispari

$$Sin(\pi-a)=Sin(a)$$

$$Sin(\pi+a)=-Sin(a)$$

$$Sin(2\pi-a)=-Sin(a)$$

$$Sin(x)=Cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$Cos(-a)=Cos(a) \;\Rightarrow\; Cos(a)$ è pari

$$Cos(\pi-a)=-Cos(a)$$

$$Cos(\pi+a)=-Cos(a)$$

$$Cos(2\pi-a)=Cos(a)$$

$$Cos(x)=Sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$Tg(-a)=-Tg(a) \;\Rightarrow\; Tg(a)$ è dispari

$$Tg(\pi-a)=-Tg(a)$$

$$Tg(\pi+a)=Tg(a)$$

$$ArcSin(a)+ArcCos(a)=\frac{\pi}{2}$$

$$ArcTg(a)+ArcCtg(a)=\frac{\pi}{2}$$

Formule di **addizione**:

$$Sin(a+b)=Sin(a)Cos(b)+Sin(b)Cos(a)$$

$$Cos(a+b)=Cos(a)Cos(b)-Sin(a)Sin(b)$$

$$Tg(a+b)=\frac{Tg(a)+Tg(b)}{1-Tg(a)Tg(b)} \quad \forall(a+b)\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$$

Formule di **sottrazione**:

$$Sin(a-b)=Sin(a)Cos(b)-Sin(b)Cos(a)$$

$$Cos(a-b)=Cos(a)Cos(b)+Sin(a)Sin(b)$$

$$Tg(a-b)=\frac{Tg(a)-Tg(b)}{1+Tg(a)Tg(b)} \quad \forall(a-b)\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$$

Formule di **duplicazione**:

$$Sin(2a)=2Sin(a)Cos(a)$$

$$Cos(2a)=Cos^2(a)-Sin^2(a)=1-2Sin^2(a)=$$
$$=2Cos^2(a)-1$$

$$Tg(2a)=\frac{2Tg(a)}{1-Tg^2(a)}$$

Formule di **triplicazione**:

$$Sin(3a)=3Sin(a)-4Sin^3(a)$$

$$Cos(3a)=4Cos^3(a)-3Cos(a)$$

$$Tg(3a)=\frac{3Tg(a)-Tg^3(a)}{1-3Tg^2(a)}$$

Formule di **bisezione**:

$$Sin\left(\frac{a}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-Cos(a)}{2}}$$

$$Cos\left(\frac{a}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+Cos(a)}{2}}$$

$$Tg\left(\frac{a}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-Cos(a)}{1+Cos(a)}}=\frac{Sin(a)}{1+Cos(a)}=\frac{1-Cos(a)}{Sin(a)}$$

Formule di **Prostaferesi**:

$$Sin(a)+Sin(b)=2Sin\left(\frac{a+b}{2}\right)Cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$Sin(a)-Sin(b)=2Cos\left(\frac{a+b}{2}\right)Sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$Cos(a)+Cos(b)=2Cos\left(\frac{a+b}{2}\right)Cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$Cos(a)-Cos(b)=-2Sin\left(\frac{a+b}{2}\right)Sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Formule di **Werner**:

$$Sin(a)Sin(b)=\frac{1}{2}\left[Cos(a-b)-Cos(a+b)\right]$$
$$Cos(a)Cos(b)=\frac{1}{2}\left[Cos(a+b)+Cos(a-b)\right]$$
$$Sin(a)Cos(b)=\frac{1}{2}\left[Sin(a+b)+Sin(a-b)\right]$$

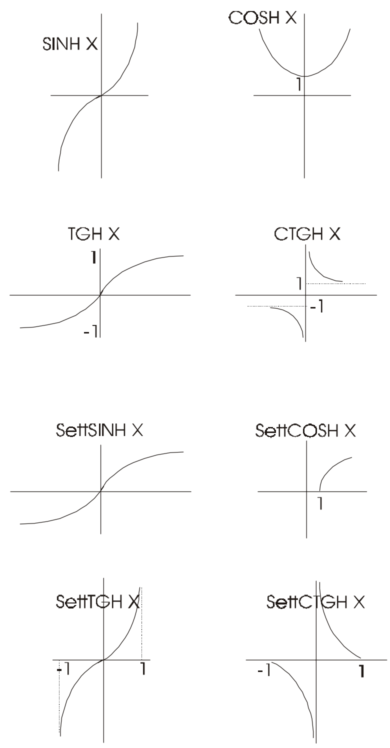
Formule **parametriche**:

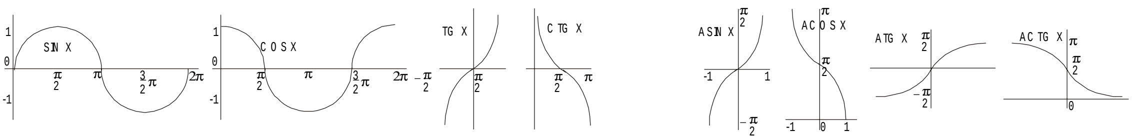
$$\left.\begin{array}{l} Sin(a)=\dfrac{2t}{1+t^2} \\ Cos(a)=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ Tg(a)=\dfrac{2t}{1-t^2} \end{array}\right\} \forall\, t=Tg\left(\frac{a}{2}\right)$$

Funzioni **iperboliche**:

$$Cosh^2(x)-Sinh^2(x)=1$$
$$Sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{e^{2x}-1}{2e^x}\ :\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$Cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\frac{e^{2x}+1}{2e^x}\ :\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$Tgh(x)=\frac{Sinh(x)}{Cosh(x)}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\ :\mathbb{R}\to\left]-1,1\right[$$
$$Ctgh(x)=\frac{Cosh(x)}{Sinh(x)}=\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\ :\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}-[-1,1]$$
$$SettSinh(x)=Ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\ :\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$SettCosh(x)=Ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\ :[0,+\infty)\to\left[1,+\infty\right[$$
$$SettTgh(x)=\frac{1}{2}Ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right):\ \left]-1,1\right[\to\mathbb{R}$$
$$SettCtgh(x)=\frac{1}{2}Ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right):\mathbb{R}-[-1,1]\to\mathbb{R}-\{0\}$$
$$e^x=Cosh(x)+Sinh(x)$$
$$e^{-x}=Cosh(x)-Sinh(x)$$

$$Cosh(a)=1+2Sinh\left(\frac{a}{2}\right)=2Cosh^2\left(\frac{a}{2}\right)-1$$
$$Sinh(a+b)=Sinh(a)Cosh(b)+Cosh(a)Sinh(b)$$
$$Cosh(a+b)=Cosh(a)Cosh(b)+Sinh(a)Sinh(b)$$
$$Sinh(2a)=2Sinh(a)Cosh(a)$$
$$Cosh(2a)=Cosh^2(a)+Sinh^2(a)$$





VALORI DELLE FUNZIONI *sin*, *cos* E *tan* DI ALCUNI ANGOLI PARTICOLARI

gradi	radianti	*sin*	*cos*	*tan*
0°	0	0	1	0
9°	$\frac{\pi}{20}$	$\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$
15°	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$
18°	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$
22° 30'	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}-1$
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
36°	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
54°	$\frac{3}{10}\pi$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
67° 30'	$\frac{3}{8}\pi$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}+1$
72°	$\frac{2}{5}\pi$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
75°	$\frac{5}{12}\pi$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$
81°	$\frac{9}{20}\pi$	$\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	non definita