# Serie

**Esempi** di serie:

- telescopica: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$
- geometrica: $\sum_{n=0}^{+\infty} ax^n \begin{cases} |x|<1 \to \frac{a}{1-x} \\ x \le -1 \to \text{indeterminata} \\ x \ge 1 \begin{cases} a>0 \to +\infty \\ a<0 \to -\infty \end{cases} \end{cases}$
- armonica: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \to +\infty$
- armonica generalizzata: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \alpha > 1 \to \text{converge} \\ 0<\alpha \le 1 \to \text{diverge a} +\infty \\ \alpha < 0 \to \text{diverge a} +\infty \end{cases}$
- armonica a segni alterni: $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \to \text{converge}$
- $1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \to \text{diverge}$
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{Ln(n+1)} \to +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \to +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+a_n} \to +\infty$
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \to \text{converge con somma} = 2$
- $\sum_{n=0}^{+\infty} n \cdot x^n \begin{cases} x \ge 1 \Rightarrow \text{diverge a} +\infty \\ |x|<1 \Rightarrow \text{converge a } \frac{x}{(1-x)^2} \\ x \le -1 \Rightarrow \text{indeterminata} \end{cases}$
- $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = \frac{2^{n+1}-n-2}{2^n}$
- $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{3k^2} \ge \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to +\infty$

**A)** Serie $\begin{cases} a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{termini positivi} \\ a_n \ge 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{termini non negativi} \end{cases}$

1) Criterio del **confronto**: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \, , \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \begin{cases} a_n \le b_n \Rightarrow \begin{cases} b_n \text{ converge} \Rightarrow a_n \text{ converge} \\ a_n \text{ diverge} \Rightarrow b_n \text{ diverge} \end{cases} \\ a_n \ge b_n \Rightarrow \begin{cases} b_n \text{ diverge} \Rightarrow a_n \text{ diverge} \\ a_n \text{ converge} \Rightarrow b_n \text{ converge} \end{cases} \end{cases} \forall n \in \mathbb{N}$

2) Criterio **asintotico**: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} \ell = 0 \text{ et } \alpha > 1 \Rightarrow \text{converge} \\ \ell > 0 \text{ et} \begin{cases} \alpha > 1 \Rightarrow \text{converge a } -\frac{1}{1-\alpha} \\ 0 < \alpha \le 1 \Rightarrow \text{diverge a } +\infty \end{cases} \\ +\infty \text{ et } 0<\alpha \le 1 \Rightarrow \text{diverge} \end{cases}$ con $\frac{a_n}{b_n} = n^\alpha \cdot a_n = \frac{a_n}{\frac{1}{n^\alpha}}$

3) Criterio della **radice**: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \ell > 1 \Rightarrow \text{diverge a } +\infty \\ \ell = 1 \Rightarrow \text{nulla si può dire} \\ \ell < 1 \Rightarrow \text{converge} \end{cases} \forall \begin{cases} n \in \mathbb{N}; \\ \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ a termini non negativi;} \end{cases}$

4)Criterio del **rapporto**: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\begin{cases}\ell>1\Rightarrow \text{diverge a } +\infty\\ \ell=1\Rightarrow \text{nulla si può dire}\\ \ell<1\Rightarrow \text{converge}\end{cases}\ \forall n\in\mathbb{N}$

5)Criterio di **condensazione di Cauchy** $\left(\text{ad es.: } \dfrac{1}{n\cdot\ln(n)};\ \dfrac{1}{[\ln(n)]^\alpha};\ \dfrac{1}{n\cdot[\ln(n)]^\alpha};\ \dfrac{1}{n^\alpha};\right)$:

$$\begin{cases}a_n\to 0\\ a_n \text{ termini positivi}\\ a_n \text{ decrescente}\end{cases}\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}a_n \text{ ha lo stesso carattere di } \sum_{n=1}^{+\infty}2^n\ a_{2^n}$$

6)Criterio **integrale**: $\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty} f(x)=0\\ f(x) \text{ decrescente}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n \text{ converge}\Leftrightarrow \exists\int_1^{+\infty}f(x)\,dx \text{ converge}\\ \sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n \text{ diverge}\Leftrightarrow \text{non }\exists\int_1^{+\infty}f(x)\,dx\end{cases}$

**B)**Serie a <u>segni alterni</u>: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$

1)Criterio di **Leibniz**: $\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0\\ a_n \text{ decrescente}\end{cases}\Rightarrow a_n$ converge; ed inoltre $\begin{cases}S_{2n}\le S\le S_{2n+1}\\ |S-S_n|\le a_{n+1}\end{cases}\ \forall n\in\mathbb{N}$

2)Criterio di **Dirichlet**: $\begin{cases}a_n>0\ \forall n\in\mathbb{N}\\ a_n\to 0 \text{ non crescendo}\\ S_n \text{di } \sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n \text{ sono limitate}\end{cases}\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$ è convergente

**C)**Serie <u>a segni qualsiasi</u>: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ è convergente $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ è convergente

osservazione: l'assoluta convergenza di una serie implica la convergenza semplice (ma non il contrario); essa si riconduce ad una serie a termini positivi.

**D)**<u>Operazioni</u>:

1)Somma: $\begin{cases}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n \text{ converge con somma } S\\ \sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n \text{ converge con somma } P\end{cases}\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n+b_n)$ converge con somma $(S+P)$

2)Prodotto secondo Cauchy:

$$\begin{cases}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n \text{ converge assolutamente con somma } S\\ \sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n \text{ converge con somma } P\end{cases}\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}(a_kb_{n-k+1}) \text{ converge con somma } (S\cdot P)$$