

Logica enunciativa

Connettivi:

Connettivo	Simbolo	Definizione
Negazione logica	\neg	Si dice negazione di un enunciato X e si indica con $\neg X$, quell'enunciato che è falso se X è vero e vero se X è falso.
Congiunzione logica	\wedge	Si dice congiunzione di due enunciati X e Y e si indica con $X \wedge Y$, l'enunciato che è vero se e solo se X e Y sono entrambi veri.
Disgiunzione logica	\vee	Si dice disgiunzione di due enunciati X e Y e si indica con $X \vee Y$, l'enunciato che è vero se almeno uno dei due enunciati X e Y è vero.
Implicazione logica (materiale)	\Rightarrow	Si dice implicazione di due enunciati X e Y e si indica con $X \Rightarrow Y$ ¹ , l'enunciato che è falso solo nel caso in cui X è vero e Y è falso.
Coimplicazione logica (materiale)	\Leftrightarrow	Si dice coimplicazione di due enunciati X e Y e si indica con $X \Leftrightarrow Y$, l'enunciato che è vero se X e Y sono entrambi veri o entrambi falsi.

Regole di semplificazione:

Connettivi	fbf	sostituzione
Negazione	$\neg \neg P$	P
	$\neg V$	F
	$\neg F$	V
Congiunzione	$V \wedge Q$	Q
	$P \wedge V$	P
	$F \wedge Q$	F
	$P \wedge F$	F
	$P \wedge P$	P
	$P \wedge \neg P$	F
	$\neg P \wedge P$	F
Disgiunzione	$V \vee Q$	V
	$P \vee V$	V
	$F \vee Q$	Q
	$P \vee F$	P
	$P \vee P$	P
	$P \vee \neg P$	V
	$\neg P \vee P$	V
Implicazione	$V \Rightarrow Q$	Q
	$P \Rightarrow V$	V
	$F \Rightarrow Q$	V
	$P \Rightarrow F$	$\neg P$
	$P \Rightarrow P$	V
	$P \Rightarrow \neg P$	$\neg P$
	$\neg P \Rightarrow P$	P
Coimplicazione	$V \Leftrightarrow Q$	Q
	$P \Leftrightarrow V$	P
	$F \Leftrightarrow Q$	$\neg Q$
	$P \Leftrightarrow F$	$\neg P$
	$P \Leftrightarrow P$	V
	$P \Leftrightarrow \neg P$	F
	$\neg P \Leftrightarrow P$	F

¹ - L'enunciato X è chiamato antecedente, mentre Y è detto coseguente.

Tautologie (schemi di ragionamento):

- 1) $X \Rightarrow X$
- 2) $\neg(X \wedge \neg X)$
- 3) $X \vee \neg X$
- 4) $X \Leftrightarrow \neg\neg X$
- 5) $(X \wedge X) \Leftrightarrow X$
- 6) $(X \vee X) \Leftrightarrow X$
- 7) $(X \wedge Y) \Leftrightarrow (Y \wedge X)$
- 8) $(X \vee Y) \Leftrightarrow (Y \vee X)$
- 9) $(X \wedge Y) \wedge Z \Leftrightarrow X \wedge (Y \wedge Z)$
- 10) $(X \vee Y) \vee Z \Leftrightarrow X \vee (Y \vee Z)$
- 11) $X \wedge (Y \vee Z) \Leftrightarrow (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$
- 12) $X \vee (Y \wedge Z) \Leftrightarrow (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$
- 13) $\neg(X \wedge Y) \Leftrightarrow \neg X \vee \neg Y$
- 14) $\neg(X \vee Y) \Leftrightarrow \neg X \wedge \neg Y$
- 15) $X \wedge Y \Leftrightarrow \neg(\neg X \vee \neg Y)$
- 16) $X \vee Y \Leftrightarrow \neg(\neg X \wedge \neg Y)$
- 17) $(X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow (\neg X \vee Y)$
- 18) $(X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow \neg(X \wedge \neg Y)$
- 19) $X \Rightarrow (X \Rightarrow Y)$
- 20) $X \Rightarrow (Y \Rightarrow X)$
- 21) $((X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow Z)) \Rightarrow (X \Rightarrow Z)$
- 22) $(X \Rightarrow Y) \Rightarrow ((Y \Rightarrow Z) \Rightarrow (X \Rightarrow Z))$
- 23) $((X \vee Y) \wedge (\neg Y)) \Rightarrow X$
- 24) $(X \Rightarrow Y) \Rightarrow (\neg Y \Rightarrow \neg X)$
- 25) $(\neg X \Rightarrow X) \Rightarrow X$
- 26) $(X \Rightarrow \neg X) \Rightarrow \neg X$
- 27) $(X \Rightarrow (Y \wedge \neg Y)) \Rightarrow \neg X$
- 28) $(\neg X \Rightarrow (Y \wedge \neg Y)) \Rightarrow X$
- 29) $((X \wedge \neg Y) \Rightarrow (Z \wedge \neg Z)) \Rightarrow (X \Rightarrow Y)$
- 30) $((X \wedge \neg Y) \Rightarrow Y) \Rightarrow (X \Rightarrow Y)$
- 31) $((X \wedge \neg Y) \Rightarrow \neg X) \Rightarrow (X \Rightarrow Y)$
- 32) $((X \Rightarrow Y) \wedge (Z \Rightarrow T)) \Rightarrow ((X \wedge Z) \Rightarrow (Y \wedge T))$
- 33) $(X \Leftrightarrow Y) \Leftrightarrow ((X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y)) \Leftrightarrow ((X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X)) \Leftrightarrow (\neg(\neg(X \Rightarrow Y) \vee \neg(Y \Rightarrow X))) \Leftrightarrow (\neg(\neg(\neg X \vee Y) \vee \neg(\neg Y \vee X)))$
- 34) $(X \uparrow Y \uparrow Z) \Leftrightarrow (X \Rightarrow Y) \wedge (\neg X \Rightarrow Z) \Leftrightarrow \neg(\neg(\neg X \vee Y) \vee \neg(X \vee Z))$
- 35) $(X \wedge Y) \Leftrightarrow (X \uparrow Y \uparrow X)$
- 36) $(X \downarrow Y) \Leftrightarrow \neg(X \vee Y)$
- 37) $(X \mid Y) \Leftrightarrow (\neg X \vee \neg Y)$

Formule normali congiuntive e disgiuntive:

Def.9- Una fbf si dice in *forma normale congiuntiva*, in breve FNC (*disgiuntiva*, FND), se è una congiunzione (disgiunzione) di uno o più congiunti (disgiunti) ciascuno dei quali è una disgiunzione (congiunzione) di letterali, cioè di formule atomiche o di negazioni di formule atomiche.

Per una FNC è facile assicurarsi se si tratta o meno di una tautologia, poiché una congiunzione è una tautologia se e solo se lo sono tutte le componenti.

Per una FND, invece, è facile accertare la soddisfacibilità o meno, dato che una disgiunzione è soddisfacibile (vera per qualche assegnazione di valori di verità) se lo è almeno una sua componente, quindi una FND è soddisfacibile se almeno un suo disgiunto non contiene una coppia complementare $X \wedge \neg X$,

Algoritmo di Fitting

I ridotti di una fbf di tipo α o β (rispettivamente congiunti e disgiunti) sono le fbf che compaiono nelle due colonne più a destra.

a	a₁	a₂
$X \wedge Y$	X	Y
$\neg(X \vee Y)$	$\neg X$	$\neg Y$
$\neg(X \Rightarrow Y)$	X	$\neg Y$

b	b₁	b₂
$X \vee Y$	X	Y
$\neg(X \wedge Y)$	$\neg X$	$\neg Y$
$X \Rightarrow Y$	$\neg X$	Y

Ogni fbf di tipo α è logicamente equivalente alla congiunzione dei suoi ridotti, mentre ogni fbf di tipo β è logicamente equivalente alla disgiunzione dei suoi ridotti. L'equivalenza è ovvia per le formule contenute nelle prime due righe di ogni tabella, per quelle contenute nelle altre righe basta ricordare le leggi di De Morgan e l'adeguatezza degli insiemi $K_2 = \{\neg, \wedge\}$ e $K_1 = \{\neg, \vee\}$.

Per descrivere l'algoritmo di Fitting usiamo la seguente notazione:

- 1) la fbf $((C_1 \wedge C_2) \wedge \dots \wedge C_{n-1}) \wedge C_n$, detta *congiunzione generalizzata* si indica con $\langle C_1, C_2, \dots, C_n \rangle$;
- 2) la fbf $((D_1 \vee D_2) \vee \dots \vee D_{n-1}) \vee D_n$, detta *disgiunzione generalizzata* si indica con $[D_1, D_2, \dots, D_n]$;

FNC $\langle [D_{11}, D_{12}, \dots, D_{1h}], \dots, [D_{n1}, D_{n2}, \dots, D_{nh}] \rangle$
 FND $\langle \langle C_{11}, C_{12}, \dots, C_{1h} \rangle, \dots, \langle C_{n1}, C_{n2}, \dots, C_{nh} \rangle \rangle$,

Algoritmo per FNC

- 1) K è una doppia negazione $\neg\neg H$, si sostituisce allora K con H nel congiunto in cui appare K, mentre si lasciano immutati gli altri congiunti;
- 2) K è di tipo β e i suoi ridotti sono K_1 e K_2 , in questo caso si sostituisce K con K_1, K_2 nel congiunto in cui appare K; gli altri congiunti restano immutati;
- 3) K è di tipo α e i suoi ridotti sono K_1 e K_2 , in questo caso si sostituisce K con due nuovi congiunti, nel primo congiunto K è sostituito da K_1 , nel secondo da K_2 , e in entrambi i casi gli altri disgiunti restano immutati; gli altri congiunti restano immutati.

Algoritmo per FND

- 1) K è una doppia negazione $\neg\neg H$, si sostituisce allora K con H nel disgiunto in cui appare K, mentre si lasciano immutati gli altri disgiunti;
- 2) K è di tipo α e i suoi ridotti sono K_1 e K_2 , in questo caso si sostituisce K con K_1, K_2 nel disgiunto in cui appare K; gli altri disgiunti restano immutati;
- 3) K è di tipo β e i suoi ridotti sono K_1 e K_2 , in questo caso si sostituisce K con due nuovi disgiunti, nel primo disgiunto K è sostituito da K_1 , nel secondo da K_2 , e in entrambi i casi gli altri congiunti restano immutati; gli altri disgiunti restano immutati.

Teoremi:

Teorema 1- Se X e Y sono enunciati, se $X \Rightarrow Y$ è una tautologia e X è una tautologia allora Y è una tautologia.

Dim.

Supponiamo che esista qualche assegnazione di valori di verità che renda falso Y, in tal caso l'implicazione $X \Rightarrow Y$ risulterebbe falsa contro l'ipotesi, dato che sempre per ipotesi X è sempre vero. Pertanto non può esistere una tale assegnazione, in altre parole Y risulta sempre vera, ossia è una tautologia.

Teorema 2- Sia X una tautologia con n componenti atomiche a_1, a_2, \dots, a_n .

Se X' è il risultato della sostituzione in X di ogni componente atomica a_i con un enunciato qualsiasi, e la

sostituzione è tale che ad ogni a_i venga sostituito sempre lo stesso enunciato, allora X' è una tautologia.

Dim.

X è una tautologia, cioè risulta vera per ogni assegnazione di valori di verità alle sue componenti atomiche. Consideriamo adesso X' , le sue componenti atomiche sono quelle degli enunciati Y_i sostituiti alle a_i . Ora per ogni assegnazione di valori di verità alle componenti atomiche di X' si ottiene un'assegnazione di valori di verità per gli enunciati Y_i , una tale assegnazione per gli Y_i deve coincidere con qualche assegnazione di valori di verità per le a_i e quindi determinare, per ipotesi, sempre il valore vero per X' , che risulta pertanto una tautologia.

Teorema 3- (Sostituibilità dell'equivalenza tautologica)

Se A e B sono enunciati tautologicamente equivalenti e se in un enunciato X una o più occorrenze di A vengono sostituite con B , l'enunciato X' che si ottiene è tautologicamente equivalente a X .

Dim.

Dato che $A \Leftrightarrow B$ è una tautologia, A e B assumono entrambi o valore V o valore F , quindi X e X' o sono entrambi veri o entrambi falsi, poiché X' differisce da X solo perché contiene B in tutti o in alcuni posti dove X contiene A , pertanto $X \Leftrightarrow X'$ è una tautologia.

Teorema 4- Ogni funzione di verità è espressa da un enunciato in cui occorrono i connettivi \neg , \wedge ed \vee , cioè $K = \{\neg, \wedge, \vee\}$ è un insieme adeguato di connettivi.

Dim.

Sia $f: E^n \rightarrow E$ una funzione di verità, come già detto f può essere rappresentata da una tavola di verità di 2^n righe, dove ciascuna riga rappresenta qualche assegnazione di valori di verità a_1, a_2, \dots, a_n seguita dal corrispondente valore $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_{n+1}$.

Per $1 \leq i \leq 2^n$ indichiamo con C_i la congiunzione $X_1^i \dot{\cup} X_2^i \dot{\cup} \dots \dot{\cup} X_n^i$ dove $X_j^i = X_j$ se nella riga i -esima a_j è V , mentre $X_j^i = \neg X_j$ se a_j è F (con $1 \leq j \leq n$).

Sia adesso D la disgiunzione di tutte quelle C_i , se esistono, tali che f ha il valore vero per la i -esima riga della tavola di verità. D esprime la funzione di verità f .

Infatti data un'assegnazione di valori di verità a X_1, X_2, \dots, X_n assumiamo che l'assegnazione corrispondente, a_1, a_2, \dots, a_n , sia la k -esima riga della tavola di verità che rappresenta f , allora per costruzione C_k ha il valore V per quest'assegnazione, mentre ogni altro C_i , con $i \neq k$, ha il valore F per la stessa assegnazione.

Se f ha il valore V alla riga k -esima, allora C_k è un disgiunto di D che per quest'assegnazione assumerà il valore V come f . Se invece f ha il valore F alla k -esima riga, C_k non è un disgiunto di D e poiché ogni C_i , con $i \neq k$, assume il valore F , tutti i disgiunti di D sono falsi e quindi anche D è falso per quest'assegnazione così come f .

Infine se f ha il valore F per ogni assegnazione di valori di verità alle a_i , una qualsiasi contraddizione, $A \wedge \neg A$, la esprimerà.

Corollario 1- Qualsiasi funzione di verità può essere espressa da un enunciato contenente come connettivi solo le coppie (\neg, \vee) , (\neg, \wedge) e (\neg, \Rightarrow) . Cioè gli insiemi: $K_1 = \{\neg, \vee\}$, $K_2 = \{\neg, \wedge\}$ e $K_3 = \{\neg, \Rightarrow\}$ sono adeguati.

Dim.

Dal teorema precedente si ha che l'insieme $K = \{\neg, \wedge, \vee\}$ è adeguato, inoltre si è già visto che l'enunciato $X \wedge Y$ è logicamente equivalente all'enunciato $\neg(\neg X \vee \neg Y)$. Per il **Teorema 3**, allora qualsiasi enunciato contenente soltanto i connettivi \neg, \wedge e \vee è logicamente equivalente ad un enunciato contenente solo \neg ed \vee , ottenuto sostituendo tutte le congiunzioni $X \wedge Y$ con $\neg(\neg X \vee \neg Y)$, pertanto l'insieme K_1 è adeguato dato che lo è K .

Analogamente dalla tautologia: $(X \vee Y) \Leftrightarrow \neg(\neg X \wedge \neg Y)$ si ha che K_2 è adeguato, mentre l'adeguatezza di K_3 segue dalle seguenti tautologie:

$(X \vee Y) \Leftrightarrow (\neg X \Rightarrow Y)$ e $(X \wedge Y) \Leftrightarrow \neg(X \Rightarrow \neg Y)$.

Teorema 5- I soli connettivi binari ciascuno dei quali da solo è adeguato alla costruzione di tutte le

funzioni di verità sono la negazione congiunta e quella alternativa.

Dim.

Supponiamo che $h(X, Y)$ sia un connettivo adeguato, e costruiamone la tavola di verità. Se $h(V, V)$ fosse V , qualsiasi enunciato formato usando solo h assumerebbe valore V quando tutte le sue componenti atomiche assumono il valore V , quindi l'enunciato $\neg X$ non sarebbe definibile in termini di h , contro l'ipotesi di adeguatezza dello stesso, pertanto $h(V, V)$ deve risultare F . Analogamente se $h(F, F)$ fosse F la negazione non sarebbe definibile, quindi $h(F, F)$ deve essere V . Si ha allora la seguente tavola di verità:

X	Y	h(X, Y)
V	V	F
V	F	
F	V	
F	F	V

per completarla dobbiamo determinare $h(V, F)$ e $h(F, V)$; abbiamo quattro possibilità:

- 1) se $h(V, F)=h(F, V)=V$ si ha che h è il connettivo NAND, cioè $h(X, Y) \Leftrightarrow (X \downarrow Y)$,
- 2) se $h(V, F)=h(F, V)=F$ si ha che h è il connettivo NOR, cioè $h(X, Y) \Leftrightarrow (X | Y)$,
- 3) se invece $h(V, F)=V$ e $h(F, V)=F$, si ha $h(X, Y) \Leftrightarrow \neg Y$,
- 4) infine se $h(V, F)=F$ e $h(F, V)=V$, si ha $h(X, Y) \Leftrightarrow \neg X$.

Negli ultimi due casi h sarebbe definibile in termini di \neg , ma tale connettivo da solo non è adeguato, dato che le uniche funzioni di verità definibili in termini di \neg , sono la funzione d'identità (per la tautologia $X \Leftrightarrow \neg(\neg X)$) e la negazione stessa (per la tautologia $\neg X \Leftrightarrow \neg X$), mentre ad esempio la funzione di verità che è sempre vera non sarebbe definibile.

Teorema 6- Se X è una fbf in cui occorrono solo i connettivi \neg, \wedge ed \vee , e X' si ottiene da X scambiando tra loro \wedge ed \vee e rimpiazzando ogni componente atomica con la sua negazione, allora X' è logicamente equivalente a $\neg X$, cioè $\neg X' \Leftrightarrow X$ è una tautologia.

Teorema 7- (di completezza semantica per L) - Se una fbf di L è una tautologia, allora essa è un teorema di L.

Teorema 8- Il sistema formale L è *consistente* (o non contraddittorio), cioè non esiste alcuna fbf X tale che tanto X quanto $\neg X$ siano teoremi di L.

Dim.

Infatti ogni teorema di L è una tautologia, la negazione di una tautologia non può essere a sua volta una tautologia, pertanto è impossibile che sia X che $\neg X$ siano contemporaneamente teoremi di L.

Teorema 9- Il sistema formale L è consistente se e solo se non tutte le sue fbf sono teoremi².

Dim.

Per quanto riguarda la prima implicazione basta osservare che se L è consistente esistono fbf che non sono teoremi, per esempio le negazioni dei teoremi che sono delle contraddizioni.

Per dimostrare l'implicazione inversa usiamo la legge di contrapposizione. Supponiamo che L sia inconsistente, ossia che esista qualche fbf X tale che sia X che $\neg X$ siano dimostrabili in L, allora dal fatto che $+_L \neg X \Rightarrow (X \Rightarrow Y)$ (in quanto si tratta di una tautologia), per MP, in L sarebbe dimostrabile qualsiasi fbf Y.

Logica predicativa

Connettivi:

Connettivo	Simbolo	Definizione
Negazione	\neg	Si dice negazione di un predicato A e si indica con $\neg A$, quel predicato che ha come insieme di verità il complementare di V_A rispetto a D, $D - V_A$.

² - Tale equivalenza vale in qualsiasi sistema formale che abbia il Modus Ponens come regola di inferenza.

Congiunzione	\wedge	Si dice congiunzione di due predicati A e B e si indica con $A \wedge B$, il predicato che ha come insieme di verità l'insieme $V_A \cap V_B$.
Disgiunzione	\vee	Si dice disgiunzione di due predicati A e B e si indica con $A \vee B$, il predicato che ha come insieme di verità $V_A \cup V_B$.
Implicazione (materiale)	\Rightarrow	Si dice implicazione di due predicati A e B e si indica con $A \Rightarrow B$, il predicato che ha come insieme di verità $(D-V_A) \cup V_B$. ³
Complicazione (materiale)	\Leftrightarrow	Si dice coimplicazione di due predicati A e B e si indica con $A \Leftrightarrow B$, il predicato che, ha come insieme di verità $(V_A \cap V_B) \cup ((D-V_A) \cap (D-V_B))$. ⁴

Quantificazione:

$$\forall x X \Leftrightarrow \neg(\exists x)\neg X$$

$$\exists x X \Leftrightarrow \neg(\forall x)\neg X$$

$$\forall x\neg X \Leftrightarrow \neg(\exists x) X$$

$$\exists x\neg X \Leftrightarrow \neg(\forall x) X$$

³ - Dato che $A \Rightarrow B$ è logicamente equivalente a $\neg A \vee B$.

⁴ - Dato che $A \Leftrightarrow B$ è logicamente equivalente a $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$.

Sillogismi

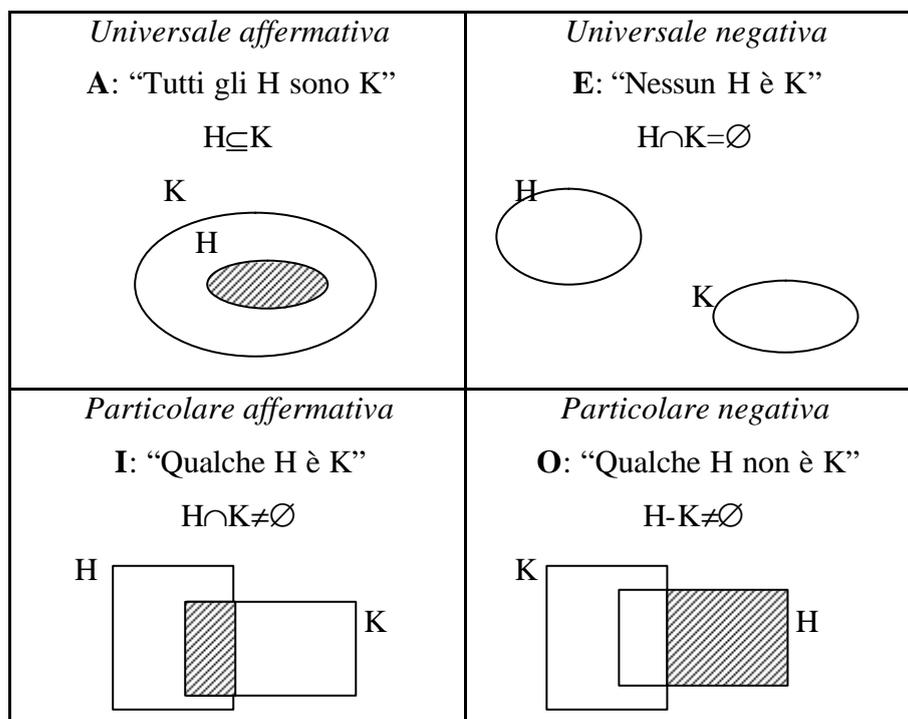
Figure:

	I		II		III		IV	
M	P	P	M	M	P	P	M	
S	M	S	M	M	S	M	S	
S	P	S	P	S	P	S	P	

Tipi di proposizioni:

PROPOSIZIONI	FORMA DELLE PROPOSIZIONI
Universali Affermative (A)	“Tutti gli H sono K”
Particolari affermative (I)	“Qualche H è K”
Universali negative (E)	“Nessun H è K”
Particolari negative (O)	“Qualche H non è K”

QUANTITÀ	QUALITÀ		
	AFFERMATIVE	NEGATIVE	
	UNIVERSALI	Tutti gli H sono K	Nessun H è k
	PARTICOLARI	Qualche H è K	Qualche H non è K



Rapporti tra le proposizioni del quadrato logico:

A	E	I	O	E	A	I	O	I	A	E	I
V	F	V	F	V	F	F	V	V	?	F	?
F	?	?	V	F	?	V	?	F	F	V	V

Sillogismo validi:

	S	P
A	"	"
E	"	"
I	"	"
O	"	"

Regole sui termini

1 a) Il termine medio deve essere preso universalmente in almeno una premessa.

2 a) Nessun termine può essere preso universalmente nella conclusione, senza che sia stato preso universalmente in una delle premesse.

Regole sulle proposizioni

1 b) Da premesse negative non segue alcuna conclusione.

2 b) Se una premessa è negativa, la conclusione deve essere negativa; se una premessa è particolare, la conclusione deve essere particolare.

	Figura I	Figura II
premessa maggiore	A A E E	A A E E
premessa minore	A I A I	E O A I
conclusione	A I E O	E O E O
	Figura III	Figura IV
premessa maggiore	A A E E I O	A A I E E
premessa minore	A I A I A A	A E A A I
conclusione	I I O O I O	I E I O O

Sillogismi con proposizioni singolari:

La proposizione “h è un K” viene considerata equivalente alla congiunzione: “Ogni H è K” e “Qualche H è K” ($A \wedge I$); e la proposizione “h non è un K” viene considerata equivalente, invece, alla congiunzione: “Nessun H è K” e “Qualche H non è K” ($E \wedge O$).

Sillogismi disgiuntivi e ipotetici:

Si definisce *sillogismo disgiuntivo* valido, quello che contiene una premessa disgiuntiva, che asserisce la verità di almeno uno dei due disgiunti, e una premessa che asserisce la falsità di uno dei due disgiunti. In generale uno schema di sillogismo disgiuntivo è il seguente:

1. P è vera o Q è vera.
2. Q è falsa.
3. P è vera.

Si definisce *sillogismo ipotetico*, quello che contiene una o più premesse ipotetiche, le quali affermano che se l'antecedente è vera allora è vera la conseguente. Si distinguono due sotto tipi:

a. *sillogismo ipotetico puro*, che contiene solo premesse condizionali, come il seguente:

1. Se P è vera, allora Q è vera.
2. Se Q è vera, allora R è vera.
3. Se P è vera, allora R è vera.

b. *sillogismo ipotetico misto*, che contiene una premessa condizionale ed una premessa che asserisce la verità dell'antecedente o la falsità della conseguente della premessa condizionale. Quelli che seguono sono due schemi di sillogismo ipotetico misto valido:

1. Se P è vera, allora Q è vera.
2. P è vera.
3. Q è vera.

1. Se P è vera, allora Q è vera.
2. Q è falsa.
3. P è falsa.

Applicazioni al ragionamento matematico

Prova diretta

Il metodo fondamentale per provare l'enunciato $P_1 \supset P_2$ è quello di assumere P_1 come vero e dedurre direttamente la verità di P_2 .

Tuttavia il calcolo enunciativo fornisce diversi metodi ausiliari per provare la suddetta implicazione, per esempio si può trovare un enunciato P_3 tale che $P_1 \supset P_3$ e $P_3 \supset P_2$, e dedurre quindi come vero $P_1 \supset P_2$ per modus ponens dalla tautologia:

$$((P_1 \supset P_3) \dot{\cup} (P_3 \supset P_2)) \supset (P_1 \supset P_2)$$

Prova per contrapposizione

Un altro modo per provare $P_1 \supset P_2$ è quello di provare $\emptyset \supset P_2 \supset \emptyset \supset P_1$ e sfruttare la legge di contrapposizione; questo metodo di prova indiretta è molto usato.:

$$(\emptyset \supset P_2 \supset \emptyset \supset P_1) \supset (P_1 \supset P_2) \text{ per modus ponens si ricava il teorema.}$$

Prova per casi

A volte nel corso di un ragionamento si presentano due o più casi possibili, e si deve provare per esempio un'implicazione del tipo:

$$(P_1 \dot{\cup} P_2) \supset P_3.$$

Si possono trovare diversi metodi, uno consiste ad esempio nel provare che $P_1 \supset P_3$ e $P_2 \supset P_3$ e quindi ricavare l'enunciato richiesto per modus ponens dalla tautologia:

$$((P_1 \supset P_3) \dot{\cup} (P_2 \supset P_3)) \supset ((P_1 \dot{\cup} P_2) \supset P_3).$$

Anche se i casi possibili sono più di due si può procedere in modo analogo, quindi lo schema di ragionamento è espresso dalla seguente tautologia:

$$((P_1 \supset P_4) \dot{\cup} ((P_2 \supset P_4) \dot{\cup} (P_3 \supset P_4))) \supset ((P_1 \dot{\cup} (P_2 \dot{\cup} P_3)) \supset P_4).$$

Prove per assurdo

Le prove per assurdo di un enunciato sono tutte prove indirette e possono essere caratterizzate nel seguente modo: si assume che l'enunciato da provare sia falso e si deriva da ciò una contraddizione che ci costringe a rigettare quest'assunzione.

4a)⁵ Se si vuole provare l'enunciato P_1 , si può assumere vero $\emptyset \supset P_1$ ricavare da questo P_1 e dalla tautologia $(\emptyset \supset P_1 \supset P_1) \supset P_1$, asserire per modus ponens P_1 ; la contraddizione consiste nel fatto che in tal modo da $\neg P_1$ si ricava sia P_1 sia $\neg P_1$.

4b) Un altro metodo consiste nel ricavare dalla negazione dell'enunciato da provare $(\emptyset \supset P_1)$, un enunciato contraddittorio $(P_2 \dot{\cup} \emptyset \supset P_2)$ e quindi dedurre P_1 per modus ponens dalla tautologia :

$$(\emptyset \supset P_1 \supset (P_2 \dot{\cup} \emptyset \supset P_2)) \supset P_1.$$

4c) Se l'enunciato da provare per assurdo è un'implicazione del tipo $P_1 \supset P_2$, poiché l'enunciato $\emptyset \supset (P_1 \dot{\cup} \emptyset \supset P_2)$ è ad esso logicamente equivalente, basta assumere come vero $(P_1 \dot{\cup} \emptyset \supset P_2)$ e cercare di dedurre una contraddizione del tipo $(P_3 \dot{\cup} \emptyset \supset P_3)$, considerando quindi la tautologia:

$$((P_1 \dot{\cup} \emptyset \supset P_2) \supset (P_3 \dot{\cup} \emptyset \supset P_3)) \supset (P_1 \supset P_2)$$

si ricava, per modus ponens, $P_1 \supset P_2$.

4d) Un altro modo per provare per assurdo un'implicazione consiste nel dedurre P_2 da $(P_1 \dot{\cup} \emptyset \supset P_2)$, e dato che da $(P_1 \dot{\cup} \emptyset \supset P_2)$ si può ricavare anche $\emptyset \supset P_2$, abbiamo la contraddizione necessaria per provare $P_1 \supset P_2$ utilizzando la tautologia:

$$((P_1 \dot{\cup} \emptyset \supset P_2) \supset P_2) \supset (P_1 \supset P_2) \text{ e la regola del modus ponens.}$$

4e) Esiste ancora un altro metodo per il quale si ricava $\emptyset \supset P_1$ da $P_1 \dot{\cup} \emptyset \supset P_2$, e da ciò per modus ponens dalla tautologia $((P_1 \dot{\cup} \emptyset \supset P_2) \supset \emptyset \supset P_1) \supset (P_1 \supset P_2)$ si deduce $P_1 \supset P_2$.

Osservazione

Molte volte le prove per contrapposizione sono annoverate tra quelle per assurdo; si osservi, tuttavia, che sebbene entrambe le prove sono di tipo indiretto, le prime a differenza delle seconde si possono applicare soltanto ad enunciati che si presentano sotto forma d'implicazione, ed inoltre, come già visto, gli schemi di ragionamento sono diversi.

In una prova per contrapposizione di un'implicazione $P_1 \Rightarrow P_2$, infatti, si assume *falsa soltanto la tesi* P_2 e si ricava che è falsa l'ipotesi P_1 , si prova in pratica l'enunciato contrapposto $\neg P_2 \Rightarrow \neg P_1$.

⁵ - Questa forma di riduzione all'assurdo, poco frequente, è stata usata in molte argomentazioni logiche e matematiche di grande interesse storico.

In una prova per assurdo, invece, si assume come falso *l'intero enunciato* da provare e si deduce da ciò qualcosa che è in contrasto o con gli assiomi, o con l'ipotesi, o con asserti già provati, o che comunque porta ad una contraddizione.

Si noti comunque che la prova per contrapposizione si può sempre ricondurre (complicandola) ad una riduzione all'assurdo, e precisamente al caso 4e), dato che l'enunciato $(\neg P_2 \Rightarrow \neg P_1) \Leftrightarrow ((P_1 \wedge \neg P_2) \Rightarrow \neg P_1)$ è una tautologia.

Si può affermare pertanto che, tra le prove indirette, quella per contrapposizione è la più diretta, e per questo forse la più nota.

Teorie del primo ordine

1) L'*alfabeto* di una teoria del primo ordine può contenere:

- a. una infinità numerabile di *variabili individuali* x_1, x_2, \dots ;
- b. un insieme finito o numerabile eventualmente vuoto di *costanti individuali* a_i ($i \geq 1$);
- c. un insieme finito o numerabile eventualmente vuoto di *lettere funzionali* f_j^n ($n, j \geq 1$) (dove l'apice indica il numero degli argomenti e l'indice distingue le lettere funzionali l'una dall'altra);
- d. un insieme finito o numerabile, non vuoto di *lettere predicative* A_j^n ($n, j \geq 1$) (per n e j vale quanto detto sopra);
- e. i segni “ \neg ”, “ \forall ”, “(”, “)” e “;”.

Le *lettere funzionali* applicate alle variabili e alle costanti individuali generano i termini, dove per *termine* di una teoria del primo ordine s'intende:

- a. ogni costante individuale,
- b. ogni variabile individuale,
- c. ogni lettera funzionale $f_m^n(t_1, t_2, \dots, t_n)$ dove t_1, t_2, \dots, t_n sono termini
- d. nient'altro è un termine.

Le lettere predicative applicate ai termini generano le formule ben formate.

2) Per *formula ben formata* (fbf) di una qualsiasi teoria del primo ordine s'intende:

- a. una lettera predicativa A_m^n seguita da n termini $A_m^n(t_1, t_2, \dots, t_n)$ (formula atomica), e se X è una fbf, $(\forall y)X$ con y variabile individuale e $\neg X$ sono fbf,
- b. se X e Y sono fbf $X \vee Y$ è una fbf,
- c. nient'altro è una fbf.

(Le espressioni $X \wedge Y$, $X \Rightarrow Y$, $X \Leftrightarrow Y$ si definiscono come in L)

Def.24- Per *interpretazione* di una teoria del primo ordine F s'intende una coppia $\langle D, g \rangle$ costituita da un insieme non vuoto D (su cui variano le variabili individuali) e da una rappresentazione g .

Il dominio di g è l'insieme delle lettere funzionali, delle costanti individuali e delle lettere predicative di F , mentre il codominio di g è l'insieme $D \cup P(M(D))$ dove $P(M(D))$ è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di $M(D)$ che è costituito da tutte le successioni finite di elementi di D .

L'applicazione g associa:

- ad ogni lettera predicativa A_m^n di F un sottoinsieme $g(A_m^n)$ di D^n ⁶;
- ad ogni lettera funzionale f_j^i di F un sottoinsieme $g(f_j^i)$ di D^{i+1} ⁷, dove $g(f_j^i)$ è una relazione funzionale, cioè un'applicazione di D^i in D ;
- ad ogni costante individuale a_i un elemento $g(a_i)$ di D ⁸.

Def.25- Sia F un sistema formale e $\langle D, g \rangle$ una sua interpretazione, per ogni successione $s = \{s_1, s_2, \dots, s_n, \dots\}$ di elementi di D sia $g_s: T_F \rightarrow D$ una funzione (con T_F insieme dei termini di F) così definita:

- 1) $g_s(t) = g(a_i) \in D$ se t è una costante individuale,
- 2) $g_s(t) = g(x_i) = s_i$ (i -esimo termine della successione s) se t è la variabile individuale x_i ,

⁶ - ossia una relazione in D .

⁷ - ossia un'operazione a i posti in D .

⁸ - $g(a_i)$ è chiamato oggetto denotato da a_i .

3) infine se t ha la forma $f_j^n(t_1, t_2, \dots, t_n)$ allora
 $g_s(t) = g(f_j^n(g_s(t_1), g_s(t_2), \dots, g_s(t_n)))$

Def.26- Siano A una fbf e s una successione di elementi del dominio D di una data interpretazione:

- 1) se A è una formula atomica, ossia ha la forma $A_k^n(t_1, t_2, \dots, t_n)$ e se la n -pla $\langle g_s(t_1), g_s(t_2), \dots, g_s(t_n) \rangle$ appartiene all'insieme $g(A_k^n)$, si dice che la successione s *soddisfa* A ;
- 2) se A ha la forma $\neg X$, s soddisfa A se e solo se non soddisfa X ;
- 3) se A ha la forma $X \vee Y$, s soddisfa A se e solo se soddisfa X , oppure Y , oppure entrambe;
- 4) se A ha la forma $(x_i)X$, s soddisfa A se e solo se ogni successione di elementi di D , che differisce da s al massimo per l' i -esimo elemento, soddisfa X .

Si ha che:

- a. ogni termine che non contiene variabili è libero per ogni variabile in qualunque fbf;
- b. un termine t è libero per ogni variabile di una fbf X se nessuna delle variabili di t è vincolata in X ;
- c. ogni variabile risulta libera per se stessa;
- d. ogni termine è libero per una variabile x di una fbf X se X non contiene alcuna occorrenza libera di x .

3) L'insieme degli *assiomi* di una qualunque teoria del primo ordine F deve soddisfare le condizioni seguenti:

- a. tutte le fbf di F che sono tautologie sono assiomi;
- b. se $A(x)$ è una fbf e x una variabile, allora ogni fbf della forma $(x)A(x) \Rightarrow A(t)$ è un assioma purché t sia un termine libero per x ;
- c. ogni fbf avente la forma $(x)(B \Rightarrow A(x)) \Rightarrow (B \Rightarrow (x)A(x))$ è un assioma, con x variabile qualsiasi che non sia libera nella fbf B e con $A(x)$ fbf qualunque;
- d. nient'altro è un assioma logico.

4) Le *regole d'inferenza* di una teoria del primo ordine qualunque sono le seguenti:

- a. Modus ponens (MP), ossia da A e $A \Rightarrow B$ si può inferire B , con A e B fbf qualsiasi;
- b. Generalizzazione universale (GU), ossia da una fbf A qualsiasi si può inferire la fbf $(x)A$.

Teorema 11 (di completezza semantica)- In ogni teoria del primo ordine F le fbf universalmente valide sono esattamente i teoremi di F .

Def.32- Date due fbf A e B di una teoria del primo ordine F , diciamo che A implica B in F , se e solo se $+_F A \Rightarrow B$. Se F è un calcolo predicativo, diciamo che A implica logicamente B .

Per il **Teorema 11** A implica B significa che il condizionale $A \Rightarrow B$ è logicamente valido.

Il concetto d'implicazione logica costituisce una generalizzazione di quello d'implicazione tautologica (**Def.5**). Poiché le tautologie sono teoremi di ogni calcolo predicativo, ogni implicazione tautologica è anche un'implicazione logica, ma in generale non vale il viceversa, pertanto l'implicazione logica rappresenta una relazione più forte dell'implicazione tautologica.

Def.33- Date due fbf A e B di una teoria del primo ordine F , diciamo che A è equivalente a B in F , se e solo se $+_F A \Leftrightarrow B$. Se F è un calcolo predicativo, diciamo che A è logicamente equivalente a B .

Per il **Teorema 11** ciò significa che la doppia implicazione $A \Leftrightarrow B$ è logicamente valida.

Anche in questo caso l'equivalenza logica rappresenta una generalizzazione dell'equivalenza tautologica (**Def.6**), ed è una relazione più forte rispetto a quest'ultima.

Modelli delle teorie del primo ordine

Def.36- Per *forma enunciativa associata* di una fbf X s'intende l'espressione ottenuta eliminando tutti i quantificatori e tutti i termini (assieme alle relative parentesi e virgole), e sostituendo, in modo uniforme, ogni lettera predicativa con una lettera enunciativa del sistema L .

Teorema 16 (di completezza, vedi 19)- Ogni teoria del primo ordine consistente ha un modello.

Teorema 17- Sia F un sistema del primo ordine, se $A \vdash_F B$ e se B non dipende da A , allora $\vdash_F B$.

Dim.

Se A è un assioma di F allora si ha $\vdash_F B$.

Supponiamo che A non sia un assioma di F e ragioniamo per induzione sulla lunghezza n della dimostrazione di B dall'ipotesi A .

Se $n=1$, B è l'unica riga della dimostrazione, quindi o B coincide con A o B è un assioma di F ; ma B non può essere A , perché per ipotesi non dipende da A , allora è un assioma e dunque un teorema di F .

Supponiamo ora che il teorema valga per tutte le dimostrazioni di lunghezza minore di n e consideriamo il caso di una dimostrazione di lunghezza n . La formula B non può essere A e se B è un assioma è anche un teorema. Supponiamo ora che B sia inferita da elementi precedenti della dimostrazione; questi elementi sono tutti l'ultima riga di una dimostrazione di lunghezza minore di n a partire da A , e per ipotesi d'induzione sono teoremi di F . Allora B è inferita da teoremi e pertanto è essa stessa un teorema.

Questo teorema ci dice che se la fbf B , in una deduzione a partire da A , non dipende da questa, l'ipotesi A non ha contribuito in alcun modo alla deduzione di B .

Corollario 3 (teorema di deduzione)- Sia F un sistema del primo ordine, se $A \vdash_F B$ e se nella deduzione non è mai stata applicata la regola di GU a formule dipendenti da A e nelle quali la variabile quantificata era libera in A , allora $\vdash_F A \Rightarrow B$.

Dim.

Anche in questo caso procediamo per induzione sulla lunghezza n della dimostrazione in questione.

Se $n=1$, la dimostrazione consiste di una sola riga B . Se B coincide con A , essendo $A \Rightarrow A$ una tautologia e dunque un teorema di F , risulta $\vdash_F A \Rightarrow B$.

Se, invece, B è un assioma, dalla tautologia $B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ per MP si deduce che $\vdash_F A \Rightarrow B$.

Supponiamo ora che il teorema valga per dimostrazioni di lunghezza minore di n e consideriamo una dimostrazione di lunghezza n .

Se B è A oppure un assioma ragioniamo come prima.

Se B è inferita per MP da elementi precedenti della dimostrazione, C e $C \Rightarrow B$, dato che C e $C \Rightarrow B$ sono l'ultima riga di una dimostrazione di lunghezza minore di n a partire da A , per ipotesi d'induzione risulta $\vdash_F A \Rightarrow C$ e $\vdash_F A \Rightarrow (C \Rightarrow B)$, e poiché $(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \Rightarrow (C \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \Rightarrow B))$ è una tautologia applicando due volte il MP si ottiene $\vdash_F A \Rightarrow B$.

Se infine B è ottenuta da una formula precedente C mediante GU, in tal caso B ha la forma $(x)C$, dove x è una variabile. Una delle ipotesi del corollario è che C non dipenda da A e quindi per il Teorema 17 $\vdash_F C$ e per GU $\vdash_F (x)C$, ossia $\vdash_F B$ e dalla tautologia $B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ per MP si ottiene $\vdash_F A \Rightarrow B$. Se C dipende da A per l'altra ipotesi x non è libera in A . Dato che C è l'ultima riga di una dimostrazione di lunghezza minore di n a partire dall'ipotesi A , allora per ipotesi d'induzione si ha $\vdash_F A \Rightarrow C$ e per GU $\vdash_F (x)(A \Rightarrow C)$, dove x non è libera in A . Ora per l'assioma logico $(x)(A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (x)C)$ e per MP risulta $\vdash_F A \Rightarrow (x)C$ e cioè $\vdash_F A \Rightarrow B$.

Corollario 4 (teorema di deduzione)- Sia F un sistema del primo ordine, se $A \vdash_F B$ e se A è chiusa, allora $\vdash_F A \Rightarrow B$.

Dim.

La dimostrazione è immediata dato che A non ha variabili libere essendo chiusa per ipotesi, pertanto sono soddisfatte le ipotesi del precedente corollario, dato che non si applica la regola di GU a fbf dipendenti da A contenenti variabili libere in A .

Teorema 19 (di completezza, vedi 16)-Tutte le fbf universalmente valide di un qualunque sistema del primo ordine F sono teoremi di F .

Dim.

Sia F un qualsiasi sistema del primo ordine e sia X una qualunque fbf di F universalmente valida e non dimostrabile in F . In tal caso non sarà dimostrabile nemmeno la sua chiusura universale \overline{X} , dato che una fbf è vera se e solo se lo è la sua chiusura universale e i teoremi sono fbf vere in ogni modello di F . Ma

\overline{X} è chiusa, quindi per il Teorema 18, possiamo aggiungere a F come nuovo assioma $\neg \overline{X}$ ed ottenere un sistema F' coerente. Come sistema coerente F' ha un modello⁹ in cui risultano veri tutti i suoi assiomi ed in particolare $\neg \overline{X}$, pertanto \overline{X} deve risultare falsa in tale modello. Da ciò segue che anche X , in quel modello, deve essere falsa. Ma X per ipotesi è universalmente valida, pertanto sarebbe contemporaneamente vera e falsa nel modello di F' , il che è assurdo. X deve dunque essere un teorema di F . Dato che X è una fbf qualunque, resta dimostrato che tutte le fbf universalmente valide sono teoremi di F .

Teorema 20 (di Lindenbaum) -Ogni teoria del primo ordine F coerente ha un'estensione coerente e completa.

Dim.

Dato che l'insieme delle fbf di qualunque teoria del primo ordine è numerabile, possiamo enumerare le fbf chiuse; sia $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$ una tale enumerazione.

Consideriamo B_1 , essa è dimostrabile o non dimostrabile; se B_1 non è dimostrabile aggiungiamo $\neg B_1$ come nuovo assioma ad F e otteniamo F_1 estensione coerente di F , se B_1 è dimostrabile poniamo $F_1=F$ e passiamo a considerare B_2 .

Se B_2 non è dimostrabile aggiungiamo $\neg B_2$ come nuovo assioma ad F_1 e otteniamo F_2 estensione coerente di F_1 , se B_2 è dimostrabile poniamo $F_2=F_1$ e passiamo a considerare B_3 .

In generale sia F_n il sistema formale ottenuto applicando il nostro procedimento a B_n , ossia per ogni n , o F_n è estensione coerente di F_{n-1} oppure $F_n=F_{n-1}$.

Sia infine $F_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$; F_∞ , estensione di F , deve essere coerente. Infatti, se non lo fosse, ci sarebbe una derivazione formale in F_∞ di una contraddizione. Ogni derivazione ha lunghezza finita e coinvolge quindi solo un numero finito di assiomi di F_∞ ; tali assiomi devono allora essere contenuti in qualche F_i , in tal modo dovrebbe essere dimostrabile una contraddizione in F_i . Ciò è assurdo poiché, per costruzione, tutti gli F_i sono coerenti, pertanto F_∞ è coerente.

Inoltre F_∞ è un sistema completo; infatti come estensione di F ha le stesse fbf di F e per ogni fbf chiusa B_n di F_∞ , o si ha B_n oppure $\neg B_n$ è stata aggiunta come nuovo assioma a F_n . In ogni caso dunque in F_∞ , estensione di ogni F_n , o è dimostrabile B_n oppure lo è $\neg B_n$.

Teorema 21 (di Löwenheim-Skolem) - Se un sistema del primo ordine F ha un modello, allora ha sempre anche un modello finito o numerabile, ossia un modello in cui il dominio D è un insieme finito o numerabile. Inoltre, se D' è un insieme qualunque di cardinalità maggiore o uguale a quella di D e se F ha un modello di dominio D , allora ha anche un modello di dominio D' .

Corollario 6- Ogni teoria del primo ordine coerente ha un modello numerabile.

Corollario 7- Fissata una qualunque cardinalità infinita, ogni teoria del primo ordine coerente ha un modello avente quella cardinalità.

Regole della logica: la deduzione naturale

Sistema di regole:

Premesso che uno schema della forma $\frac{X, Y, Z, \dots}{T}$ significa che la formula T è una conseguenza immediata delle formule X, Y, Z, \dots si hanno le seguenti regole:

1) *Modus Ponens*

⁹ - Si veda Teorema 16.

$$\text{MP: } \frac{A \Rightarrow B, A}{B}$$

2) Eliminazione del quantificatore esistenziale

eE: $\frac{(Ex)A(x)}{A(b)}$, dove b è una costante individuale apparente che non occorre in $(Ex)A(x)$ e nemmeno in formule precedenti della dimostrazione, mentre $A(b)$ rappresenta il risultato della sostituzione in $A(x)$ di tutte le occorrenze libere di x con b .¹⁰

3) Eliminazione del quantificatore universale

e \forall : $\frac{(x)A(x)}{A(t)}$, dove t è un termine qualunque di F libero per x oppure una costante individuale apparente che è stata introdotta precedentemente nella dimostrazione per applicazione della regola eE, mentre $A(t)$ è il risultato della sostituzione in $A(x)$ di tutte le occorrenze libere di x con t .¹¹

4) Introduzione del quantificatore esistenziale

iE: $\frac{A(t)}{(Ex)A(x)}$, dove t è un termine qualunque di F libero per x oppure una costante individuale apparente, mentre $A(t)$ rappresenta il risultato della sostituzione in $A(x)$ di tutte le occorrenze libere di x con t .

5) Introduzione del quantificatore universale

i \forall : $\frac{A(x)}{(x)A(x)}$, dove la variabile x non è libera in nessuna delle ipotesi da cui $A(x)$ dipende¹², e in nessuna fbf (apparente o no) $(Ey)B(y)$ cui sia stata applicata la regola eE, a meno che $A(x)$ non sia una fbf e dipenda da ipotesi che siano fbf (ossia né $A(x)$ né le ipotesi da cui $A(x)$ dipende possono contenere costanti individuali apparenti).

5 bis) i \forall *: $\frac{A(x)}{(x)A(x)}$, dove la variabile x non è libera in nessuna delle ipotesi da cui $A(x)$ dipende e $A(x)$ è una fbf che dipende soltanto da ipotesi che siano fbf.

6) Eliminazione delle ipotesi

eI: $\frac{A, B}{A \Rightarrow B}$, dove A è un'ipotesi qualunque da cui B dipende e che compare nella dimostrazione prima di B .¹³

Teorema 26 (di sostituzione)- In ogni sistema del primo ordine, se $+A \Leftrightarrow B$ (dove A e B sono fbf qualsiasi), allora $+X \Leftrightarrow X'$, dove X' è ottenuta da X sostituendo con B zero, una o più occorrenze di A in X .

Dim.

La dimostrazione è per induzione sul numero n dei connettivi e dei quantificatori di X .

Se X non ha connettivi e quantificatori ($n=0$), è una formula atomica¹⁴, pertanto A , essendo una fbf, coincide con X ; segue allora che o $X' \Leftrightarrow B$ oppure $X' \Leftrightarrow A$. In entrambi i casi il teorema è provato poiché da $+A \Leftrightarrow B$, segue o $+A \Leftrightarrow B$ o $+A \Leftrightarrow A$, ossia $+X \Leftrightarrow X'$.

Supponiamo ora che il teorema valga per ogni formula X che ha meno di n connettivi e quantificatori e

¹⁰ - Si tenga presente che soltanto la regola eE consente di introdurre per la prima volta, in una dimostrazione, una nuova costante individuale apparente.

¹¹ - La regola e \forall è giustificata dal MP e dall'assioma logico di tipo **b**.

¹² - Tale restrizione è necessaria per assicurare il fatto che la successiva regola eI resti valida.

¹³ - La regola eI non è altro che il Teorema di deduzione (Corollario 3).

¹⁴ - Non esistono parti proprie di X che sono fbf.

dimostriamo il teorema nel caso in cui X abbia n connettivi e quantificatori.

Se X è atomica oppure coincide con A ritorniamo al caso precedente, supponiamo quindi che A sia una parte propria di X non atomica. In tal caso X deve avere una delle seguenti forme:

1) $(x)C$, oppure 2) $(Ex)C$, oppure 3) $\neg C$, oppure 4) $C \vee D$, dove C e D sono fbf con meno di n connettivi e quantificatori, per le quali, quindi, il teorema vale. Esaminiamo adesso ciascuno di questi quattro casi:

1) Se X ha la forma $(x)C$, allora A è una parte (non necessariamente propria) di C , essendo una parte propria di X . Sia ora C' il risultato della sostituzione in C di zero, una o più occorrenze di A con B , in tal caso X' è $(x)C'$. Se $+A \Leftrightarrow B$, allora per ipotesi di induzione si ha che $C \Leftrightarrow C'$ è un teorema e in quanto tale non dipende da alcuna ipotesi, possiamo allora applicare la regola \forall per ottenere $+(x)(C \Leftrightarrow C')$, infine da quest'ultima e dal Lemma 1 $(x)(C \Leftrightarrow C') \Rightarrow ((x)C \Leftrightarrow (x)C')$, per MP si ottiene $+(x)C \Leftrightarrow (x)C'$, ossia $+X \Leftrightarrow X'$.

2) Se X ha la forma $(Ex)C$ si procede come nel caso precedente sfruttando alla fine il Lemma 2.

3) Se, invece, X ha la forma $\neg C$, X' avrà la forma $\neg C'$, per ipotesi di induzione da $+A \Leftrightarrow B$ segue $+C \Leftrightarrow C'$ e dalla tautologia $+(C \Leftrightarrow C') \mathbf{P}(\neg C \Leftrightarrow \neg C')$, per MP si ottiene $+\neg C \Leftrightarrow \neg C'$, ossia $+X \Leftrightarrow X'$.

4) Se infine X ha la forma $C \vee D$, X' ha la forma $C' \vee D'$, dove C' e D' sono ottenute da C e D nel solito modo; da $+A \Leftrightarrow B$ per ipotesi di induzione valgono $+C \Leftrightarrow C'$ e $+D \Leftrightarrow D'$, considerando pertanto la tautologia $+(C \Leftrightarrow C') \mathbf{P}((D \Leftrightarrow D') \Rightarrow ((C \vee D) \Leftrightarrow (C' \vee D')))$, applicando due volte il MP si ottiene $+(C \vee D) \Leftrightarrow (C' \vee D')$, cioè $+X \Leftrightarrow X'$.

Teorie del primo ordine con identità e con identità definibile

Def.45- Per teoria del primo ordine con *identità* s'intende una teoria del primo ordine F contenente un predicato a due posti A_i^2 che soddisfi le seguenti condizioni:

R₁ $(x)A_i^2(x, x)$ è un assioma, dove x è una variabile qualunque;

S₂ $(x)(y)(A_i^2(x, y) \Rightarrow (X \Leftrightarrow X'))$ è un assioma, dove x e y sono variabili mentre X' è ottenuta da X sostituendo in essa zero, una o più occorrenze libere di x con y , purché y sia libera per x nelle occorrenze in cui viene operata la sostituzione.

Di solito per il predicato A_i^2 si adopera il simbolo "= \equiv ", ossia si scrive " $x=y$ " al posto di $A_i^2(x, y)$.

Il principio **R₁** afferma la riflessività dell'identità $(x)x=x$, mentre il principio **S₂** la sostituitività dell'identità, $(x)(y)(x=y \Rightarrow (X \Leftrightarrow X'))$, del tutto analoga a quella dell'equivalenza logica.

Forme normali prenesse

Def.47- Una fbf $(Q_1x_1)(Q_2x_2)\dots(Q_nx_n)X$, dove ogni (Q_ix_i) è un quantificatore universale o esistenziale, $x_i \neq x_j$ per $i \neq j$, e X è una fbf priva di quantificatori si dice *forma normale prenessa*, in breve fnp (è incluso il caso in cui $n=0$, quando cioè non vi sono quantificatori)¹⁵.

La successione di quantificatori $(Q_1x_1)(Q_2x_2)\dots(Q_nx_n)$ si chiama *prefisso* della fbf, mentre la formula X si chiama *matrice*.¹⁶

a. una fbf si dice in fnp congiuntiva se è della forma:

$$(Q_1x_1)(Q_2x_2)\dots(Q_px_p) ((X_{11} \vee X_{12} \vee \dots \vee X_{1h_1}) \wedge (X_{21} \vee X_{22} \vee \dots \vee X_{2h_2}) \wedge \dots \wedge (X_{n1} \vee X_{n2} \vee \dots \vee X_{nh_n})),$$

b. una fbf si dice in fnp disgiuntiva se è della forma:

$$(Q_1x_1)(Q_2x_2)\dots(Q_px_p) ((X_{11} \wedge X_{12} \wedge \dots \wedge X_{1h_1}) \vee (X_{21} \wedge X_{22} \wedge \dots \wedge X_{2h_2}) \vee \dots \vee (X_{n1} \wedge X_{n2} \wedge \dots \wedge X_{nh_n})),$$

dove ciascun X_{ij} è una formula atomica o la negazione di una formula atomica.

Passi:

Passo 1- eliminazione di tutti i quantificatori ridondanti di W .

Si elimini cioè qualsiasi quantificatore (Q_ix_i) nel cui campo d'azione non occorre x_i . Ad esempio nella fbf $(x_1)(Ex_2)(A_1^1(x_2) \vee A_1^2(x_1, x_2)) \Rightarrow (x_2)A_2^1(x_4)(x_2)$ è ridondante.

Passo 2- ridenominazione delle variabili.

Si ridenominino, partendo dalla parte ben formata più a sinistra della forma $(Q_ix_i)A(x_i)$, le variabili che

¹⁵ - In altre parole una fbf aperta è in forma prenessa.

¹⁶ - Non è richiesto che tutte le variabili che occorrono nella matrice appaiano nel prefisso, in altri termini una fnp non è necessariamente chiusa.

occorrono quantificate più volte e quelle che occorrono sia libere sia vincolate, in modo che tutti i quantificatori della fbf abbiano variabili diverse e nessuna variabile occorra sia libera sia vincolata.

Per esempio nella fbf $(x_1)(Ex_2)A_1^2(x_1, x_2) \vee (x_1)A_2^3(x_1, x_2, x_3)$ bisogna ridenominare x_1 poiché occorre quantificata due volte e x_2 poiché occorre sia libera sia vincolata, si ha pertanto $(x_4)(Ex_5)A_1^2(x_4, x_5) \vee (x_1)A_2^3(x_1, x_2, x_3)$.

Passo 3- eliminazione di tutte le occorrenze dei connettivi diversi da: \neg, \wedge e \vee .

$$\begin{aligned} X \Rightarrow Y &\text{ con } \neg X \vee Y \\ X \Leftrightarrow Y &\text{ con } (\neg X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee X). \end{aligned}$$

Passo 4- spostamento del connettivo \neg più all'interno possibile.

Si effettuino le seguenti sostituzioni fino a che ogni occorrenza del connettivo \neg preceda una formula atomica:

$$\begin{aligned} \neg(x_i)A(x_i) &\text{ con } (Ex_i)\neg A(x_i) \\ \neg(Ex_i)A(x_i) &\text{ con } (x_i)\neg A(x_i) \\ \neg(X \vee Y) &\text{ con } \neg X \wedge \neg Y \\ \neg(X \wedge Y) &\text{ con } \neg X \vee \neg Y \\ \neg\neg X &\text{ con } X. \end{aligned}$$

Passo 5- spostamento dei quantificatori a sinistra:

$$\begin{aligned} (Ex_i)A(x_i) \vee B &\text{ con } (Ex_i)(A(x_i) \vee B) \\ B \vee (Ex_i)A(x_i) &\text{ con } (Ex_i)(B \vee A(x_i)) \\ (x_i)A(x_i) \vee B &\text{ con } (x_i)(A(x_i) \vee B) \\ B \vee (x_i)A(x_i) &\text{ con } (x_i)(B \vee A(x_i)) \\ (Ex_i)A(x_i) \wedge B &\text{ con } (Ex_i)(A(x_i) \wedge B) \\ B \wedge (Ex_i)A(x_i) &\text{ con } (Ex_i)(B \wedge A(x_i)) \\ (x_i)A(x_i) \wedge B &\text{ con } (x_i)(A(x_i) \wedge B) \\ B \wedge (x_i)A(x_i) &\text{ con } (x_i)(B \wedge A(x_i)) \end{aligned}$$

Spesso si può ridurre il numero dei quantificatori sostituendo:

$$\begin{aligned} (Ex_i)A(x_i) \vee (Ex_i)B(x_i) &\text{ con } (Ex_i)(A(x_i) \vee B(x_i)) \\ (x_i)A(x_i) \wedge (x_i)B(x_i) &\text{ con } (x_i)(A(x_i) \wedge B(x_i)) \end{aligned}$$

Passo 6- distribuzione di \wedge rispetto a \vee (per ottenere una fnp congiuntiva) e di \vee rispetto a \wedge (per ottenere una fnp disgiuntiva):

$$\begin{aligned} (X \wedge Y) \vee Z &\text{ con } (X \vee Z) \wedge (Y \vee Z) \\ X \vee (Y \wedge Z) &\text{ con } (X \vee Y) \wedge (X \vee Z) \\ (X \vee Y) \wedge Z &\text{ con } (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z) \\ X \wedge (Y \vee Z) &\text{ con } (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) \end{aligned}$$

La fbf ottenuta con questo procedimento è la fbf W' voluta.

La forma di clausola

Teorema 29 (di Skolem)- Ogni fbf W si può trasformare in una fbf in forma di clausola W' tale che W sia soddisfacibile se e solo se lo è W' .

Dim.

La trasformazione si fa costruendo una sequenza di fbf W_1, W_2, \dots, W_n tale che $W_1=W, W_n=W'$ e che per ogni i ($1 \leq i \leq n$) W_i sia soddisfacibile se e solo se W_{i+1} è soddisfacibile.

Procediamo per passi:

Passo 1- costruzione della chiusura esistenziale di W ed eliminazione di tutti i quantificatori ridondanti di W ¹⁷.

¹⁷ - Come nel Teorema 28.

Passo 2- ridenominazione delle variabili di W che occorrono quantificate più di una volta.

Si ridenominano, tutte le occorrenze delle variabili quantificate più volte, in modo che tutti i quantificatori della fbf abbiano variabili diverse.

Passo 3- eliminazione di tutte le occorrenze dei connettivi diversi da: \neg , \wedge e \vee :

$$\begin{aligned} X \Rightarrow Y &\text{ con } \neg X \vee Y \\ X \Leftrightarrow Y &\text{ con } (\neg X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee X). \end{aligned}$$

Passo 4- spostamento del connettivo \neg più all'interno possibile:

$$\begin{aligned} \neg(x_i)A(x_i) &\text{ con } (Ex_i)\neg A(x_i) \\ \neg(Ex_i)A(x_i) &\text{ con } (x_i)\neg A(x_i) \\ \neg(X \vee Y) &\text{ con } \neg X \wedge \neg Y \\ \neg(X \wedge Y) &\text{ con } \neg X \vee \neg Y \\ \neg\neg X &\text{ con } X. \end{aligned}$$

Passo 5- spostamento dei quantificatori a destra.

$$\begin{aligned} (Ex)(A \vee B) &\text{ con } \begin{cases} A \vee (Ex)B \text{ se } x \text{ non è libera in } A \\ (Ex)A \vee B \text{ se } x \text{ non è libera in } B \end{cases} \\ (x)(A \vee B) &\text{ con } \begin{cases} A \vee (x)B \text{ se } x \text{ non è libera in } A \\ (x)A \vee B \text{ se } x \text{ non è libera in } B \end{cases} \\ (Ex)(A \wedge B) &\text{ con } \begin{cases} A \wedge (Ex)B \text{ se } x \text{ non è libera in } A \\ (Ex)A \wedge B \text{ se } x \text{ non è libera in } B \end{cases} \\ (x)(A \wedge B) &\text{ con } \begin{cases} A \wedge (x)B \text{ se } x \text{ non è libera in } A \\ (x)A \wedge B \text{ se } x \text{ non è libera in } B \end{cases} \end{aligned}$$

Passo 6- eliminazione di tutti i quantificatori esistenziali (skolemizzazione).

Si estragga la parte ben formata $(Ex)B(x)$ più a sinistra e la si sostituisca con $B(f_k^n(x_1, x_2, \dots, x_n))$, dove
a. x_1, x_2, \dots, x_n sono variabili libere di $(Ex)B(x)$ tutte diverse che sono quantificate universalmente a sinistra di $(Ex)B(x)$,

b. f_k^n è una qualunque lettera funzionale n-aria (funzione di Skolem) che non occorra ancora nella fbf.

Si ripeta il procedimento finché non ci sono più quantificatori esistenziali.

Caso particolare- Se $n=0$, cioè non ci sono variabili quantificate universalmente a sinistra di $(Ex)B(x)$ che occorrono in $(Ex)B(x)$, $(Ex)B(x)$ viene sostituita con $B(a)$, dove a è una qualsiasi costante individuale che non occorre ancora nella fbf.

Per esempio skolemizziamo la fbf: $(Ex_1)(x_2)(Ex_3)(x_4)(Ex_5)A_1^5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$.

Dapprima si elimina (Ex_1) e si ottiene $(x_2)(Ex_3)(x_4)(Ex_5)A_1^5(a_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, quindi eliminando (Ex_3) si ha $(x_2)(x_4)(Ex_5)A_1^5(a_1, x_2, f_1^1(x_2), x_4, x_5)$, infine si elimina (Ex_5) ottenendo $(x_2)(x_4)A_1^5(a_1, x_2, f_1^1(x_2), x_4, f_1^2(x_2, x_4))$, che è la forma skolemizzata della fbf di partenza.

*Passo 7- Spostamento dei quantificatori universali a sinistra.*¹⁸

Passo 8- distribuzione di \wedge rispetto a \vee :

$$\begin{aligned} (X \wedge Y) \vee Z &\text{ con } (X \vee Z) \wedge (Y \vee Z) \\ X \vee (Y \wedge Z) &\text{ con } (X \vee Y) \wedge (X \vee Z) \end{aligned}$$

Passo 9 (facoltativo)-Semplificazione.

Si semplifichi la fbf risultante senza alterare la sua proprietà di essere o non essere soddisfacibile. Per esempio:

¹⁸ - Si veda il passo 5 del teorema 28.

a. si eliminino le tautologie, ossia qualsiasi clausola che contenga come letterali una formula atomica e la sua negazione,

b. si eliminino le occorrenze doppie di uno stesso letterale in una clausola, e gli eventuali quantificatori ridondanti.

La fbf ottenuta con questo procedimento è la fbf W' voluta.

La procedura di Herbrand

Teorema 30 (di Herbrand)- Una fbf W in forma di clausola è insoddisfacibile se e solo se esiste una congiunzione finita di esempi fondamentali delle sue clausole che è insoddisfacibile.

Regola fondamentale di risoluzione- Per ogni coppia di clausole fondamentali G_1 e G_2 che contengono rispettivamente un letterale L e il suo complementare $\neg L$ ¹⁹, si costruisce una nuova clausola G_3 , detta *risolvente* di G_1 e G_2 ²⁰, ottenuta sopprimendo dapprima tutte le occorrenze di L e $\neg L$ rispettivamente in G_1 e G_2 , e definendo quindi G_3 come la disgiunzione delle clausole risultanti G'_1 e G'_2 . Si eliminano infine in G_3 le occorrenze doppie di letterali.

Caso particolare: se ci sono due clausole costituite da un solo letterale L e dal suo complementare $\neg L$, allora la loro risolvente è la *clausola vuota*, rappresentata con \square .

¹⁹ - Si osservi che in questo caso un letterale è una lettera predicativa priva di variabili individuali.

²⁰ - G_1 e G_2 sono dette clausole *madri*.