

i3HEV, ing. Mario Held

Riflettometri a componenti discreti

Progettazione e calcolo

Versione 1.1 del 25/05/2000 – Distribuzione 25/05/2000

Sommario

1.	Teoria di funzionamento	3
1.1	Principio generale	3
1.2	Precisione di misura	4
2.	Configurazioni circuitali	7
2.1	Configurazione di base con partitore RC	7
2.2	Configurazione con partitore C-C	8
2.3	Configurazione a doppio partitore	10
3.	Accoppiamento mediante induttore toroidale	13
	Toro a sezione circolare	13
3.1.1	Calcolo del flusso magnetico nel toro	13
3.1.2	Calcolo approssimato del flusso	14
3.2	Toroide a sezione rettangolare	15
4.	Esempio di progetto	16

1. TEORIA DI FUNZIONAMENTO

1.1 Principio generale

Sia data una linea di trasmissione di impedenza caratteristica Z_0 , nella quale siano presenti un'onda incidente V_+ ed un'onda riflessa V_- . Dalla teoria generale delle linee, in un punto qualsiasi della linea si avranno la tensione e la corrente espresse da:

$$\begin{cases} V = V_+ + V_- \\ I = I_+ - I_- = \frac{V_+ - V_-}{Z_0} \end{cases}, \text{ da cui discende:}$$

$$\begin{cases} V_+ = \frac{V + Z_0 I}{2} \\ V_- = \frac{V - Z_0 I}{2} \end{cases}$$

Il coefficiente di riflessione nella linea è quindi dato da:

$$r = \frac{V_-}{V_+} = \frac{V - Z_0 I}{V + Z_0 I}$$

e si può quindi misurare indirettamente dai valori della tensione e della corrente in linea.

La misura della tensione è ottenibile direttamente; per la misura della corrente è invece opportuno utilizzare un trasformatore amperometrico; le equazioni del doppio bipolo relativo sono:

$$\begin{cases} v_1 = sL_1 i_1 + sM i_2 \\ v_2 = sM i_1 + sL_2 i_2 \end{cases}$$

Se l'uscita del trasformatore è chiusa su un carico R_2 , si trova:

$$\begin{cases} v_2 = -\frac{sMR_2}{sL_2 + R_2} i_1 \\ i_2 = -\frac{sM}{sL_2 + R_2} i_1 \end{cases}$$

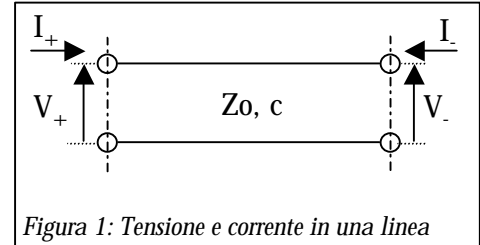


Figura 1: Tensione e corrente in una linea

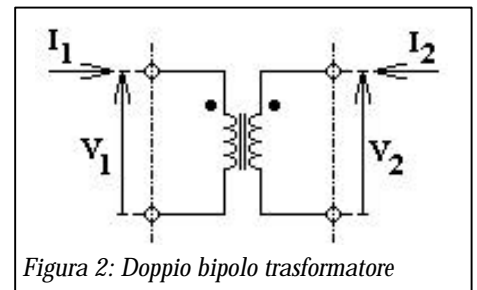


Figura 2: Doppio bipolo trasformatore

in particolare, se l'uscita è a vuoto ($R_2 \rightarrow \infty, i_2 \equiv 0$), si trova subito:

$$v_2 = sMi_1 \quad .$$

1.2 Esecuzione e precisione della misura

In linea generale, un riflettometro reale presenta due funzioni di trasferimento distinte per le due onde viaggianti nelle direzioni opposte; per ovvie ragioni di simmetria, dette G_F e G_B le due funzioni di trasferimento, in generale complesse, le letture di tensione diretta ed riflessa relative alle onde incidente e riflessa saranno:

$$\begin{cases} V_D = G_F V_+ + G_B V_- \\ V_R = G_B V_+ + G_F V_- \end{cases} .$$

Nel caso ideale, $G_B \equiv 0$, per cui si avrà:

$$\begin{cases} V_D = G_F V_+ \\ V_R = G_F V_- \end{cases} .$$

La misura si effettua con un voltmetro a radiofrequenza, e permette di conoscere il valore assoluto delle tensioni V_D e V_R . Se il voltmetro è dotato di sensibilità variabile, regolando questa per avere una deflessione a fondo scala in corrispondenza alla misura di V_D , la misura di V_R su una scala lineare fornirà direttamente la lettura del rapporto V_R / V_D . La misura μ così effettuata è legata ai valori di ampiezza delle onde incidente e riflessa dalla relazione:

$$m = \frac{|G_F V_- + G_B V_+|}{|G_F V_+ + G_B V_-|}$$

La lettura di ciascuna componente, e di conseguenza la misura del rapporto, è quindi viziata dalla presenza di una certa frazione dell'altra; solo nel caso in cui sia $G_B \equiv 0$ si avrà invece:

$$m_{ideale} = \frac{|G_F V_-|}{|G_F V_+|} = |r|$$

Possiamo definire un **rapporto di reiezione R_r** :

$$R_r = \frac{G_B}{G_F} \quad , \text{ che è nullo solo nel caso ideale di completa separazione delle misure.}$$

Si vede allora facilmente che la quantità misurata è:

$$m = \frac{|r + R_r|}{|1 + R_r r|} \quad ,$$

che è pari a $|\rho|$ nel caso in cui il rapporto di reiezione sia nullo. Questa trasformazione introduce un errore nella lettura; nel caso di una linea adattata, la lettura assume un valore $m = |\mathbf{R}_r|$, mentre è nulla per $\rho = -R_r$.

Questa ultima osservazione offre subito un metodo per la misura di R_r , caricando la linea con un'impedenza variabile, e regolando quest'ultima fino ad ottenere la lettura nulla dell'onda riflessa; il valore della reiezione potrà quindi essere ottenuto per confronto con l'impedenza della rete regolabile nota. È però anche possibile ottenerne il valore mediante una doppia misura eseguita con due carichi diversi. Nel nostro caso, i carichi più semplici, vale a dire il cortocircuito ed il circuito aperto, danno entrambi un valore unitario a μ ; si potranno però scegliere due carichi di valore semplice, come ad esempio:

$$Z_L = Z_0 \quad , \text{ che dà } \rho = 0, \text{ e}$$

$$Z_L = 3Z_0 \quad , \text{ che dà } \rho = 1/2.$$

Effettuando quindi due misure sulla linea, una volta adattata ed una volta caricata su $3Z_0$, si avranno due letture, che potremo chiamare μ_1 e μ_3 rispettivamente:

$$\begin{cases} m_1 = |R_r| \\ m_3 = \frac{|2R_r + 1|}{|2 + R_r|} \end{cases}$$

dove la prima fornisce direttamente il modulo del rapporto di reiezione; ponendo a sistema le due equazioni e risolvendo, si può facilmente ottenere il valore della parte reale del rapporto di reiezione:

$$\text{Re}[R_r] = \frac{m_1^2 m_3^2 + 4(m_3^2 - m_1^2) - 1}{4(1 - m_3^2)}.$$

So noti comunque che anche la conoscenza del valore esatto di R_r non consente un aggiustamento della scala dello strumento, in quanto il suo effetto è diverso secondo l'angolo di fase dell'impedenza di carico della linea. Perciò ogni sforzo dovrà essere rivolto alla sua minimizzazione, e la sua conoscenza potrà solo dare una indicazione della bontà del risultato ottenuto.

Poiché il rapporto di onde stazionarie (ROS) è una funzione diretta del modulo del coefficiente di riflessione, la scala dello strumento potrà anche essere tarata direttamente in ROS; in questo caso la lettura effettuata sarà espressa, se il rapporto di reiezione è nullo, da:

$$I = \frac{|V_D| + |V_R|}{|V_D| - |V_R|} = \frac{|V_+| + |V_-|}{|V_+| - |V_-|} = S \quad , \text{ che è appunto il rapporto di onde stazionarie in linea.}$$

Nel caso reale, la lettura di ciascuna componente è viziata dalla presenza di una certa frazione dell'altra, per cui si avrà invece:

$$I = \frac{|G_F V_+ + G_B V_-| + |G_B V_+ + G_F V_-|}{|G_F V_+ + G_B V_-| - |G_B V_+ + G_F V_-|}$$

La lettura, introducendo come prima il rapporto di reiezione R_r e ricordando la definizione del coefficiente di riflessione, risulta dunque:

$$I = \frac{|1 + rR_r| + |R_r + r|}{|1 + rR_r| - |R_r + r|} ,$$

che si riduce alla definizione del ROS quando il rapporto di reiezione è nullo, ma tende all'infinito quando R_r si approssima a ± 1 .

2. CONFIGURAZIONI CIRCUITALI

2.1 Configurazione di base con partitore RC

La più semplice delle configurazioni circuitali è rappresentata in Figura 3 (a lato), e consiste in un partitore RC che preleva una parte della tensione ed un induttore accoppiato alla linea di trasmissione con una mutua induzione M .

Se l'uscita del circuito è aperta (condizione ben approssimata nella realtà), la tensione sul punto V' è data da:

$$V' = \frac{j\omega RC}{j\omega RC + 1} (V_+ + V_-) \cong j\omega RC (V_+ + V_-) \quad \text{se } j\omega RC \ll 1.$$

La tensione sull'induttore è invece data da:

$$V_L = j\omega M \frac{V_+ - V_-}{Z_0},$$

perciò la tensione totale di uscita è data da:

$$V \cong j\omega RC (V_+ + V_-) + j\omega \frac{M}{Z_0} (V_+ - V_-) = j\omega \left[\left(RC + \frac{M}{Z_0} \right) V_+ + \left(RC - \frac{M}{Z_0} \right) V_- \right]$$

Se viene quindi imposta la condizione di equilibrio:

$$RC = \frac{M}{Z_0}$$

si ottiene che l'uscita è una misura diretta della tensione dell'onda incidente:

$$V \cong j\omega \left(RC + \frac{M}{Z_0} \right) V_+ = 2j\omega \frac{M}{Z_0} V_+$$

I limiti fondamentali di questa configurazione circuitali consistono nella forte dipendenza dalla frequenza della costante di misura, e quindi della sensibilità, e nel fatto che all'aumentare della frequenza la validità dell'approssimazione iniziale $j\omega RC \ll 1$ va via via riducendosi. L'espressione esatta della tensione di uscita è:

$$V = \frac{j\omega RC}{j\omega RC + 1} (V_+ + V_-) + j\omega \frac{M}{Z_0} (V_+ - V_-) \quad , \text{ che semplificata e raccolta dà:}$$

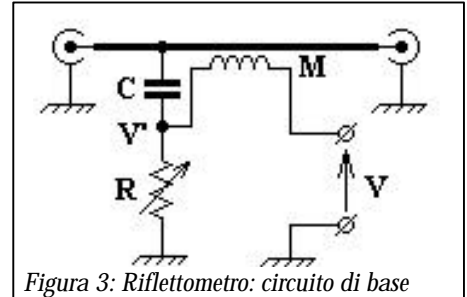


Figura 3: Riflettometro: circuito di base

$$V = \frac{j\omega \left(RC + \frac{M}{Z_0} \right) - \omega^2 RC \frac{M}{Z_0}}{j\omega RC + 1} V_+ + \frac{j\omega \left(RC - \frac{M}{Z_0} \right) + \omega^2 RC \frac{M}{Z_0}}{j\omega RC + 1} V_-$$

Nella condizione di equilibrio, questa espressione diventa:

$$V = \frac{2j\omega \frac{M}{Z_0} - \left(\omega \frac{M}{Z_0} \right)^2}{j\omega \frac{M}{Z_0} + 1} V_+ + \frac{\left(\omega \frac{M}{Z_0} \right)^2}{j\omega \frac{M}{Z_0} + 1} V_- ,$$

in cui le risposte alle onde diretta ed inversa sono comunque differenti. Possiamo introdurre la reiezione all'onda riflessa, che è data da:

$$R_r = \frac{G_B}{G_F} = \frac{\left(\omega \frac{M}{Z_0} \right)^2}{2j\omega \frac{M}{Z_0} - \left(\omega \frac{M}{Z_0} \right)^2} = \frac{1}{j \frac{2Z_0}{\omega M} - 1} \approx -j \frac{\omega RC}{2} ,$$

dove nell'ultimo passaggio si è attesa la definizione della condizione d'equilibrio.

All'aumentare della frequenza, il peggiorare della reiezione alla componente indesiderata comporta, come si è già visto, un *aumento* della lettura del ROS.

La potenza assorbita dal riflettometro, ritenendo essenzialmente trascurabile il consumo del voltmetro, non è altro che la potenza dissipata sulla resistenza R, e vale quindi:

$$P_R = \operatorname{Re}[VI^*] = \frac{|V_+ + V_-|^2}{R} \cdot \frac{\omega^2 R^2 C^2}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \cong \frac{|V_+ + V_-|^2}{R} \left(\omega \frac{M}{Z_0} \right)^2 .$$

Si osservi che la potenza dissipata su R dipende sia dalla potenza diretta che da quella riflessa, nonché dalla relazione di fase tra le onde nel punto in cui avviene la misura. Possiamo calcolare il suo limite massimo nel caso peggiore, che, espressa in funzione della potenza massima disponibile, risulta:

$$P_{R,\max} = (4\omega^2 MC) P_{TX}$$

2.2 Configurazione con partitore C-C

In alternativa alla configurazione precedente, si può utilizzare quella schematizzata nella Figura 4. Poiché questa configurazione circuitali è meno intuitiva della precedente, converrà procedere senz'altro allo studio analitico; come nel caso precedente, supporremo però che il voltmetro abbia consumo nullo, cosicché il partitore si possa considerare non caricato. L'espressione completa della tensione misurata V diventa in questo caso:

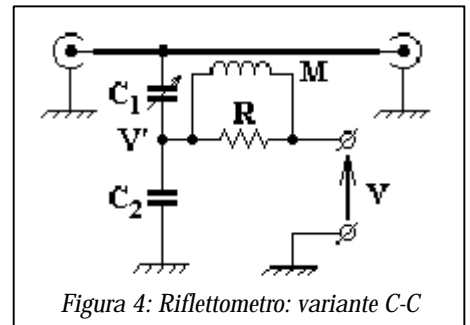


Figura 4: Riflettometro: variante C-C

$$V = \left[\frac{C_1}{C_1 + C_2} + \frac{s \frac{M}{Z_0}}{1 + s \frac{L_2}{R_2}} \right] V_+ + \left[\frac{C_1}{C_1 + C_2} - \frac{s \frac{M}{Z_0}}{1 + s \frac{L_2}{R_2}} \right] V_-$$

Le espressioni del guadagno diventano allora:

$$\left\{ \begin{aligned} G_F &= \frac{C_1}{C_1 + C_2} + \frac{s \frac{M}{Z_0}}{1 + s \frac{L_2}{R_2}} \\ G_B &= \frac{C_1}{C_1 + C_2} - \frac{s \frac{M}{Z_0}}{1 + s \frac{L_2}{R_2}} \end{aligned} \right.$$

Come nel caso precedente, osserviamo che non esiste una scelta dei valori dei componenti tale che espressione di G_B sia identicamente nulla; sarà perciò necessario ricorrere nuovamente ad un'approssimazione; poniamo quindi:

$$\omega L_2 \gg R_2$$

Con questa condizione, i due guadagni divengono:

$$\left\{ \begin{aligned} G_F &\cong \frac{C_1}{C_1 + C_2} + \frac{MR_2}{Z_0 L_2} \\ G_B &\cong \frac{C_1}{C_1 + C_2} - \frac{MR_2}{Z_0 L_2} \end{aligned} \right.$$

La condizione di unilaterialità per questo circuito, cioè la condizione per la quale si annulla il guadagno relativo alla componente indesiderata della tensione misurata, è data da:

$$\frac{C_1}{C_1 + C_2} = \frac{MR_2}{Z_0 L_2}$$

In questa equazione c'è sovrabbondanza di parametri, per cui alcuni di essi potranno essere fissati ad arbitrio; una scelta semplice è quella di fissare innanzitutto il rapporto del partitore capacitivo in base alla sensibilità

desiderata dello strumento ed alla potenza massima che esso deve sopportare. Si potrà quindi procedere a fissare i valori di induttanza e resistenza in modo che la condizione di approssimazione sia sempre rispettata. Infine si potrà fissare il valore di M che soddisfa l'uguaglianza. Si tenga ancora presente che, in generale, l'induttanza del secondario e quella mutua non sono indipendenti tra loro; ad esempio, nel caso in cui la mutua induttanza sia ottenuta attraverso un accoppiamento passante per un toroide, come descritto nel capitolo successivo, l'induttanza è, con ottima approssimazione, pari ad N volte la mutua induttanza, dove N è il numero di spire del secondario, per cui le condizioni da rispettare contemporaneamente sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_2 \gg \frac{R_2}{2pf_{\min}}, \text{ che in pratica può essere scritta come } L_2 \approx (10 \div 20) \frac{R_2}{2pf_{\min}} \\ R_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} NZ_0 \end{array} \right.$$

Il rapporto di reiezione per questo circuito è dato da:

$$R_r = \frac{G_B}{G_F} = \frac{1}{1 + j\omega \frac{2L_2}{R_2}} \approx \frac{R_2}{j\omega 2L_2}$$

Osserviamo infine che, rispetto alla configurazione precedente, questa soluzione circuitali presenta il vantaggio fondamentale che i guadagni, e quindi la *sensibilità* dello strumento, almeno in prima approssimazione, sono indipendenti dalla frequenza. Per contro, la potenza dissipata dal circuito di misura normalmente è superiore a quella del circuito precedente; nelle ipotesi sopra esposte, si ha:

$$P_{R_2} = \frac{|V_+ - V_-|^2}{R_2} \cdot \frac{\left(\omega \frac{M}{Z_0}\right)^2}{1 + \left(\omega \frac{L_2}{R_2}\right)^2} \cong \frac{|V_+ - V_-|^2}{Z_0} \cdot \frac{M^2 R_2}{Z_0 L_2^2} \leq 4P_{TX} \frac{M^2 R_2}{Z_0 L_2^2}$$

Nel caso dell'accoppiamento a toroide, considerando l'espressione trovata per il valore del resistore di carico al secondario R_2 , questa espressione si può scrivere anche come:

$$P_{R_2} \leq \frac{4}{N} \cdot \frac{C_1}{C_1 + C_2} P_{TX},$$

che dà un limite pratico alla sensibilità dello strumento in funzione della potenza massima.

2.3 Configurazione a doppio partitore

Il circuito a doppio partitore, illustrato nello schema a fianco, presenta rispetto ai precedenti il vantaggio di offrire, almeno in teoria, un perfetto annullamento della componente d'onda indesiderata nella misura della tensione, così da permettere di misurare con precisione anche valori di coefficienti di riflessione molto bassi; nella solita ipotesi di consumo nullo del voltmetro, la risposta del circuito è data da:

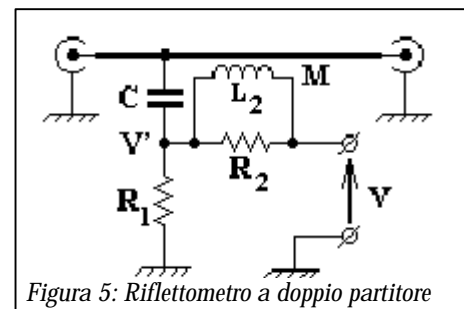
$$V = \left[\frac{sR_1C}{1+sR_1C} + \frac{s\frac{M}{Z_0}}{1+s\frac{L_2}{R_2}} \right] V_+ + \left[\frac{sR_1C}{1+sR_1C} - \frac{s\frac{M}{Z_0}}{1+s\frac{L_2}{R_2}} \right] V_-$$

La condizione di unilaterali , che stavolta non richiede particolari ipotesi semplificatrici,   data dall'identit :

$$sL_2R_1C + R_2R_1C \equiv s\frac{M}{Z_0}R_2R_1C + \frac{M}{Z_0}R_2$$

che d  origine ad una coppia di condizioni da soddisfare contemporaneamente:

$$\begin{cases} \frac{L_2}{R_2} = \frac{M}{Z_0} \\ R_1C = \frac{M}{Z_0} \end{cases}$$



In queste ipotesi, il rapporto di reiezione   identicamente nullo, per cui la *precisione* dello strumento non dipende dalla frequenza (salvo naturalmente le dipendenze proprie dei componenti e degli effetti parassiti).

Attesa la condizione di cui sopra, per i guadagni del circuito si avranno allora le seguenti espressioni:

$$\begin{cases} G_F = 2 \frac{j\omega \frac{M}{Z_0}}{1 + j\omega \frac{M}{Z_0}} \\ G_B \equiv 0 \end{cases}$$

dalla quale si pu  osservare che la sensibilit  dello strumento presenta una frequenza di taglio inferiore determinata da:

$$f_{\min} = \frac{Z_0}{2\pi M}$$

Le potenze dissipate nello strumento sono date dalle espressioni gi  trovate:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{R_1} = \frac{|V_+ + V_-|^2}{R_1} \cdot \frac{(\omega R_1 C)^2}{1 + (\omega R_1 C)^2} = \frac{|V_+ + V_-|^2}{R_1} \cdot \frac{\left(\omega \frac{M}{Z_0}\right)^2}{1 + \left(\omega \frac{M}{Z_0}\right)^2} \\ P_{R_2} = \frac{|V_+ + V_-|^2}{R_2} \cdot \frac{\left(\omega \frac{M}{Z_0}\right)^2}{1 + \left(\omega \frac{L_2}{R_2}\right)^2} = \frac{|V_+ + V_-|^2}{R_2} \cdot \frac{\left(\omega \frac{M}{Z_0}\right)^2}{1 + \left(\omega \frac{M}{Z_0}\right)^2} \end{array} \right. .$$

Possiamo osservare che la dissipazione aumenta al crescere della frequenza, tendendo ad un valore limite; i valori massimi della dissipazione sono quindi dati da:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{\max, R_1} = 4P_{TX} \frac{Z_0}{R_1} \\ P_{\max, R_2} = 4P_{TX} \frac{Z_0}{R_2} \end{array} \right. .$$

Vale la pena di osservare che questa dissipazione è più che significativa, per cui questa versione dello strumento si presta bene solo ad un utilizzo per potenze piuttosto modeste.

3. ACCOPPIAMENTO MEDIANTE INDUTTORE TOROIDALE

3.1 Toro a sezione circolare

3.1.1 Calcolo del flusso magnetico nel toro

Per calcolare il flusso magnetico generato in un toro da una corrente I che ne percorra l'asse principale (ved. figura 6), consideriamo il campo magnetizzante H prodotto dalla stessa corrente; poiché il sistema è dotato di una completa simmetria cilindrica, il campo del filo non dipenderà dalla coordinata assiale y , ma solo da quella radiale r . Presa una circonferenza C di raggio r il cui centro cada nell'asse principale del sistema, e giacente su un piano ad esso normale, si avrà:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2\pi r H = I \quad , \text{ ovvero:}$$

$$H(r, y) = \frac{I}{2\pi r} .$$

Supponendo isotropo il mezzo circostante, il che nel caso di ferriti sottoposte a campi magnetici è vero solo in prima approssimazione, si potrà scrivere:

$$B = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r} .$$

Il flusso attraverso il toro si potrà calcolare prendendo una sezione S del toro ottenuta con un piano normale alla circonferenza C e passante per l'asse principale; la sezione ottenuta è circolare. Prendiamo un sistema di coordinate cartesiane rettangolari, con origine nel centro della circonferenza C ed asse x formato dall'intersezione tra il piano della circonferenza ed il piano secante definito sopra; in questo sistema di riferimento la sezione circolare è descritta dall'equazione:

$$(x - R)^2 + y^2 = r_t^2 \quad , \text{ da cui si ha subito : } y = \pm \sqrt{r_t^2 - (x - R)^2} \quad ,$$

dove R è il raggio del toro, mentre r_t è il raggio della sua sezione. Il flusso si può quindi scrivere mediante l'integrale di superficie sulla sezione S :

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu \mathbf{I}}{\rho} \int_{R-r_t}^{R+r_t} \frac{\sqrt{r_t^2 - (x - R)^2}}{x} dx = \frac{\mu \mathbf{I}}{\rho} \int_{-r_t}^{r_t} \frac{\sqrt{r_t^2 - \mathbf{x}^2}}{\mathbf{x} + R} d\mathbf{x} \quad , \text{ dove } \mathbf{x} = x - R$$

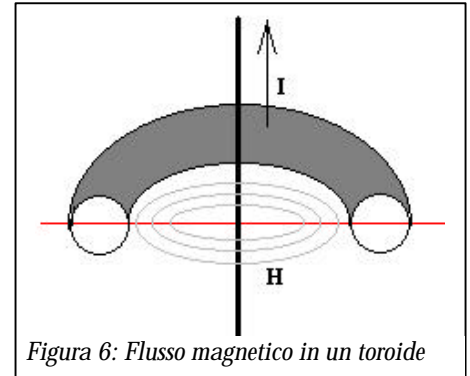


Figura 6: Flusso magnetico in un toroide

Questo integrale potrà essere agevolmente calcolato per via numerica, fornendo il valore esatto del flusso che attraversa il toro.

La mutua induttanza tra il conduttore assiale ed un avvolgimento solenoidale sul toro, se l'avvolgimento consiste di N spire, è data con buona approssimazione da $M = N\phi/I$.

3.1.2 Calcolo approssimato del flusso

Per gli scopi pratici, potrà essere utile ottenere un'espressione approssimata del flusso che possa essere calcolata senza bisogno di integrare numericamente l'espressione sopra trovata. A questo scopo, osserviamo che se la sezione del toro è abbastanza piccola, cioè se $r_t \ll R$, il campo indotto sarà circa uniforme e potrà quindi essere sostituito, senza commettere un grande errore, da un opportuno valore costante.

A questo scopo, ricordando che il campo non dipende dalla coordinata y , si presta bene il valore medio del campo calcolato lungo il raggio giacente sul piano di mezzeria del toro, che è facilmente calcolabile ed è dato da:

$$\langle B \rangle = \frac{mI}{2p} \cdot \frac{1}{2r_t} \int_{R-r_t}^{R+r_t} \frac{dx}{x} = \frac{mI}{2pR} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{R}{r_t} \ln \left(\frac{R+r_t}{R-r_t} \right) \right],$$

dove è facile verificare che la quantità tra parentesi quadre è circa unitaria. Sostituendo a questo valore medio il valore centrale:

$$B_c = \frac{mI}{2pR}$$

si commette un errore abbastanza piccolo; si può infatti constatare che la correzione per $R/r_t = 2$ è solo del **9%**, quindi è già piccola rispetto alle tolleranze tipiche della componentistica elettronica, riducendosi già al **4%** per $R/r_t = 3$. Inoltre, nel corso dell'integrazione, l'errore commesso si riduce ulteriormente, innanzitutto perché la larghezza dell'intervallo d'integrazione diminuisce fino ad annullarsi allontanandosi dalla mezzeria, e poi perché l'errore ha segno inverso al di qua ed al di là del cerchio medio del toroide, compensandosi parzialmente. In tutti i casi normali si potrà quindi stimare il flusso nel toroide considerando il campo uniformemente costante e di valore pari a quello nel centro della sezione del toroide, commettendo un errore *del tutto accettabile*.

Si noti per inciso che le caratteristiche tecniche dei nuclei toroidali in commercio tengono conto di questa correzione fornendo una circonferenza efficace \mathbf{l}_e ed una sezione efficace \mathbf{S}_e del nucleo comprendenti queste correzioni, così da poter calcolare il flusso tramite la formula relativa al valore medio del campo:

$$\Phi \cong \frac{\mathbf{mS}}{2pR} I = \frac{\mathbf{m}r_t^2}{2R} I, \text{ ossia}$$

$$\Phi \cong \frac{\mathbf{mS}_e}{l_e} I$$

La mutua induzione con un avvolgimento formato di N spire sul toroide è data quindi, con buona approssimazione, da:

$$M = \frac{\Phi_C}{I} = \frac{N\Phi}{I} \cong \frac{\mathbf{mSN}}{2pR}$$

dove \mathbf{f}_C è il flusso concatenato dall'avvolgimento, mentre l'induttanza dell'avvolgimento stesso è data da:

$$L_2 \cong \frac{\mathbf{mSN}^2}{2pR} = NM .$$

3.2 Toroide a sezione rettangolare

Gran parte dei toroidi in commercio sono caratterizzati da una sezione non circolare, ma rettangolare, salvo eventuali smussature degli spigoli che per semplicità considereremo trascurabili.

Per questo caso si possono ripetere sostanzialmente le stesse considerazioni viste sopra per il caso del toto a sezione circolare; la differenza fondamentale è che però, in questo caso, l'integrale superficiale che dà il flusso è facilmente risolvibile per via analitica; detti r_e ed r_i rispettivamente il raggio esterno ed interno del toroide, ed h la sua altezza, si ha infatti:

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \bar{B} \cdot \bar{dS} = \int_{r_i}^{r_e} dx \int_{-h/2}^{h/2} dy \frac{\mathbf{mI}}{2px} = \frac{\mathbf{mhI}}{2p} \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right) = \frac{\mathbf{mSI}}{2p} \cdot \frac{\ln(r_e) - \ln(r_i)}{r_e - r_i} .$$

Da questa, analogamente a quanto si è fatto nel caso precedente, si possono facilmente ricavare le espressioni delle induttanze:

$$\begin{cases} M = \frac{\mathbf{mhN}}{2p} \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right) \\ L_2 = \frac{\mathbf{mhN}^2}{2p} \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right) = NM \end{cases}$$

La formula inversa che dà il numero N di spire a partire dalla mutua induzione desiderata, è:

$$N = \frac{2pM}{\mathbf{mh} \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)}$$

4. ESEMPIO DI PROGETTO

Vogliamo progettare un rosmetro con le seguenti specifiche:

Potenza minima di lavoro	$P_{\min} = 5 \text{ W}$
Potenza massima di lavoro	$P_{\max} = 1000 \text{ W}$
Frequenza minima di lavoro	$F_{\min} = 1.5 \text{ MHz}$
Frequenza massima di lavoro	$F_{\max} = 30 \text{ MHz}$
Impedenza caratteristica	$Z_0 = 50/75 \Omega$
Microamperometro impiegato	$I_{FS} = 50 \mu\text{A}$, $R_i = 2\text{k}5\Omega$

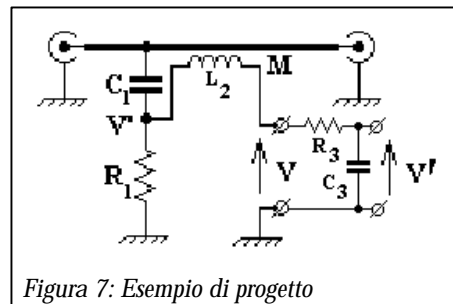


Figura 7: Esempio di progetto

In considerazione dell'elevata potenza massima che si vuole utilizzare, la soluzione circuitale che più si presta è quella di base, a partitore RC; poiché però questa configurazione presenta un notevole dipendenza della tensione in uscita dalla frequenza, come si vede dalla sua risposta generale:

$$V = \left(\frac{sR_1C_1}{1+sR_1C_1} + s \frac{M}{Z_0} \right) V_+ + \left(\frac{sR_1C_1}{1+sR_1C_1} - s \frac{M}{Z_0} \right) V_- ,$$

porremo in cascata all'uscita un semplice passa-basso RC, che ha risposta in frequenza:

$$G_c = \frac{1}{1+sR_3C_3}$$

così da linearizzare la risposta globale del circuito.

Consideriamo per primo il caso in cui $Z_0 = 50 \Omega$; dobbiamo innanzitutto soddisfare le condizioni di equilibrio e di approssimazione:

$$\begin{cases} \omega R_1 C_1 \ll 1 \\ R_1 C_1 = \frac{M}{Z_0} \end{cases}$$

Dalla prima di queste condizioni, potremo scrivere:

$$R_1 C_1 < \frac{1}{(10) 2\pi f_{\max}} \cong 5.3 \times 10^{-10} [\text{s}]$$

Se, per comodità, fissiamo $R_1 = Z_0 = 50 \Omega$, otteniamo subito $C_1 = 10.6 \text{ pF}$; la seconda condizione ci dà quindi $M = 26.5 \text{ nH}$, da cui si può trovare il numero di spire richieste per l'avvolgimento toroidale, mediante la formula:

$$N = \frac{2\pi M}{\mu h \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)}$$

Poiché la mutua induzione richiesta è piuttosto piccola, è necessario scegliere un materiale a bassa permeabilità; useremo pertanto un nucleo economico e molto comune, di tipo T50-6, che presenta le seguenti caratteristiche:

Permeabilità	$\mu_r = 10$; $\mu = 1.2566 \times 10^{-5}$ [H/m]
Permeabilità del vuoto	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ [H/m]
Raggio esterno	$r_e = 6.035 \times 10^{-3}$ [m]
Raggio interno	$r_i = 3.57 \times 10^{-3}$ [m]
Altezza	$h = 4.78 \times 10^{-3}$ [m]

Fatti i debiti calcoli, si trova un numero di spire pari a 4.8, che si arrotonderà senz'altro a $\boxed{N = 5}$; è necessario ora verificare l'effettivo valore della mutua induttanza che si ottiene, tramite la formula:

$$M = \frac{\mu h N}{2p} \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right) \cong 27.5 \text{ nH}$$

Questa correzione comporta una corrispondente correzione del valore della costante di tempo $R_1 C_1$; se decidiamo, com'è conveniente, di lasciare inalterato il valore di $\boxed{R_1 = 50 \text{ W}}$, si dovrà avere $\boxed{C_1 = 11 \text{ pF}}$.

Resta da valorizzare la costante di tempo del filtro RC passa-basso, la cui frequenza di taglio, per garantire una sufficiente linearità nella misura della potenza, dovrà essere minore della minima frequenza di lavoro del rosmetro, e per garantire una sufficiente sensibilità dovrà essere la più alta possibile. Infatti si ha:

$$f_{\min} = \frac{1}{2pR_3C_3}, \text{ da cui } R_3C_3 \geq \frac{1}{2pf_{\min}}$$

$$|G_{\min}| = \frac{\sqrt{2}M}{Z_0R_3C_3}, \text{ da cui } M \geq \frac{|G_{\min}|Z_0R_3C_3}{\sqrt{2}}$$

Un primo valore di tentativo può essere $f_1 = 1 \text{ MHz}$, da cui si trova una costante di tempo $\tau_3 = 1.59 \times 10^{-7} \text{ s}$, valore che arrotonderemo a $\boxed{\tau_3 = 150 \times 10^{-9} \text{ s}}$, scegliendo per i componenti i valori $\boxed{R_3 = 1000 \text{ W}}$ e $\boxed{C_3 = 150 \text{ pF}}$.

La risposta complessiva del circuito di misura è data da:

$$G = G_F G_C = \frac{j\omega}{j\omega + \frac{1}{\tau_3}} \cdot \frac{2M}{Z_0},$$

che può essere valutata e tabulata a varie frequenze per verificare l'effettiva linearità della misura. La minima tensione necessaria per portare a fondo scala il microamperometro è data da:

$$V_{FS} = I_{FS} \times R_i = 50 \mu\text{A} \times 2,5 \text{ k}\Omega = 125 \text{ mV}$$

Dobbiamo garantire il funzionamento del rosmetro con una minima potenza trasmessa $P_{\min} = 5 \text{ W}$, che corrisponde ad una tensione di picco dell'onda incidente nella linea:

$$V_{+,pk \min} = \sqrt{2P_{\min} Z_0} \cong 22.4 [\text{V}]$$

Per soddisfare il requisito di sensibilità dovremo avere una risposta sufficiente a portare a fondo scala il microamperometro con la potenza minima prevista ed alla frequenza minima prevista, per cui si dovrà avere:

$$|G| \geq \frac{V_{FS}}{V_{+,pk \min}}$$

La tabella che segue espone i valori dei vari parametri di funzionamento del circuito in corrispondenza alle frequenze di interesse radioamatoriale, e permette di verificare che i valori ottenuti siano effettivamente conformi alle specifiche di progetto.

L'ispezione diretta dei risultati dimostra che il comportamento è buono nell'ambito delle bande amatoriali HF, mentre è solo discreto nella banda dei 50 MHz, dove la lettura di ros su un carico adattato sale a circa 1,2. Infine il comportamento è decisamente mediocre nella banda dei 144 MHz, dove la lettura minima sale a 1,64 ed oltre. Anche il comportamento come wattmetro è accettabile nell'ambito delle banda HF, entro le quali la dispersione della misura si mantiene entro $\pm 0.7 \text{ dB}$.

Parametri del circuito	Valori parametri	
capacità di accoppiamento	1.10E-11	Farad
resistenza di accoppiamento	50	Ohm
mutua induttanza	2.75E-08	Henry
impedenza caratteristica	50	Ohm
Resistenza di correzione R2	1000	Ohm
Capacità di correzione C2	1.50E-10	Farad
Costante di tempo correttiva	1.50E-07	secondi
Sensibilità strumento [uA]	5.00E+01	uA
resistenza interna [Ohm]	2.50E+03	Ohm

Banda [MHz]	1	1.5	1.8	3.5	7	14	21	28	30	50	144
frequenza F [MHz]	1.000E+06	1.500E+06	1.800E+06	3.500E+06	7.000E+06	1.400E+07	2.100E+07	2.800E+07	3.000E+07	5.000E+07	1.440E+08
pulsazione w	6.283E+06	9.425E+06	1.131E+07	2.199E+07	4.398E+07	8.796E+07	1.319E+08	1.759E+08	1.885E+08	3.142E+08	9.048E+08
reattanza Xc	1.447E+04	9.646E+03	8.038E+03	4.134E+03	2.067E+03	1.033E+03	6.890E+02	5.167E+02	4.823E+02	2.894E+02	1.005E+02
accoppiamento wM/Zo	3.456E-03	5.184E-03	6.220E-03	1.210E-02	2.419E-02	4.838E-02	7.257E-02	9.676E-02	1.037E-01	1.728E-01	4.976E-01
guadagno forward Gf	6.911E-03	1.037E-02	1.244E-02	2.419E-02	4.837E-02	9.668E-02	1.449E-01	1.928E-01	2.065E-01	3.418E-01	9.182E-01
Guadagno backward Gb	1.194E-05	2.687E-05	3.869E-05	1.463E-04	5.850E-04	2.338E-03	5.253E-03	9.319E-03	1.069E-02	2.942E-02	2.217E-01
Reiezione onda inversa Rr	1.728E-03	2.592E-03	3.110E-03	6.047E-03	1.209E-02	2.418E-02	3.626E-02	4.832E-02	5.177E-02	8.607E-02	2.415E-01
lettura rosmetro su Zl=Zo	1.00	1.01	1.01	1.01	1.02	1.05	1.08	1.10	1.11	1.19	1.64
wR2C2	9.425E-01	1.414E+00	1.696E+00	3.299E+00	6.597E+00	1.319E+01	1.979E+01	2.639E+01	2.827E+01	4.712E+01	1.357E+02
guadagno filtro correttore Gc	7.277E-01	5.775E-01	5.078E-01	2.901E-01	1.499E-01	7.557E-02	5.046E-02	3.787E-02	3.535E-02	2.122E-02	7.368E-03
guadagno complessivo	5.030E-03	5.987E-03	6.317E-03	7.018E-03	7.249E-03	7.306E-03	7.310E-03	7.303E-03	7.299E-03	7.252E-03	6.765E-03
guadagno complessivo [dB]	-46.0	-44.5	-44.0	-43.1	-42.8	-42.7	-42.7	-42.7	-42.7	-42.7	-43.4
Guadagno medio (bande HF)	-42.9	[dB], entro	1.3	[dB]							
Guadagno medio (1-144MHz)	-43.4	[dB], entro	3.2	[dB]							
Tensione minima in linea	17.57	14.76	13.99	12.60	12.19	12.10	12.09	12.10	12.11	12.19	13.06
Potenza minima	6.2	4.4	3.9	3.2	3.0	2.9	2.9	2.9	2.9	3.0	3.4