Achille, la tartaruga e la nascita delle serie

Luca Granieri*

1 I paradossi di Zenone

Zenone di Elea (V secola a.C.) è passato alla storia per avere ideato una serie di argomenti paradossali a sostegno delle tesi filosofiche del suo maestro (e amante) Parmenide. Quest'ultimo, detto in soldoni, sosteneva l'impossibilità di qualsiasi divenire. Per lui la Verità (o l'Uno, o Dio, o il Logos o l'Essere, a seconda dei gusti) era qualcosa di unico, intero, immobile, ingenerato. Quindi ciò che appare come molteplice non è altro che illusione.

L'argomento più celebre di Zenone è senz'altro quello che coinvolge Achille, famoso per la sua velocità, e la tartaruga, rappresentante per antonomasia della lentezza. Ora supponiamo che la tartaruga sfidi Achille ad acciuffarla, e che questi le conceda magnanimamente un vantaggio iniziale. È evidente che nessun bookmaker inglese accetterebbe scommesse su quest'evento, essendo la vittoria di Achille inevitabile. Zenone invece afferma che quel vantaggio iniziale è fatale per Achille che, per quanti sforzi possa fare, non riuscirà mai a raggiungere la tartaruga.

Prima, infatti, dovrà percorrere la distanza che li separa, ma nel frattempo la tartaruga si sarà spostata di un po', quindi dovrà coprire l'ulteriore distanza, mentre la tartaruga si sposterà di un altro po', e così di seguito in una corsa infinita.

Ma Zenone si spinge ancora più in là dicendo che non si può arrivare da nessuna parte. Prima, infatti, bisognerebbe arrivare a metà strada, poi a tre quarti di strada, ecc...

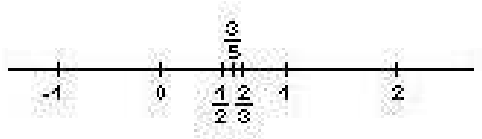
Allo stesso modo non si può nemmeno partire, perchè altrimenti bisognerebbe percorrere una distanza, ma prima bisognerebbe percorrerne la metà, e prima ancora la metà della metà, e così via.

Ma c'è dell'altro, non si può nemmeno essere in viaggio. Considerate ad esempio una freccia scoccata da un arciere. Il buon senso ci direbbe di stare alla larga dalla sua traiettoria per non rischiare la vita. Ma Zenone ci direbe di non preoccuparci, perché la freccia non è in viaggio. Non ci credete? Allora immaginate di scattare una fotografia ad ogni istante. Vedrete che in ogni istante la freccia è ferma. Allora come fa una successione di immobilità

*Dipartimento di Matematica "L. Tonelli"
Università di Pisa, via Buonarroti 2, 56127 Pisa, Italy. granieri@mail.dm.unipi.it

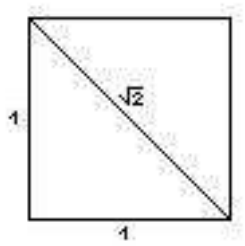
ad essere un movimento?
Eppure i fatti che Zenone rende paradossali fanno parte della nostra esperienza quotidiana: che dire, allora?
Aristotele, ad esempio, credeva di risolvere i paradossi distinguendo tra *infinito attuale* e *infinito potenziale*, e poiché l'infinita divisibilità di un segmento è solo potenziale, allora non c'è contraddizione, in quanto solo un'infinità attuale di punti non si può percorrere fisicamente.
Tuttavia, è chiaro che in qualche modo bisogna fare i conti con questo infinito procedimento, giacché Zenone ci replicherà che un processo infinito (se vogliamo potenziale) richiederà pur sempre un tempo infinito per essere completato: non è forse vero?
A questo proposito dobbiamo osservare che c'è una certa disparità di trattamento tra spazio e tempo. In effetti il percorso dei nostri eroi viene suddiviso in infinite parti, mentre altrettanto non è per il tempo, che sembra costituito soltanto dagli istanti corrispondenti alle varie posizioni della tartaruga.
Se, cioè, da una parte si ammette che una distanza assegnata possa essere costituita dal contributo di infinite distanze intermedie, dall'altra si nega che un intervallo temporale possa avere anch'esso la stessa struttura.
Dunque, come osserva Roberto Magari in [7], *il paradosso di Zenone mostra che o Achille non raggiunge la tartaruga, o lo spazio e il tempo devono in qualche modo essere legati: non è cosa da poco, anzi può essere stupefacente che si possa dimostrare così tanto con così poco.*
Allora anche il tempo dovrà essere trattato alla pari dello spazio. Abbiamo perciò bisogno di una teoria dello spazio e del tempo. Una tale teoria ci è offerta dal *calcolo infinitesimale*, di cui parleremo tra breve, che ha come base fondamentale la struttura dei numeri reali.

Ora, quando da un punto ci spostiamo ad un altro, abbiamo la forte impressione che il nostro movimento sia in qualche modo *continuo*, ovvero che le nostre posizioni successive si dispieghino una dopo l'altra senza salti o interruzioni di sorta. Lo stesso è naturalmente per lo scorrere del tempo. Dunque non è troppo sbagliato rappresentare queste posizioni magari su di una linea retta, che forse costituisce quanto di più vicino possiamo pensare a questa idea di continuità.



Ora, rappresentando le posizioni corrispondenti a numeri interi restano

dei buchi evidenti.
Ma tra 0 ed 1, per esempio, possiamo metterci 1/2, 3/5 , 2/3 , o tutte le frazioni che vogliamo. In questo modo le nostre posizioni si infittiscono rapidamente. A questo punto potremmo essere a posto, ma ancora manca qualcosa, ci sono ancora dei buchi. Come lo sappiamo? Ai tempi della scuola abbiamo di certo imparato che, a causa del teorema di Pitagora, la diagonale di un quadrato di lunghezza unitario deve essere pari a $\sqrt{2}$.



Ma già i pitagorici, con grande disappunto, si erano accorti che tale diagonale non può essere espressa come rapporto di due numeri interi; qualunque cosa essa sia, non è una frazione. Dunque, come ha osservato qualcuno, *non tutto ciò che è reale è razionale.*
Allora dobbiamo considerare il completamento dei numeri razionali, i numeri reali, che vanno a coprire tutti i buchi che le frazioni avevano lasciato. In questo modo ad ogni punto della retta corrisponde un numero reale e viceversa, ad ogni numero reale un punto della retta, tanto che quest'ultima viene anche detta *retta reale.*
Il concetto di *continuità* e il fatto che lo spazio ed il tempo possano essere descritti in termini di numeri reali è forse l'aspetto più dirompente del calcolo infinitesimale, introdotto dai matematici del XVII secolo (Newton e Leibniz soprattutto) per studiare il moto. Per maggiori dettagli sui numeri reali e il calcolo infinitesimale rimando il lettore al bel libro divulgativo [1]. Nel seguito vedremo come alcuni concetti del calcolo infinitesimale ci potranno essere utili per dire qualcosa sulle vicende di Achille e della tartaruga.

2 La nascita delle serie numeriche

Lo strumento fondamentale del calcolo infinitesimale è senz'altro la teoria dei *limiti.* Chi avesse dato uno sguardo all'appendice matematica, si sarà subito reso conto che si tratta di cose non troppo facili da digerire. Tuttavia cercherò di dare alcune idee principali, tenendo a mente che siamo interessati a dare un senso alla somma di infinite quantità, che nel paradosso di Zenone fanno la parte del leone.
Consideriamo dunque a_0, a_1 , $a_2 \ldots$, una sequenza di posizioni sulla nostra

retta reale. Parleremo allora di una *successione* che indicheremo con il simbolo:

$$(a_n)_{n\geq 1}$$

L'operazione di passaggio al limite risponde alla domanda se, nel dispiegarsi di tutte queste posizioni, ci stiamo avvicinando oppure no ad una posizione ben precisa. Ad esempio prendiamo la successione $(n)_{n\geq 0}$. Dunque stiamo prendendo le posizioni 0 , poi 1, poi 2 e così via. È chiaro che così facendo ci stiamo allontanando da qualsiasi posizione assegnata. Il matematico dice allora che la successione in questione diverge positivamente e in simboli scrive:

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$

Questa relazione si legge *limite per n che tende a + infinito di n è uguale a + infinito.*
Cosa diversa succede se si prende la successione $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$. Dunque stiamo prendendo 1 , poi 1/2 , poi 1/3 ecc...
È facile convincersi, magari munendosi di calcolatrice, che in questo caso ci stiamo avvicinando inesorabilmente a 0. In effetti facendo crescere il denominatore possiamo avvicinarci al valore nullo di quanto vogliamo. In questo caso scriveremo:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

A volte però l'operazione di limite non va a buon fine. Così è ad esempio per la successione $((-1)^n)_{n\geq 0}$. Dunque stiamo considerando 1 , poi -1 , poi ancora 1 e di nuovo -1 e così via. Pertanto stiamo oscillando tra due posizioni, come ci avviciniamo ad una subito ce ne allontaniamo di nuovo e poi ancora ritorniamo indietro ecc... proprio come a volte può capitare quando ci si rivolge agli uffici pubblici dove uno sportello ti rimanda ad un altro e viceversa. Bene, in questo caso semplicemente il limite non esiste, almeno non in senso classico.
A questo punto siamo pronti per tornare al nostro problema delle somme infinite. Andando per gradi possiamo pensare di porre

$$s_0 = a_0$$

$$s_1 = a_0 + a_1$$

$$\dots$$

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

Dove la lettera greca $\sum$ (sigma) sta per somma. In questo modo resta definita una successione $(s_n)_{n\geq 1}$ di somme parziali: ad ogni passo stiamo aggiungendo un termine in più.

Per il matematico allora il passo è breve. Se queste somme parziali si avvicinano ad un valore, questo valore potrà essere preso come somma degli infiniti addendi a_n. Gli oggetti così ottenuti (limiti di somme parziali) vengono chiamati serie numeriche di termine generale a_n e si indicano con il simbolo:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Ma può una somma di infiniti addendi dare luogo ad un valore ben determinato?
I matematici hanno cominciato a meditare su queste cose molto presto. Sembra che già Aristotele si fosse accorto che le serie geometriche di ragione minore di uno potessero avere una somma (per una dimostrazione di questo si veda l'appendice).
Tuttavia trattare procedimenti infiniti creava non poche difficoltà. Nel XIV secolo, ad esempio, Nicola Oresme dimostrò che la serie armonica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ è divergente. Egli la sostituiva con la serie a termini minori

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}) + \cdots$$

osservando che quest'ultima diverge perché è possibile ottenere tanti gruppi di termini quanti si vuole e di somma pari a $\frac{1}{2}$. Chiamati b_n i termini della nuova serie abbiamo che:

$$b_n \leq \frac{1}{n}$$

e quindi, a maggior ragione, anche la serie armonica deve divergere (si veda il criterio di confronto nell'appendice).
Dunque la serie diverge anche se le quantità che sommiamo sono molto piccole.
Tuttavia la necessità di considerare somme di infiniti termini sembrava emergere da molti problemi. Ancora nel XVI secolo un logico inglese (Richard Suiseth) risolse il seguente problema:
Se per tutta la prima metà di un dato intervallo di tempo una variazione continua con una certa intensità, per la successiva quarta parte con intensità doppia, per la seguente ottava parte con intensità tripla e cosi via all'infinito, allora l'intensità dell'intero intervallo sarà uguale al doppio dell'intensità iniziale.
In altri termini ciò equivale a dire che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = 2$$

La dimostrazione di Suiseth era lunga e tediosa, e ancora non era compreso bene cosa si volesse intendere per somma di infiniti termini. Tuttavia, l'importanza e l'utilità delle serie apparivano sempre più evidenti via via che

le ricerche proseguivano. Pietro Mengoli (1625 - 1686) imparò a trattare problemi sulle aree sottostanti le iperboli usando le serie. Egli si accorse, ad esempio, che la serie armonica a segno alterno $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ è convergente (il lettore volenteroso può controllare che la serie soddisfa il criterio di Leibniz).
I successi ottenuti con l'uso delle serie diventarono poi sempre più numerosi mano a mano che i matematici allargavano i confini della loro disciplina. Una delle loro principali utilità consiste nel calcolo di quantità speciali quali e , π , oppure il logaritmo e le funzioni trigonometriche. Newton, Leibniz, Eulero, Lagrange e molti altri si interessarono delle serie per questi e molti altri scopi, sia teorici che applicativi. Con il passare del tempo, i matematici si abituarono allora a coabitare con l'infinito e a maneggiarlo in maniera più (e a volte sin troppo) disinvolta. Così, grazie soprattutto all'approccio di Newton al calcolo infinitesimale, la nozione di somma infinita cessò di essere considerata paradossale e si accettò l'idea che ad essa potesse corrispondere un numero finito: il problema era determinare tale numero.
A questo proposito la serie a segno alterno$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n$, detta anche di Wallis, fu forse quella che più fece discutere nel settecento. Appariva chiaro che scrivendo la serie nella forma

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$$

la sua somma dovesse essere zero. Tuttavia, ridisponendo le parentesi si poteva scrivere:

$$1+(-1+1)+(-1+1)+\cdots$$

la cui somma doveva essere pari ad uno.
Si generava così l'indisponente paradosso:

$$0=1$$

Guido Grandi (1671- 1742) non solo accettò di buon grado questo risultato, ma addirittura suggerì il fatto che si era di fronte ad un paradosso paragonabile ai misteri del cristianesimo, e questa era la spiegazione di come Dio aveva creato il mondo dal nulla.
Chiamata S la somma della serie di Wallis, deve anche essere $S = 1 - S$, ovvero $S = \frac{1}{2}$, che è proprio il valore che Grandi proponeva.
Fra coloro che dissertarono sul valore della serie di Wallis, ci fu anche Leibniz, il quale optò salomonicamente per il valore $\frac{1}{2}$. Leibniz sosteneva infatti che le somme parziali della serie valgono 0 ed 1 alternatamente. Perciò i valori 0 ed 1 sono ugualmente probabili, e si dovrebbe quindi prendere come somma la loro media aritmetica, che è anche il valore più probabile.
Leibniz ammise che il ragionamento era più metafisico che matematico, ma sostenne che in fondo la matematica era più metafisica di quanto si ammettesse.

Comunque, questi ed altri paradossi, con i problemi ad essi collegati, permisero di arrivare in seguito alla definizione di somma di una serie come limite delle somme parziali, che abbiamo discusso all'inizio del paragrafo.
L'ambiguità precedente deriva appunto dal fatto di voler assegnare un valore definito ad una serie che non è convergente (indeterminata) e che oscilla tra 0 ed 1.
Così le serie diventano parte integrante del calcolo infinitesimale, che è forse la più grande realizzazione del XVII secolo e che ha aperto la strada alle conquiste più ardite e affascinanti del pensiero matematico e scientifico.

3 Risoluzione del paradosso di Achille e la tartaruga

Come abbiamo visto, una somma di infiniti termini non è necessariamente infinita, ma ad essa può corrispondere anche un valore finito.
Sembra che fu Gregorio di San Vincenzo (1584-1667) il primo ad introdurre il concetto di convergenza di una serie come limite delle somme parziali. Egli applicò subito questa nozione al paradosso di Zenone, considerando che l'iterata suddivisione del tempo e dello spazio conducono a considerare una serie che ha una somma finita, e non un valore infinito come voleva Zenone. In altri termini, la somma finita della serie mostra che Achille raggiungerà la tartaruga in un tempo e un luogo ben determinati, per la piena soddisfazione degli allibratori inglesi.
Vediamo come si può giungere a queste conclusioni.
Indichiamo con s_0 il vantaggio iniziale della tartaruga, con v_a la velocità di Achille e con v_t quella della tartaruga, e le considereremo per semplicità entrambe costanti e non nulle. Naturalmente prenderemo $v_t < v_a$.
Per percorrere il primo tratto di strada Achille impiega un tempo pari a

$$t_0 = \frac{s_0}{v_a}$$

Nel frattempo la tartaruga avrà percorso un tratto pari a

$$s_1 = v_t t_0 = v_t \frac{s_0}{v_a} = s_0 q$$

Dove abbiamo posto $q = \frac{v_t}{v_a}$.
Osserviamo che per le posizioni fatte risulta $0 < q < 1$.
Ora Achille deve percorrere il tratto di strada s_1 impiegando un tempo

$$t_1 = \frac{s_1}{v_a} = \frac{s_0}{v_a}\, q$$

La tartaruga ora si sposta di un tratto $s_2 = v_t t_1 = \frac{v_t}{v_a} s_0 q = s_0 q^2$. Ma Achille ora impiega un tempo $t_2 = \frac{s_2}{v_a} = \frac{s_0}{v_a}\, q^2$ per raggiungere la stessa posizione.

Così facendo si trova che Achille impiega un tempo $t_n = \frac{s_0}{v_a} q^n$ per percorrere ogni tratto s_n percorso dalla tartaruga.
Dunque il tempo necessario ad Achille per coprire i primi $n+1$ tratti di strada che lo separano dalla tartaruga è

$$T_n = \sum_{i=0}^{n} t_i = \sum_{i=0}^{n} \frac{s_0}{v_a} q^i = \frac{s_0}{v_a} \sum_{i=0}^{n} q^i$$

Per n che tende a $+\infty$ otteniamo un tempo totale

$$T = \lim_{n \to +\infty} T_n = \frac{s_0}{v_a} \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{s_0}{v_a} \frac{1}{1-q} = \frac{s_0}{v_a} \frac{1}{1 - \frac{v_t}{v_a}} = \frac{s_0}{v_a} \frac{v_a}{v_a - v_t} = \frac{s_0}{v_a - v_t}$$

Dove abbiamo usato la formula per la serie geometrica di ragione $0 < q < 1$ e termine iniziale 1 (vedi appendice).
Naturalmente si poteva raggiungere allo stesso risultato considerando la tartaruga ferma, e Achille in moto con velocità pari a $v_a - v_t$.
L'argomento della serie qui proposto non è del tutto soddisfacente, soprattutto in relazione alle modalità con cui il moto si svolge. In effetti, una risoluzione più accurata dei paradossi di Zenone è stata proposta utilizzando parte della cosiddetta analisi non-standard, che tira in ballo i fantomatici *infinitesimi*, proprio per evitare i quali è sorta la teoria dei limiti classica. A questo riguardo si può consultare [8]. Il fascino ancor oggi dei rompicapi di Zenone risiede proprio nel fatto che vanno a toccare dei concetti profondamente radicati nel senso comune, come quello del moto. Al proposito si racconta che un giorno Antistene il cinico, che non poteva soffrire Zenone per via dei paradossi, sia andato a trovarlo per fargli le sue obiezioni. Ma, non riuscendo a controbattere Zenone sul paradosso della freccia, cominciò a camminare nervosamente su e giù, tanto che Zenone esclamò: - Ma ti vuoi stare fermo un momento! -
- Ah! Allora ammetti che mi muovo? - rispose Antistene.

4 Appendice

Questa appendice è rivolta a chi fosse più interessato agli aspetti matematici. Molti particolari non sono discussi. Rimandiamo perciò il lettore ad un qualsiasi testo di analisi 1 per le facoltà scientifiche, ad esempio [3], dove queste cose possono essere viste in ogni dettaglio. Lo studente di scuola superiore può, ad esempio, consultare [5] .
Iniziamo con il dare la definizione di convergenza di una successione di numeri reali.

Definizione 1 *Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. Si dice che la successione converge ad un limite $l \in \mathbb{R}$ e si scrive*

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = l$$

se si verifica la seguente condizione:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \nu \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n \geq \nu : |a_n - l| < \varepsilon$$

In soldoni la definizione esprime il fatto che assegnata una successione, come può essere quella costituita dalle posizioni di Achille, quando n cresce molto, allora a_n si avvicina sempre più ad l , ovvero la posizione di Achille si avvicina sempre più ad una data posizione.

Definizione 2 *Si dice che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge positivamente, e si scrive*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$$

se si verifica:

$$\forall M > 0 \, \exists \, \nu \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n \geq \nu : a_n > M$$

Questo vuol dire che al crescere di n il valore a_n diventa arbitrariamente grande.
Giacché distanze e tempi sono quantità positive, possiamo restringere la nostra attenzione a successioni a valori positivi. Dunque considereremo quelle che appunto vengono chiamate serie a termini positivi, per le quali peraltro esistono diversi utili risultati.

Osservazione Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini positivi. Allora anche le somme parziali s_n sono positive. Dunque possiamo concludere che si possono verificare solo due possibilità, la serie converge oppure diverge positivamente.

Lemma 1 *Sia $0 < q < 1$. E si consideri la successione $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Allora*

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$$

dimostrazione Per $a \geq -1$ vale la disuguaglianza di Bernoulli (per una sua dimostrazione, che richiede il principio di induzione, si può vedere [3]):

$$(1+a)^n \geq 1 + na$$

Allora per $a \geq 0$ abbiamo che $a^n = (1 + (a-1))^n \geq 1 + n(a-1)$.
Se poi è pure $a > 1$, preso un qualsiasi $M > 0$ basta scegliere $\nu > \frac{M-1}{a-1}$ per avere che $a^n \geq M$ per ogni $n \geq \nu$. Ora prendiamo $a = \frac{1}{q} > 1$. Fissato dunque $\varepsilon > 0$ e posto $M = \frac{1}{\varepsilon} > 0$, per quanto osservato abbiamo che per un opportuno $n \geq \nu$:

$$\frac{1}{q^n} = (\frac{1}{q})^n \geq M = \frac{1}{\varepsilon}$$

Da cui otteniamo $q^n \leq \varepsilon$. $\square$
Siamo dunque pronti per dimostrare il nostro teorema sulla convergenza della serie di Zenone.

Teorema 1 *Sia* $0 < q < 1$. *Allora si ha*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

dimostrazione Valutiamo le somme parziali:

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q}{1-q}(1 + q + q^2 + \cdots + q^n) =$$
$$= \frac{1 + q + q^2 + \cdots + q^n}{1-q} - \frac{q + q^2 + \cdots + q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Facendo il limite per $n \to +\infty$, a causa del lemma precedente l'ultimo termine tende a $\frac{1}{1-q}$. In definitiva abbiamo trovato che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} \ \square$$

Enunciamo alcuni criteri di convergenza per serie a termini positivi.

Teorema 2 (criterio di confronto) *Siano*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \tag{1}$$

e

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \tag{2}$$

due serie a termini positivi e supponiamo che sia

$$\exists \nu \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n \geq \nu : b_n \leq a_n$$

Allora:
1)*se la serie 1 converge, allora anche la serie 2 converge.*
2) *se la serie 2 diverge, allora anche la serie 1 diverge.*

Teorema 3 (criterio del rapporto) *Sia* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *una serie a termini positivi e supponiamo che sia:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$

Allora:
1) *se* $l < 1$, *allora la serie è convergente.*
2) *se* $l > 1$, *allora la serie è divergente.*

Quale esempio applichiamo il criterio alla serie di Suiseth:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}}\frac{2^n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\frac{1+1/n}{1} = \frac{1}{2} < 1$$

e quindi la serie converge.

Non abbiamo detto nulla per quanto riguarda le serie a termini non positivi. Per completezza forniamo un criterio per le serie a segno alterno.

Teorema 4 (di Leibniz) *Sia* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di termini positivi. Consideriamo la serie a segno alterno* $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$.
Supponiamo che si verifichino le due condizioni:
1) $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$
2) $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \leq a_n$
Allora la serie è convergente.

Riferimenti bibliografici

[1] David Berlinski, *I numeri e le cose* , Rizzoli, 1995

[2] Carl B. Boyer. *Storia della matematica*, Mondadori, 1980

[3] Emilio Acerbi, Giuseppe Buttazzo, *Primo corso di analisi matematica,* Pitagora, 1997

[4] Luciano de Crescenzo, *Storia della filosofia greca*, Mondadori, 1983

[5] N.Dodero, P. Boroncini, R. Manfredi, *Nuovo corso di analisi*, SEDES, 1997

[6] Morris Kline, *Storia del pensiero matematico*, Einaudi, 1996

[7] Roberto Magari, *Il tallone della tartaruga*, Sapere, dicembre 1993, pag.74
Copia dell'articolo si può momentaneamente consultare in : www.mat.unisi.it/web/magari/zenone.htm

[8] Wiliam I. McLaughlin, *La risoluzione dei paradossi di Zenone sul moto*, Le Scienze, gennaio 1995, pag. 60-64

[9] Piergiorgio Odifreddi, *Il Vangelo secondo la scienza*, Einaudi, 1999

[10] Piergiorgio Odifreddi, *C'era una volta un paradosso*, Einaudi, 2001