IL PROBLEMA DEL TRASPORTO OTTIMALE DI MASSA

LUCA GRANIERI

Nel 1781, il matematico francese G. Monge propose il seguente problema:

Siano dati nello spazio due volumi uguali e di forma geometrica fissata. Trovare nel secondo volume il punto dove dev'essere trasportata ogni molecola del primo in modo che la somma dei prodotti di ciascuna molecola per lo spazio percorso risulti minima ([5]*).*

La questione è piuttosto pratica. Si ha del materiale, per esempio degli scarti di costruzione, che bisogna *trasportare* in una discarica del giusto volume. Conoscendo la posizione e la forma dei detriti e della discarica, Monge si chiedeva quale fosse il modo più efficiente per effettuare questo trasporto, considerando come costo il *lavoro* compiuto, ovvero la somma dei prodotti delle masse spostate per la lunghezza dello spostamento effettuato.

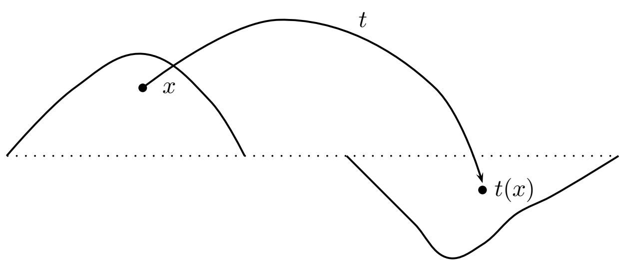

FIGURA 1. Il problema di Monge

Nonostante la semplice formulazione, il problema di trasporto proposto da Monge si è subito rivelato piuttosto ostico e le prime soluzioni complete sono posteriori di almeno due secoli. Oggi, i cosiddetti *problemi di trasporto* costituiscono un ampio e vivace settore di ricerca scientifica, coinvolgendo numerose discipline: *Calcolo delle Variazioni, Probabilità, Equazioni Differenziali, Economia, Fisica, ecc.* Il matematico francese Cedric Villani, recente (2010) vincitore del massimo riconoscimento per un matematico (si tratta della *medaglia Fields*), ha dedicato ben due importanti monografie ([7, 8]) a temi connessi con i problemi di trasporto.

1. IL PROBLEMA DI MONGE

Come detto, il problema di Monge è *ostico* da diversi punti di vista. Intanto, il problema non è sempre *ben posto*. Supponiamo ad esempio di avere un solo mattone da trasportare in discarica. Quando guardiamo in discarica ci accorgiamo però che sono rimasti soltanto due posti liberi, ciascuno corrispondente a metà mattone. In tal caso non c'è niente da fare. Il mattone, così com'è, non può essere trasportato (nel senso di Monge) nella discarica. Il fatto è che la formulazione di Monge richiede che ogni mattone vada a finire in un determinato posto. In termini più precisi, quello che si richiede è una *funzione* (detta anche *mappa di trasporto*) che ad ogni punto del primo volume associ un univocamente determinato punto di arrivo nel secondo volume. Allora, nell'esempio del singolo mattone, il problema di Monge non è risolvibile per il semplice fatto che in tal caso non esistono mappe di trasporto.

Anche quando le mappe di trasporto esistono, le cose in generale non migliorano molto. Infatti, si possono trovare configurazioni per le quali, pur essendoci molte mappe di trasporto, tra queste non è possibile trovarne una che sia migliore di tutte le altre.

Un'altra caratteristica del problema è che in genere non c'è da aspettarsi unicità della soluzione. Consideriamo ad esempio il problema del *book shifting*.

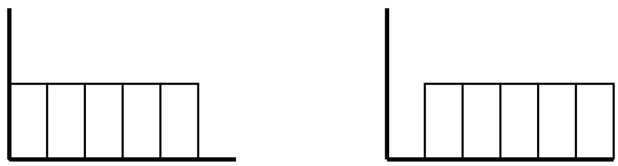

FIGURA 2. Book shifting

La nostra configurazione di partenza è una sequenza di libri (tutti uguali) adagiati sul fianco della nostra libreria (vedi figura 2). Vogliamo *trasportare* tale configurazione traslandola di un posto. Potremmo traslare ogni libro di un posto. Oppure spostare soltanto il primo libro per posizionarlo in coda agli altri. Il bello è che il lavoro fatto nei due casi è lo stesso. Infatti, nel primo caso abbiamo un costo totale pari a 5 (5 libri spostati ciascuno di un posto in orizzontale), mentre nel secondo abbiamo ancora un costo dato da 1 libro spostato di 5 posti in orizzontale. Quindi, ci sono due soluzioni del problema.

Ora, quando si devono spostare le cose lungo una linea retta è tutto più semplice. In effetti, il problema del trasporto su di una retta si risolve con relativa facilità. A grandi linee, soluzioni del problema di Monge si ottengono proprio *ricoprendo* i volumi assegnati con tante linee (dette *raggi di trasporto*) e *incollando* tra loro soluzioni del problema del trasporto confinato su queste linee. Naturalmente, realizzare tutto ciò richiede strumenti matematici piuttosto sofisticati.

2. L'approccio di Kantorovich

Torniamo all'esempio elementare del singolo mattone da trasportare. Un modo ovvio per superare la difficoltà sarebbe quella di *spezzare* a metà il mattone e depositare ogni metà nella sua destinazione in discarica. Ma nel problema di Monge non è consentito dividere le particelle o masse. Il matematico, e premio Nobel per l'economia, L. V. Kantorovich ha introdotto un problema più generale nel quale è invece consentito spezzare le masse. Mentre nel problema di Monge la massa allocata in un punto x deve tutta andare nella sua destinazione, diciamo $t(x)$, nell'approccio di Kantorovich si assegna la quantità $\gamma(x, y)$ che prescrive quanta della massa allocata in x è destinata alla collocazione y. Dunque, la massa che si trova in x può dividersi e raggiungere destinazioni diverse. Naturalmente, non si ha più a che fare con delle funzioni o mappe di trasporto ma con oggetti più generali, detti talvolta *piani di trasporto*. Se si vuole, si può interpretare la situazione in termini di probabilità. Il problema di Monge è in questo senso *deterministico*. La massa in un punto x va a finire in un'unica e determinata destinazione $t(x)$. Nel problema di Kantorovich invece una massa x raggiunge una destinazione y soltanto con una certa probabilità, quantificata se vogliamo dal piano di trasporto $\gamma(x, y)$. Dunque, il problema di Kantorovich può essere considerato come una versione probabilistica del problema di Monge. Il fatto è che, in questi nuovi termini, il problema di Kantorovich è molto più *trattabile* rispetto a quello di Monge. Infatti, si tratta di un problema *lineare* che è sempre risolvibile. Qual è il nesso con il problema di Monge? Se vogliamo, il contributo di Kantorovich può essere inquadrato in una strategia generale, talvolta detta di *rilassamento*. Certo, dopo due secoli di fatiche, i matematici avrebbero pur bisogno di riposarsi un pochettino per ricaricare le batterie! Tuttavia, un problema *rilassato* non è affatto stanco! Si tratta invece di un problema nuovo, più generale, di cui il problema originario possa essere considerato un caso particolare. Tutto in modo che le soluzioni del problema rilassato che verifichino le dovute condizioni del problema originario siano soluzioni di quest'ultimo. In qualche modo, il problema rilassato contempla una nozione più ampia (o più *debole*, come talvolta si usa dire) di soluzione con la speranza che queste nozioni più generali aiutino anche a risolvere il problema originario. Forse un'analogia può chiarire la questione.

Supponiamo che un ristorante cerchi un cuoco che sia cittadino italiano ma specializzato in cucina orientale. Allora, il titolare comincia a cercare questa figura professionale. Non trovandola in Italia, decide di *rilassare* il problema e comincia a cercarla all'estero. Certo, in generale una persona all'estero non sarà cittadino italiano, ma c'è pur sempre la speranza che qualcuno di quei cuochi idonei possa anche essere cittadino italiano, ad esempio perché ha doppia cittadinanza.

Per il problema del trasporto la situazione è simile. Poiché non riusciamo a trovare una mappa di trasporto ottimale, cerchiamo invece un piano di trasporto ottimale, che d'altronde esiste sempre. Poi, sotto certe condizioni, si mostra che il piano di trasporto considerato è in realtà deterministico, ovvero indotto da una mappa di trasporto. Così, la mappa di trasporto individuata è anche soluzione del problema di Monge. Spesso, ci si riferisce allora anche a problemi di Monge-Kantorovich.

3. Irrigazione

Nei problemi di Monge-Kantorovich abbiamo visto che la massa può dividersi eventualmente soltanto all'inizio. Dopo di che ogni particella va diritta alla sua destinazione finale. Tuttavia, in molte situazioni avviene tutt'altro. In un fiume come il Po, ad esempio, l'acqua viaggia solidale dalla sorgente per poi dividersi soltanto alla fine in prossimità del mare. Fenomeni analoghi accadono ad esempio per le radici degli alberi o per il sistema circolatorio del sangue. Si tratta di strutture ramificate in cui le particelle viaggiano insieme per dividersi solo al momento opportuno. Anche queste strutture possono essere inquadrate in un problema di trasporto. Si può pensare infatti di considerare, tra tutte le strutture ramificate possibili, quella più efficiente possibile per trasportare il sangue dal cuore ai tessuti, o l'acqua dalla sorgente al mare. Naturalmente, per studiare queste strutture occorrerà una teoria diversa da quella di Monge-Kantorovich.

Ora, nel problema di Monge-Kantorovich, l'efficienza del trasporto è valutata in modo proporzionale alla massa. In tal caso, per la disuguaglianza triangolare (in un triangolo ogni lato è minore della somma degli altri due), un qualsiasi percorso a forma di Y sarebbe più svantaggioso di quello a forma di V. Infatti, in relazione ad esempio alla figura 3, il costo per il percorso a forma di Y vale $4l$ mentre per quello a forma di V abbiamo un costo totale di $2L < 2l + 2l = 4l$. Dunque,

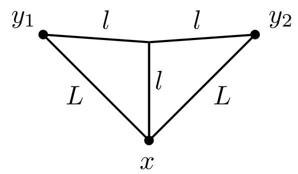

Figura 3. Due masse unitarie in x sono trasportate in y_1 e y_2.

nel problema di Monge-Kantorovich le particelle (o loro frazioni) sono del tutto solitarie e viaggiano ognuna per la propria strada. Le cose cambiano se invece che la massa tout court si considera una potenza (con esponente positivo e minore di uno) di quest'ultima. In riferimento alla figura 3, consideriamo come lavoro il prodotto della radice quadrata della massa per lo spostamento effettuato. In tal caso, il costo totale per il percorso a forma di V è sempre pari a $2L$, mentre per il percorso a forma di Y abbiamo un costo totale di $l\sqrt{2} + 2l$. Scegliendo ad esempio $L = 2$ e $l = \sqrt{2}$ (in tal caso nella figura 3 avremmo una T più che una Y), il percorso a forma di Y realizza un costo di $l\sqrt{2} + 2l = 2 + 2\sqrt{2} < 4 = 2L$. Pertanto, in tal caso è più conveniente la struttura ramificata. Queste osservazioni sono alla base delle cosiddette teorie di *irrigazione* ([2, 1, 9]), anch'esse intensivamente e proficuamente studiate negli ultimi anni, non soltanto per il loro interesse intrinseco, ma anche per le numerose e importanti applicazioni in molti settori di ricerca.

Riferimenti bibliografici

[1] M. Bernot, V. Caselles, J. M. Morel, Branched transportation networks, Springer, 2007.

[2] F. Maddalena, S. Solimini, and J.M. Morel, A variational model of irrigation patterns, Interfaces and Free Boundaries, **5**(4) (2003), 391-416.

[3] L.V. Kantorovich, On the transfer of masses, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, **37** (1942), 227-229.

[4] L.V. Kantorovich, On a problem of Monge, Uspekhi Mat. Nauk., **3** (1948), 225-226.

[5] G. Monge, Memoire sur la Theorie des D'eblais et des Remblais, Hist. de l'Acad. des Sciences de rch. Paris (1781). l.,

[6] A. Pratelli, Il problema di trasporto ottimo di Monge-Kantorovich, `http://www-dimat.unipv.it/~pratelli/2005_2006/Dottorato_Napoli/Corso_Trasporto.html`

[7] C. Villani, Topics in optimal transportation, vol. 58 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[8] C. Villani, Optimal transport, old and new, Springer Verlag, 2008.

[9] Q. XIA, Optimal paths related to transport problems, Commun. Contemp. Math., **5** (2003), 251-279.

Luca Granieri
Dipartimento di Matematica
Politecnico di Bari e
Dipartimento di Matematica e Applicazioni
Università Federico II di Napoli
`luca.granieri@unina.it, granieriluca@libero.it`