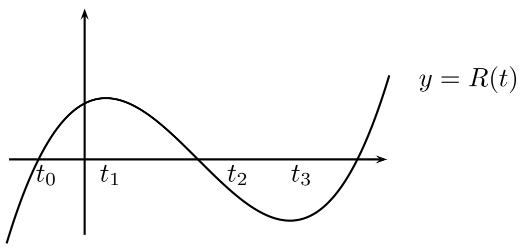
Le equazioni di Romeo e Giulietta

Luca Granieri
Dipartimento di Matematica e Applicazioni R. Caccioppoli
Università Federico II Napoli
luca.granieri@unina.it, granieriluca@libero.it

La vicenda di Romeo e Giuletta è senz'altro un grande classico delle storie d'amore. Molti turisti visitano ancor oggi Verona anche per visitare la scenografia dei loro incontri, magari immaginando Romeo che corteggia Giulietta affacciata al caratteristico balcone. Ma la matematica può dirci qualcosa su di loro o sull'amore in generale? Partiamo con l'osservare che tipicamente i nostri sentimenti sono altalenanti. Se indichiamo con R il sentimento che Romeo prova per Giulietta, e con G quello che Giulietta prova per Romeo, ci aspettiamo che, in qualunque modo possano essere quantificati, sicuramente non saranno delle costanti. Sarebbe allora meglio considerare due funzioni $R(t), G(t)$ che ad ogni istante di tempo restituiscono i rispettivi sentimenti. Quindi ci sarà un grafico rappresentante come questi sentimenti cambiano nel tempo. Ma come saranno fatti questi grafici? Per tentare una risposta occorre stabilire qualche proprietà aggiuntiva di queste due fantomatiche funzioni $R(t), G(t)$. Particolarmente importante sarà dire qualcosa sulla loro *variazione*. Matematicamente, studiare questa variazione corrisponde a studiare quella che si chiama *derivata* della funzione. Gli studenti degli ultimi anni di superiori o dei primi anni di Università conoscono molto bene questo concetto. Sommariamente, la derivata della funzione $R(t)$ ad esempio è una funzione, che indicheremo con $R'(t)$, che in ogni istante indica se nei paraggi la funzione sta aumentando o diminuendo. Così, se il grafico di Romeo fosse qualcosa del genere



allora tra i punti t_0 e t_1 abbiamo $R' > 0$, poichè la $R(t)$ sta crescendo. Nei punti t_1 e t_3 la derivata è esattamente zero, poichè il grafico non sta né crescendo né decrescendo, mentre ad esempio tra t_1 e t_3 abbiamo $R'(t) < 0$, poiché in quel tratto il grafico è decrescente. Detto questo, possiamo avanzare qualche ipotesi. In base a che cosa aumenterà o diminuirà il sentimento di Romeo? Beh, si sa, gli uomini vanno incoraggiati. Se Giulietta aumenta il suo interesse per Romeo questo si ringalluzzirerà, mentre se Giulietta per qualche motivo dovesse diminuire le sue attenzioni probabilmente Romeo tenderà a deprimersi. Allora, non sarebbe una cattiva idea supporre che la variazione del sentimento di Romeo, ovvero $R'(t)$, sia direttamente proporzionale, tramite una costante, chiamiamola r, a quello di Giulietta. Allora l'equazione di Romeo sarebbe

$$R'(t) = rG(t).$$

La costante r dipende dalla natura di Romeo e quantifica quanto Romeo è suscettibile al sentimento di Giulietta. Se r è molto grande questo significa che Romeo è molto sensibile ai segnali di Giulietta. Basterebbe un nonnulla per accendere o reprimere la sua passione. Se invece r fosse molto piccola, allora Giulietta dovrebbe proprio essere, diciamo così, *spudorata*, per suscitare qualcosa in Romeo. Se infine r fosse proprio zero, allora avremmo $R'(t) = 0$ e, come gli studenti ben sanno, l'unica funzione a derivata nulla è la costante. In tal caso Romeo avrebbe raggiunto la pace dei sensi e il suo sentimento sarebbe sempre uguale a se stesso, qualunque cosa Giulietta faccia. L'equazione appena scritta è un esempio di equazione differenziale. La parola differenziale sta ad indicare che nell'equazione compaiono le derivate di qualcosa. Le equazioni differenziali sono un grande e importante tema della matematica, della fisica e delle scienze applicate. Cosa ci aspettiamo di ricavare da una tale equazione? Beh, in realtà a noi non interessa tanto la derivata $R'(t)$ quanto $R(t)$. Dunque l'incognita nell'equazione è proprio la funzione $R(t)$. Pertanto, nell'equazione vogliamo risalire alla funzione $R(t)$ sapendo qualcosa sulla sua derivata $R'(t)$. Purtroppo, in generale, questo compito è piuttosto difficile. Mentre è relativamente facile da $R(t)$ calcolare $R'(t)$, il cammino inverso, ovvero determinare $R(t)$ a partire da $R'(t)$, è tutt'altra storia. Dobbiamo poi tener presente che un'equazione differenziale, se ammette una soluzione, allora ne ammette infinite altre. Questo dipende dal fatto che la derivata di una costante è nulla e che l'operazione di derivazione è lineare, e quindi la derivata di una somma è la somma delle derivate. Così, se $R(t)$ è soluzione dell'equazione di Romeo, allora quale che sia la costante c, anche la funzione $R(t) + c$ è ancora soluzione della stessa equazione. Infatti

$$(R(t) + c)' = R'(t) + c' = R'(t) + 0 = rG(t).$$

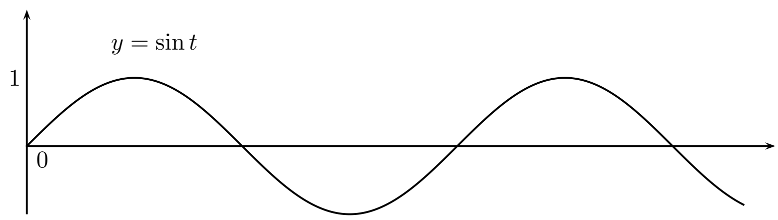
Allora, per selezionare univocamente una soluzione occorre prescrivere qualche altra ulteriore condizione. Tipicamente, si assegna una *condizione iniziale*, ovvero un valore ad un istante dato della funzione incognita che si conosce oppure si assegna per qualche motivo. Nel nostro caso potremo ad esempio assumere che sia $R(0) = 0$. Ovvero che la storia incominci con Romeo essenzialmente indifferente a Giulietta. La nostra equazione poi ha un'altra difficoltà. Il fatto che al secondo membro compare la funzione $G(t)$ che ugualmente non conosciamo. Veniamo allora alla volta di Giulietta. Le donne, si sa, a volte sono strane e tendono, come si dice dalla mie parti, a *tirarsi la calzetta*. Se cioè il corteggiatore si fa impetuoso, tendono ad allontanarlo per non compromettersi troppo. Se invece il corteggiatore diventa disinteressato, allora passano al contrattacco per riattirarlo a sé. In termini matematici, potremmo allora assumere che la variazione del sentimento di Giulietta sia inversamente proporzionale a quello di Romeo. Ovvero

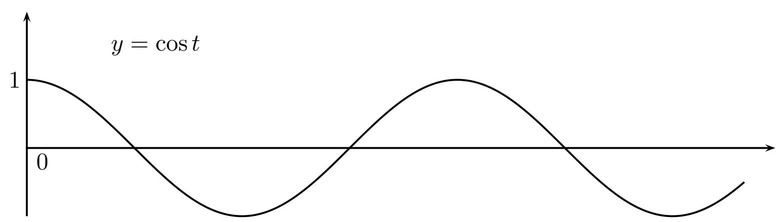
$$G'(t) = -gR(t)$$

dove al solito la costante di proporzionalità g è costitutiva della natura di Giulietta. Come detto, dovremo anche pensare ad una condizione iniziale. Per far evolvere la situazione potremmo assegnare $G(0) = 1$, ovvero che all'inizio della storia Giulietta mostri verso Romeo un interesse, diciamo unitario. Allora, le equazioni da risolvere sono due, e vanno risolte simultaneamente. Tecnicamente, l'analisi della relazione tra Romeo e Giulietta ci conduce a considerare il seguente sistema di equazioni (differenziali) con le relative condizioni iniziali

$$\begin{cases} R'(t) = rG(t) \\ G'(t) = -gR(t) \\ R(0) = 0 \\ G(0) = 1 \end{cases} \tag{1}$$

Naturalmente l'analisi che abbiamo fatto è piuttosto schematica e approssimativa, ma abbastanza semplice da condurci ad una soluzione. Se guardiamo il sistema di Romeo e Giulietta (1), ci accorgiamo che la derivata di R ci restituisce G, mentre la derivata di G ci restituisce R. Per semplificarci ulteriormente le cose, assumiamo che le costanti siano normalizzate ad uno, ovvero che $r = g = 1$. Le equazioni allora diventano $R'(t) = G(t)$ e $G'(t) = -R(t)$. Esistono due funzioni tali che la derivata della prima mi dia la seconda, e la derivata della seconda mi dia la prima cambiata di segno? Chi ha potuto studiare i primi rudimenti di Analisi Matematica avrà pronta la risposta. Queste funzioni sono le ben note funzioni goniometriche $R(t) = \sin t$ e $G(t) = \cos t$. Per un'introduzione a queste funzioni rimandiamo il lettore a [2]. Qui ci limitiamo ad enunciare quello che per alcuni studenti può essere un facile esercizio: *L'unica soluzione di* (1) *è data dalle funzioni* $R(t) = \sin t$ *e* $G(t) = \cos t$. I grafici di queste funzioni sono i seguenti:





Pertanto, la relazione tra Romeo e Giulietta prosegue nel tempo alternandosi tra alti e bassi, un po' come succede a tutti noi. La vicenda di Romeo e Giulietta come è noto si conclude tragicamente. Ma questo dipende da perturbazioni esterne che ovviamente non abbiamo considerato. Per ulteriori curiosità su temi amorosi segnaliamo [1].

Riferimenti bibliografici

[1] C. Cresswell, Matematica e sesso, Salani, 2006.

[2] L. Granieri, Elementi di Matematica, Matematica Elementare pre-Universitaria, Edizioni La Dotta, 2013.