Alcuni teoremi di punto fisso e applicazioni

Luca Granieri*

Agosto 2002

1 Introduzione

I primi teoremi di punto fisso furono prodotti inizialmente nell'ambito della topologia, dove il significato geometrico è l'esistenza di punti singolari dei campi vettoriali definiti su varietà. Il Teorema 2 di Brouwer nacque appunto in questo contesto, in particolare nello studio dei simplessi n-dimensionali. Tuttavia, tali teoremi trovano anche molte applicazioni in analisi, specialmente per la soluzione di equazioni differenziali ed integrali. Tali tecniche sono utili particolarmente quando si ha a che fare con operatori non lineari. Per maggiori informazioni sui punti fissi e per quanto riguarda le applicazioni alle equazioni alle derivate parziali, si può consultare [3], o anche [4]. Un ampia rassegna di tecniche basate sui punti fissi si può trovare in [9].

2 Teoremi di punto fisso

Iniziamo con il classico teorema sui punti fissi di Banach:

Teorema 1 (di Banach). *Sia (E,d) uno spazio metrico completo e $f : E \to E$ tale che per $0 < k < 1$ sia soddisfatta la condizione:*

$$\forall x, y \in E : d(f(x), f(y)) \leq k\, d(x,y) \tag{1}$$

Allora f ammette uno ed un solo punto fisso.

Dimostrazione. Unicità: siano x, y due punti fissi distinti per f. Dalla (1) abbiamo

$$d(x,y) \leq k\, d(x,y) \Rightarrow 1 \leq k$$

che contraddice l'ipotesi iniziale su k. Dunque il punto fisso non può essere che unico.

Esistenza (metodo delle iterate successive di Picard): Fissiamo un qualsisi punto $a \in E$. Definiamo la successione:

$$x_0 = a\,;\; x_1 = f(x_0) = f(a)\,; \ldots x_n = f(x_{n-1}) = f^n(a). \tag{2}$$

Supponiamo che la successione così ottenuta sia convergente, ovvero che $\exists\, \bar{x} = \lim_{n\to\infty} x_n$. Dalla continuità di f otteniamo:

$$f(\bar{x}) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \bar{x}.$$

Pertanto $\bar{x}$ è un punto fisso per f. Dunque sarà sufficiente mostrare che la successione definita in (2) è convergente. A tal fine verifichiamo che si tratta di una successione di Cauchy. Per $n \geq 1$ osserviamo che vale la seguente formula:

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0). \tag{3}$$

*Dipartimento di Matematica L. Tonelli
Università di Pisa, via Buonarroti 2, 56127 Pisa, Italy. granieri@mail.dm.unipi.it

Infatti, a causa della (2) per $n = 1$ risulta: $d(x_2, x_1) = d(f(x_1), f(x_0)) \leq kd(x_1, x_0)$. Verifichiamo ora il passo induttivo:

$$d(x_{n+2}, x_{n+1}) = d(f(x_{n+1}), f(x_n)) \leq kd(x_{n+1}, x_n) \leq$$
$$\leq k\, k^n d(x_1, x_0) = k^{n+1} d(x_1, x_0).$$

Siano ora $m, n \geq 1$ e supponiamo che sia per esempio $n < m$, ovvero che $m = n + h$ per un certo $h \geq 0$. Applicando più volte la disuguaglianza triangolare, ed a causa della (3), abbiamo:

$$d(x_m, x_n) = d(x_{n+h}, x_n) \leq d(x_{n+h}, x_{n+h-1}) +$$
$$+ d(x_{n+h-1}, x_{n+h-2}) + \ldots + d(x_{n+1}, x_n) \leq$$
$$\leq k^{n+h} d(x_1, x_0) + k^{n+h-1} d(x_1, x_0) + \ldots + k^n d(x_1, x_0) =$$
$$= k^n (k^h + k^{h-1} + \ldots + 1) d(x_1, x_0) = k^n \sum_{i=0}^{h} k^i d(x_1, x_0).$$

Passando al limite per $h \to \infty$, e considerando la somma della serie geometrica di ragione $k < 1$, abbiamo:

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0) \to 0 \quad \text{per } n \to \infty.$$

Pertanto possiamo dire che $\lim_{n,m\to\infty} d(x_m, x_n) = 0$, ovvero che la successione definita in (2) è di Cauchy ed il teorema è così completamente dimostrato. □

Un teorema fondamentale sui punti fissi è dovuto a Brouwer:

Teorema 2 (di Brouwer). *Sia $\bar{B}(0, 1)$ la sfera chiusa unitaria in $\mathbb{R}^n$.*
Allora ogni funzione continua della $\bar{B}(0, 1)$ in sè stessa ammette almeno un punto fisso.

Dimostrazione. La dimostrazione di questo risultato richiede una dose aggiuntiva di topologia. Una dimostrazione di tipo variazionale si può comunque trovare in [3]. □

Corollario 1. *Sia $(E, \|\cdot\|)$ uno spazio normato di dimensione finita. Sia inoltre $\emptyset \neq K \subset E$ un compatto convesso ed $f : K \to K$ continua.*
Allora f ammette almeno un punto fisso.

Dimostrazione. Essendo di dimensione finita, possiamo assumere che $E \cong \mathbb{R}^n$. Verifichiamo dapprima che per ogni sfera $\bar{B}(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n | \; \|x\| \leq r\}$ vale il teorema di Brouwer. In effetti, considerate le funzioni continue (infatti omeomorfismi) $\varphi_r(x) = rx$, allora la composizione $\varphi_{\frac{1}{r}} \circ f \circ \varphi_r$ applica $\bar{B}(0, 1)$ in sè, e quindi ammette un punto fisso, diciamo x_0. Pertanto

$$\varphi_{\frac{1}{r}}(f(\varphi_r(x_0))) = x_0 \Leftrightarrow \varphi_{\frac{1}{r}}(f(rx_0)) = x_0 \Leftrightarrow f(rx_0) = rx_0.$$

In dimensione finita i compatti sono chiusi e limitati. Dalla limitatezza segue che $K \subset \bar{B}(0, r)$, per un certo $r > 0$. Consideriamo ora la proiezione $p_K : \bar{B}(0, r) \to K$ definita da $p_K(x) = y \in K$ tale che $\|x - y\| = d(x, K) := \inf_{z\in K} \|x - z\|$. Poichè K è chiuso e convesso, la proiezione è ben definita, continua, e naturalmente lascia fissi gli elementi di K. (Per le proprietà della proiezione si può consultare ad esempio [2, cap.5]). Per quanto verificato in precedenza, la funzione $f \circ p_K : \bar{B}(0, r) \to K \subset \bar{B}(0, r)$ ammette un punto fisso $x_0 \in \bar{B}(0, r)$ tale che $f(p_K(x_0)) = x_0$. D'altronde, $x_0 \in K$, e quindi $f(x_0) = x_0$, che è quanto volevamo provare. □

Osservsazione 1. *La dimensione finita ci è servita per poter applicare il teorema di Brouwer. Per il resto ci è stato sufficiente il fatto che K era chiuso e limitato. Tuttavia, abbiamo considerato la compattezza poichè questa è una proprietà fondamentale per poter estendere questo teorema nell'ambito degli spazi vettoriali topologici in dimensione qualsiasi. In effetti sussiste il seguente*

Teorema 3 (Schauder-Tychonoff). *Sia E uno spazio vettoriale topologico localmente convesso. $\emptyset \neq K \subset E$ compatto convesso, $f : K \to K$ continua.*
Allora f ammette almeno un punto fisso.

Dimostrazione. La dimostrazione richiede le proprietà basilari degli spazi vettoriali topologici. Dopo di che basta far ricorso al cosiddetto funzionale di Minkowski. Una buona esposizione su questi argomenti è costituita da [7, cap.1]. Si può anche consultare [6]. Comunque una dimostrazione completa si trova ancora in [7]. $\square$

Naturalmente detto teorema vale per gli spazi normati. In particolare, se ci accontentiamo di prendere K chiuso e limitato, il teorema continua a sussistere, a patto però di chiedere qualcosa in più sulla funzione continua. Premettiamo la seguente

Definizione 1. *Un' applicazione $A : E \to E$ si dice compatta se è continua e trasforma ogni insieme limitato in uno relativamente compatto (ovvero la cui chiusura è compatta)*

Ad esempio, se lo spazio E è compatto, allora ogni funzione continua è compatta. Sussiste allora il seguente

Teorema 4 (Schauder).

$$(E, \|\cdot\|) \quad \emptyset \neq K \subset E \text{ convesso, chiuso e limitato,}$$

$A : K \to K$ compatta.
Allora A ammette almeno un punto fisso.

Dimostrazione. Intanto, senza perdere generalità, possiamo supporre che $0 \in K$. Altrimenti basta considerare $\widetilde{K} = K - x$, con $x \in K$, e $\widetilde{A}(y - x) = A(y) - x$. Utilizzeremo il seguente

Lemma 1. *Siano E, F spazi normati. $K \subset E$ limitato. $A : K \to F$ compatta.*
Allora esiste una successione $(F_n)_{n \geq 1}$ di sottospazi di dimensione finita e delle applicazioni continue $A_n : K \to F_n$ che verificano:

1. *$\forall f \in K, \forall n \geq 1 : A_n(f)$ è combinazione lineare convessa di elementi di $A(K)$;*
2. *$\forall f \in K, \forall n \geq 1 : \|A(f) - A_n(f)\| \leq \frac{1}{n}$.*

Dimostrazione. (lemma) Osserviamo che

$$\forall n \geq 1 : A(K) \subset \bigcup_{f \in K} \bar{B}(A(f), \frac{1}{n+1}).$$

Allora abbiamo

$$\overline{A(K)} \subset \bigcup_{f \in K} \bar{B}(A(f), \frac{1}{n+1}) \subset \bigcup_{f \in K} B(A(f), \frac{1}{n}).$$

Essendo A compatta risulta inoltre che

$$\forall n \geq 1, \exists p(n) \geq 1 \text{ tale che } \overline{A(K)} \subset \bigcup_{i=1}^{p(n)} B(A(f_i), \frac{1}{n})$$

per $f_1 \dots f_{p(n)} \in K$. Dunque, in corrispondenza di $f \in K$ e di $n \geq 1$ esiste $i = 1 \dots p(n)$ tale che $\|A(f) - A(f_i)\| < \frac{1}{n}$. Consideriamo ora le funzioni $a_i : K \to \mathbb{R}$ così definite:

$$a_i(f) = \max\left(0, \frac{1}{n} - \|A(f) - A(f_i)\|\right).$$

Intanto osserviamo che si tratta di funzioni continue e positive. Inoltre

$$\forall f \in K, \forall n \geq 1, \exists i = 1 \ldots p(n) \text{ tale che } \ a_i(f) > 0.$$

Definiamo allora gli spazi: $F_n = span\{A(f_1), \ldots, A(f_{p(n)})\}$ e prendiamo le funzioni $A_n : K \to F_n$ definite da

$$A_n(f) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{p(n)} a_i(f)} \sum_{i=1}^{p(n)} a_i(f) A(f_i).$$

Per come definite, tali funzioni sono continue e verificano la condizione 1 del Lemma. Inoltre, poichè si può esprimere $A(f) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{p(n)} a_i(f)} \sum_{i=1}^{p(n)} a_i(f) A(f)$, ed osservato che in ogni caso

$$a_i(f) \| A(f) - A(f_i) \| \leq \frac{1}{n}\, a_i(f),$$

abbiamo che

$$\| A_n(f) - A(f) \| \leq \frac{1}{\sum_{i=1}^{p(n)} a_i(f)} \sum_{i=1}^{p(n)} a_i(f) \| A(f_i) - A(f) \| \leq \frac{1}{n},$$

e quindi anche la condizione 2 è verificata. □

Proseguiamo ora la dimostrazione del Teorema 4 prendendo le funzioni $A_n : K \to \ E_n$ con E_n sottospazi di dimensione finita di E soddisfacenti il Lemma 1. Poichè $A(K) \subset K$, la condizione 1 e la convessità di K ci assicurano che $A_n(f) \in K$. Poniamo ora $K_n = K \cap E_n \neq \emptyset$, in quanto $0 \in K$. Pertanto abbiamo che $A_n : K_n \to K_n$. Possiamo così invocare il teorema di Brouwer, trovando $u_n \in K_n$ tale che $A_n(u_n) = u_n$. Essendo K limitato ed A compatta, possiamo estrarre una sottosuccessione $(u_{h(n)})_{n \geq 1}$ convergente. Poichè K è chiuiso possiamo dire che $\exists u = \lim_{n \to \infty} A(u_{h(n)}) \in K$. Allora

$$\| A(u_{h(n)}) - u_{h(n)} \| = \| A(u_{h(n)}) - A_{h(n)}(u_{h(n)}) \| \leq \frac{1}{h(n)} \to 0 \text{ per } \ n \to +\infty.$$

Quindi $u = \lim_{n \to \infty} A(u_{h(n)}) = \lim_{n \to \infty} u_{h(n)}$. Dalla continuità di A deduciamo infine che

$$A(u) = \lim_{n \to \infty} A(u_{h(n)}) = u,$$

ovvero che u è un punto fisso per A. □

Per molti problemi concreti è utile il seguente

Teorema 5 (Principio di Leray-Schauder). *Siano dati* $(E, \| \cdot \|)$ *e un'applicazione compatta* $A : E \to E$. *Inoltre, per* $r > 0$ *sia soddisfatta la seguente condizione:*

$$\forall u \in E, \forall t \in [0,1] : u = tA(u) \Rightarrow \| u \| \leq r. \tag{4}$$

Allora A *ammette almeno un punto fisso.*

Dimostrazione. Sia $K = \{f \in E \mid \|f\| \leq 2r\}$. Per $f \in K$ poniamo

$$B(f) = \begin{cases} A(f) & \text{se } \|A(f)\| \leq 2r, \\ \frac{2r}{\|A(f)\|} A(f) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

E' chiaro che $B(f) \in K$. Facciamo ora vedere che B è continuo. Fissato $f_0 \in K$ distinguiamo i casi:

I) $\|A(f_0)\| < 2r$. Allora, poichè A è continuo, possiamo trovare un intorno V di f_0 tale che $\|A(f)\| < 2r$ in $V \cap K$. Allora $B = A$ su $V \cap K$, e quindi B è continuo in f_0.

II) $\|A(f_0)\| > 2r$. Analogamente a prima, prendiamo W intorno di f_0 tale che $\|A(f)\| > 2r$ in $W \cap K$. Allora $B = \frac{2r}{\|A(\cdot)\|}A$ in $W \cap K$, e quindi è continuo in f_0.

III) $\|A(f_0)\| = 2r$. In tal caso osserviamo che $B(f_0) = A(f_0) = \frac{2r}{\|A(f_0)\|}A(f_0)$. Fissato $\varepsilon > 0$, dalla continuità delle due espressioni, troviamo due intorni V, W di f_0 tali che: $\|A(f) - A(f_0)\| < \varepsilon$ in $V \cap K$, e $\|\frac{2r}{\|A(f)\|}A(f) - \frac{2r}{\|A(f_0)\|}A(f_0)\| < \varepsilon$ in $W \cap K$. Allora $\|B(f) - B(f_0)\| < \varepsilon$ in $V \cap W \cap K$, da cui segue la continuità.

Facciamo ora vedere che $B(K)$ è relativamente compatto. Sia dunque $(f_n)_{n\geq 1}$ una successione in K. Sia inoltre $P = \{n \geq 1 \mid \|A(f_n)\| \leq 2r\}$. Se P è infinito, esso stesso individua una sottosuccessione. Allora, per la compattezza di A, esiste una estratta $(f_{h(n)})_{n\geq 1}$ tale che $(B(f_{h(n)}))_{n\geq 1} = (A(f_{h(n)}))_{n\geq 1}$ è convergente. Se invece P è finito, per infiniti indici succede che $\|A(f_n)\| > 2r$. In tal caso avremo $B(f_n) = \frac{2r}{\|A(f_n)\|}A(f_n)$ e, per la compattezza di A, possiamo ancora estrarre una sottosuccessione tale che $(B(f_{h(n)}))_{n\geq 1}$ è convergente. Pertanto resta verificato che B è compatto. In virtù del Teorema 4, B ammette un punto fisso, diciamo $u \in K$. Se fosse $\|A(u)\| > 2r$, avremmo che $u = B(u) = \frac{2r}{\|A(u)\|}A(u)$. Allora posto $t = \frac{2r}{\|A(u)\|} < 1$, a causa della (4), avremmo che $\|u\| \leq r \Rightarrow 2r = \|u\| \leq r$, che è una contradizzione. Allora dev'essere $\|A(u)\| \leq 2r \Rightarrow u = B(u) = A(u)$, donde u è punto fisso anche per A. □

Definizione 2. *La condizione (4) viene detta delle stime a priori.*

Si ottengono stime a priori in particolare da condizioni di uniforme limitatezza.

Corollario 2. *Sia $A : E \to E$ compatta. Sia inoltre soddisfatta la condizione:*

$$\exists r > 0 \text{ tale che } \forall f \in E : \|A(f)\| \leq r.$$

Allora A ammette almeno un punto fisso.

Dimostrazione. Se $u = tA(u)$, con $t \in [0, 1]$, allora $\|u\| = t\|A(u)\| \leq tr \leq r$. Dalle stime a priori segue dunque il risultato. □

3 Applicazioni

Molti problemi in matematica possono essere riformulati in modo da ridursi a cercare punti fissi di opportune applicazioni. In particolare, una vasta gamma di applicazioni è rivolta alla soluzione di equazioni differenziali ed integrali. Abbiamo già visto in [5] , come il teorema 1 di Banach permetta di concludere sull'esistenza ed unicità della soluzione del problema di Cauchy. Diamo ora la dimostrazione del seguente

Teorema 6 (di Peano). *Siano $x_0, y_0 \in \mathbb{R}, r > 0$ e $F : \underbrace{[x_0 - r, x_0 + r] \times [y_0 - s, y_0 + s]}_{=S} \to \mathbb{R}$ continua. Allora, posto $0 < d \leq min(r, \frac{s}{\|f\|_\infty})$, il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(x) = F(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ammette almeno una soluzione soluzione in $I := [x_0 - d, x_0 + d]$.

Dimostrazione. Intanto osserviamo che essendo F continua, una eventuale soluzione dev'essere in $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$. Inoltre, una funzione $u : I \to \mathbb{R}$ è soluzione del problema di Cauchy se e soltanto se $u(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, f(t))dt$ (problema di Liouville). Consideriamo allora lo spazio $E = (\mathcal{C}(I, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Poniamo $K = \{f \in E \mid \forall x \in I : |f(x) - y_0| \leq d\}$. Ovvero K è la sfera chiusa in E, di centro la funzione costante di valore y_0 e di raggio d. Consideriamo quindi l'operatore $A : K \to K$ così definito:

$$Af(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, f(t))dt.$$

Si verifica infatti che

$$|Af(x) - y_0| \leq \int_{x_0}^{x} |F(t, f(t))| dt \leq \|F\|_\infty |x - x_0| \leq d \Rightarrow Af \in K,$$

e quindi l'operatore A è ben posto. Per dimostrare il terorema sarà dunque sufficiente verificare che A ammette un punto fisso. A tal fine, grazie al Teorema di Schauder 4, verifichiamo che A è compatto. Fissiamo allora $f_0 \in K$ ed $\varepsilon > 0$. Per l'uniforme continuità di F esiste un $\delta > 0$ tale che

$$\forall \begin{matrix} (x_1, y_1) \\ (x_2, y_2) \end{matrix} \in S : \begin{matrix} |x_1 - x_2| < \delta \\ |y_1 - y_2| < \delta \end{matrix} \Rightarrow |F(x_1, y_1) - F(x_2, y_2)| < \varepsilon.$$

Se dunque $\|f - f_0\|_\infty < \delta$ abbiamo che

$$|Af(x) - Af_0(x)| \leq \int_{x_0}^{x} |F(t, f(t)) - F(t, f_0(t))| dt < \varepsilon |x - x_0| \leq \varepsilon d.$$

Passando all'estremo superiore otteniamo che $\|Af - Af_0\|_\infty < \varepsilon d$, per cui A è continuo. Resta da verificare la condizione di compattezza per A e, poichè siamo in uno spazio di funzioni continue, è naturale fare ricorso al Teorema di Ascoli-Arzelà (si veda per esempio [1] o anche [6]). Fissiamo dunque $\bar{x} \in I$ ed $\varepsilon > 0$. Preso $\delta = \frac{\varepsilon}{\|F\|_\infty}$, se $|x - \bar{x}| \leq \delta$, abbiamo:

$$|Af(x) - Af(\bar{x})| = |\int_{x_0}^{x} F(t, f(t)) dt - \int_{x_0}^{\bar{x}} F(t, f(t)) dt| = |\int_{\bar{x}}^{x} F(t, f(t)) dt| \leq$$

$$\leq \int_{\bar{x}}^{x} |F(t, f(t))| dt \leq \|F\|_\infty |x - \bar{x}| \leq \|F\|_\infty \delta = \epsilon.$$

Pertanto $A(K)$ è equicontinuo. Infine, poichè K è limitato, senz'altro si verifica che $\forall x \in I$: $\sup_{f \in K} |Af(x)| < +\infty$. Dunque sono verificate tutte le ipotesi del Teorema di Ascoli-Arzelà, e pertanto $A(K)$ è relativamente compatto. □

Applichiamo ora i risultati del paragrafo precedente alle equazioni integrali. In particolare consideriamo una equazione di tipo Uryshon di seconda specie:

$$u(x) = \lambda \int_a^b \varphi(x, y, u(y)) dy, \tag{5}$$

con $\varphi : \overbrace{[a, b] \times [a, b] \times [-r, r]}^{=S} \to \mathbb{R}$ continua. Consideriamo $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ e la sfera chiusa $K = \{f \in E \mid \|f\|_\infty \leq r\}$. Verifichiamo che l'operatore $A : K \to E$ definito da

$$Af(x) = \int_a^b \varphi(x, y, f(y)) dy$$

è compatto. Intanto dobbiamo verificare che A è ben definito, ovvero che Af è continua. Fissato dunque $x_0 \in [a, b]$ ed $\varepsilon > 0$, per l'uniforme continuità di φ esiste un $\delta > 0$ tale che

$$\forall \begin{matrix} (x_1, y_1, z_1) \\ (x_2, y_2, z_2) \end{matrix} \in S : \begin{matrix} |x_1 - x_2| < \delta \\ |y_1 - y_2| < \delta \\ |z_1 - z_2| < \delta \end{matrix} \Rightarrow |\varphi(x_1, y_1, z_1) - \varphi(x_2, y_2, z_2)| < \varepsilon. \tag{6}$$

Pertanto

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |Af(x) - Af(x_0)| \leq \int_a^b |\varphi(x, y, f(y)) - \varphi(x_0, y, f(y))| dy < \varepsilon(b - a). \tag{7}$$

Dunque Af è continua in x_0. Fissato ora $f_0 \in K$, se $\|f - f_0\|_\infty < \delta$, a causa della (6) abbiamo

$$|Af(x) - Af_0(x)| \leq \int_a^b |\varphi(x, y, f(y)) - \varphi(x, y, f_0(y))|dy < \varepsilon(b - a).$$

Passando all'estremo superiore abbiamo che $\|Af - Af_0\|_\infty \leq \varepsilon(b - a)$, per cui A risulta essere continuo. La relativa compattezza di $A(K)$ segue subito dal Teorema di Ascoli-Arzelà. Infatti, per quanto riguarda l'equicontinuità basta osservare che la (7) vale per ogni $f \in K$. Posto poi $M = \sup_{(x,y,z)\in S} |\varphi(x, y, z)|$, allora

$$|Af(x)| \leq \int_a^b |\varphi(x, y, z)|dy \leq M(b - a).$$

Pertanto $\forall x \in [a, b] : \sup_{f\in K} |Af(x)| < +\infty$. Dunque A è compatto. Tornando ora all'equazione (5), consideriamo $Bf(x) = \lambda \int_a^b \varphi(x, y, f(y))dy$. Oserviamo che $|Bf(x)| \leq |\lambda|\|\varphi\|_\infty(b - a)$. Se dunque prendiamo $|\lambda| \leq \frac{r}{\|\varphi\|_\infty(b-a)}$, allora $Bf \in K$. Possiamo così applicare il Teorema di Schauder 4. In definitiva possiamo concludere che *per* $|\lambda| \leq \frac{r}{\|\varphi\|_\infty(b-a)}$ *l'equazione (5) ammette una soluzione* $u \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. *Inoltre* $\|u\|_\infty \leq r$.

Come variante per l'equazione (5), possiamo considerare il caso in cui φ è Lipschitziana rispetto all'ultima variabile. Ovvero

$$|\varphi(x_1, y_1, z_1) - \varphi(x_2, y_2, z_2)| \leq L|z_1 - z_2|.$$

In tal caso abbiamo

$$|Bf(x) - Bg(x)| \leq |\lambda| \int_a^b |\varphi(x, y, f(y)) - \varphi(x, y, g(y))|dy \leq$$

$$\leq |\lambda||L|f(y) - g(y)|(b - a) \leq |\lambda|L(b - a)\|f - g\|_\infty.$$

Passando all'estremo superiore ricaviamo che $\|Bf - Bg\|_\infty \leq |\lambda|L(b - a)\|f - g\|_\infty$. Se allora scegliamo $|\lambda| < \frac{1}{L(b-a)}$ possiamo applicare il Teorema di Banach 1. Dunque, per $|\lambda| < \frac{1}{L(b-a)}$ l'equazione (5) ammette una ed una sola soluzione $u \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

In questa classe di problemi rientrano le equazioni di Fredholm di seconda specie, ovvero equazioni della forma

$$u(x) = \lambda \int_b^a k(x, y)u(y)dy + \varphi(x). \tag{8}$$

Con il metodo delle iterate successive di Picard si possono invece trattare le equazioni di Volterra di seconda specie

$$u(x) = \lambda \int_b^x k(x, y)u(y)dy + \varphi(x). \tag{9}$$

Consideriamo l'operatore $T : \mathcal{C}([a, b]) \to \mathcal{C}([a, b])$ definito dal secondo membro della (9):

$$Tu(x) = \lambda \int_b^x k(x, y)u(y)dy + \varphi(x).$$

Fissate allora $u, v \in \mathcal{C}([a, b])$ abbiamo che

$$|Tu(x) - Tv(x)| \leq |\lambda| \int_b^a |k(x, y)||u(y) - v(y)|dy \leq |\lambda|M(x - a)\|u - v\|_\infty, \tag{10}$$

dove $M = \max_{x,y\in[a,b]} |k(x, y)|$. Per $n \geq 1$ definiamo per ricorrenza $T^n u := T(T^{n-1})u$. Per induzione si può verificare che

$$|T^n u(x) - T^n v(x)| \leq |\lambda|^n M^n \frac{(x - a)^n}{n!} \|u - v\|_\infty. \tag{11}$$

Infatti, se la (11) è vera per $n \geq 1$ si ha:

$$|T^{n+1}u(x) - T^{n+1}v(x)| = |T(T^n u(x)) - T(T^n v(x))| \leq |\lambda| \int_a^x |k(x,y)||T^n u(y) - T^n(y)|dy \leq$$

$$\leq M|\lambda| \int_a^x |\lambda|^n M^n \frac{(y-a)^n}{n!} \|u-v\|_\infty dy = |\lambda|^{n+1} \frac{M^{n+1}}{n!} \|u-v\|_\infty \int_a^x (y-a)^n dy =$$

$$= |\lambda|^{n+1} \frac{M^{n+1}(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \|u-v\|_\infty.$$

Dalla (11) otteniamo che

$$|T^n u(x) - T^n v(x)| \leq |\lambda|^n M^n \frac{(b-a)^n}{n!} \|u-v\|_\infty,$$

e passando all'estremo superiore si ottiene che

$$\|T^n u - T^n v\|_\infty \leq |\lambda|^n M^n \frac{(b-a)^n}{n!} \|u-v\|_\infty.$$

Quale che sia $\lambda \in \mathbb{R}$, possiamo sempre scegliere n abbastanza grande in modo tale che

$$|\lambda|^n M^n \frac{(b-a)^n}{n!} < 1,$$

e dunque in modo che T^n sia una contrazione. Allora per il Teorema 1 T^n ammette un unico punto fisso. E' facile vedere allora che anche T ammette un solo punto fisso, si veda la Proposizione 2 in [5]. Dunque l'equazione (9) ammette un'unica soluzione. Si osservi che l'equazione di Volterra (9) ammette un'unica soluzione per arbitrari λ mentre l'equazione di Fredholm (8) ammette soluzione solo per λ abbastanza piccolo.

Quale ulteriore esempio consideriamo l'equazione:

$$u(x) = \lambda \int_a^b \sin u(t)dt + f(x), \tag{12}$$

con $f \in E := \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Con ragionamenti del tutto analoghi a quelli fatti in precedenza, l'operatore al secondo membro della (12) $Au(x) = \lambda \int_a^b \sin u(t)dt + f(x)$ è compatto. Consideriamo allora che

$$|Au(x)| \leq |\lambda||b-a| + |f(x)| \leq |\lambda||b-a| + \|f\|_\infty \Rightarrow \|Au\|_\infty \leq \underbrace{|\lambda||b-a| + \|f\|_\infty}_{=r}.$$

Per il Corollario 2 l'eqazione (12) ammette una soluzione $u \in E$ con $\|u\|_\infty \leq r$.

Riferimenti bibliografici

[1] S. K. Berberian. *Foundamentals of Real Analysis*. Springer, 1998.

[2] H. Brezis. *Analisi funzionale. Teoria ed Applicazioni*. Liguori, 1986.

[3] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics **19**, AMS, 1998.

[4] D. Gilbarg, N. Trudinger. *Elliptic Partial Equations of Second Order*. Springer, 1983.

[5] L. Granieri. *Equazioni differenziali ordinarie. Alcuni aspetti del problema di Cauchy*. Disponibile online all'indirizzo: http://www.dm.unipi.it/~granieri

[6] A. Kolmogorov, S. Fomine. *Elementi di Teoria delle Funzioni e di Analisi Funzionale*. Mir, 1980.

[7] W. Rudin. *Functional Analysis*. Mc Graw Hill, 1973.

[8] G. E. Silov. *Analisi matematica. Funzioni di una Variabile*. Mir, 1978.

[9] E. Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*. Vol.1, Springer, 1990.

[10] E. Zeidler. *Applied Functional Analysis. Applications to Mathematical Physics*. Applied Mathematical Sciences Vol. 108, Springer, 1995.