SOSTITUISCI E PARTI

LUCA GRANIERI

Da molti anni la scuola è senz'altro sotto pressione per come si dice stare al passo con i tempi. Una delle tendenze al proposito è quella di aumentare non solo le proposte didattiche ma anche i contenuti da insegnare. Sin dalla scuola elementare gli argomenti di discussione si moltiplicano (insiemi, algebra ecc.) e le indicazioni ministeriali suggeriscono ad esempio che alla fine dei percorsi scolastici si debba arrivare anche a trattare argomenti avanzati come equazioni differenziali, serie numeriche ecc. Da un lato queste tendenze sono certamente problematiche. Ho spesso ascoltato docenti così lamentarsi: *Perché studiare l'integrazione per parti o per sostituzione alla fine del quinto anno di liceo? Non sarebbe meglio qualche integrale in meno e soffermarsi su qualcosa di più basilare? Tanto si tratta di nozioni che verranno utilizzate solo dai pochi che continueranno certi studi all'università!* Ok, ma una tendenza del tutto analoga riguarda l'insegnamento della fisica, la cui *innovazione* fondamentale è consistita in questi anni nell'ampliare a dismisura i contenuti di insegnamento inglobando molta parte della cosiddetta *fisica moderna*. Allo stesso modo si potrebbe sostenere che non servirebbe studiare lo spettro dell'atomo di idrogeno o il decadimento radioattivo, perché tanto si tratterebbe di nozioni utili solo a quella infinitesima parte di studenti che orienteranno i propri studi successivi alla scienza e in particolare alla fisica. Ma, talvolta si sostiene che questa rincorsa (forse affannosa) sulla *fisica moderna* abbia uno scopo *culturale* importante. Il problema è che spesso si sottende tacitamente che invece la matematica non ce lo abbia (o peggio non ce lo debba avere) e che quindi non abbia senso nemmeno porsi il problema della *matematica moderna*.

Certamente, mettere troppa carne al fuoco può talvolta risultare controproducente. Ma è anche una sfida e da certi punti di vista un'opportunità. In verità, i contenuti possono alla fine avere un'importanza relativa. Ciò che conta è la prospettiva con cui li si percepisce e affronta. Così, qualunque argomento, anche di base, può essere più o meno adatto per fare buona matematica e/o fisica, anche senza necessariamente scomodare gli ultimi ritrovati della scienza, facendone risaltare tutti gli aspetti culturalmente fondamentali specialmente nel nostro attuale contesto storico. E le cosiddette *formule di sostituzione e per parti* potrebbero essere uno splendido esempio.

1. Integrazione per parti

Come è noto, date due funzioni $f, g \in \mathcal{C}^1([a,b])$ vale la seguente formula di integrazione per parti

$$\int_a^b f'(x)g(x)\ dx = (f(b)g(b) - f(a)g(a)) - \int_a^b f(x)g'(x)\ dx \tag{1}$$

una dimostrazione della quale si ottiene agevolmente sfruttando la proprietà della derivata del prodotto $D(fg) = f'g + fg'$ e quindi integrando su $[a,b]$. La formula (1) permette, come si usa dire, di *scaricare* la derivata su una delle due funzioni, a seconda dell'integrale che si vuole calcolare. Detta così, sembra una formuletta qualunque. Invece, si tratta di uno dei principi chiave su cui si basa una cospicua e importante parte della matematica (e della fisica) moderna. In effetti, il cuore della formula sta proprio nella quantità tra parentesi tonde, a cui spesso non si presta molta attenzione. Quest'ultima quantità dipende dal comportamento delle funzioni sul *bordo* dell'intervallo $[a,b]$. La formula (1) mette pertanto in relazione quanto accade all'interno dell'intervallo con ciò che accade sul bordo di esso. Di più, mette in relazione uno *spazio* di dimensione uno (l'intervallo) con uno di dimensione zero (gli estremi dello stesso). Generalizzazioni a dimensioni maggiori diventano allora di cruciale importanza. Un integrale su una superficie condurrebbe a valutare quanto accade al suo bordo (che è in genere una curva) o un integrale di volume condurrebbe a quanto accade su una superficie (il suo bordo). Nel famoso *mito della caverna* Platone suggerisce l'idea che quanto normalmente osserviamo non sia altro che *l'ombra* che il mondo vero esterno (tridimensionale) proietta sulla superficie di una caverna (bidimensionale). Ma sarebbe possibile ricostruire il mondo tridimensionale a partire dalla sua ombra? La possibilità di integrare per parti lo permetterebbe. Recentemente, alcuni fisici hanno proposto un principio similare per il nostro universo. Il cosiddetto *principio olografico* (si veda ad esempio [2]) secondo il quale il nostro universo *emergerebbe* in qualche modo da quanto accade su un suo *bordo* bidimensionale. Alla fine tramite una sorta di *un'integrazione per parti.* Tale bordo esisterebbe ad una scala ridottissima, quella di Planck, nella quale l'universo sarebbe bidimensionale. Questo argomento ribalta completamente il mito di Platone. Il mondo reale sarebbe quello bidimensionale sulla parete mentre quello tridimensionale emergerebbe come una sorta di *fantasma*, come un ologramma appunto. Ma non è necessario scomodare una fisica tanto esotica. Uno dei principi cardine dell'elettromagnetismo, Il Teorema di Gauss, non è altro che un'integrazione per parti, un'applicazione del cosiddetto *Teorema della divergenza.* Data una superficie chiusa, il flusso del campo attraverso la superficie diventa, integrando per parti, l'integrale della divergenza del campo nel volume racchiuso. Per i campi *solenoidali* (che hanno divergenza nulla), come il campo magnetico, il calcolo del flusso diventa così un gioco da ragazzi: Il flusso del campo attraverso una qualunque superficie chiusa è esattamente zero. L'integrazione per parti restituisce un'altra fondamentale formula (legata al Teorema di Stokes): La circuitazione di un campo corrisponde al flusso del *rotore* del campo attraverso una qualunque superficie avente per bordo il circuito stesso. Per i campi irrotazionali (a rotore nullo), come ad esempio il campo elettrico in condizioni stazionarie, si ottiene il fatto che la circuitazione del campo è sempre nulla.

1.1. **Derivate deboli e distribuzioni.** Non tutte le funzioni sono derivabili. Uno dei primi esempi che gli studenti incontrano è la funzione $y = |x|$ che pur essendo continua non è derivabile in $x = 0$. Per molte ragioni i matematici hanno in vari modi cercato di superare difficoltà come queste. Alcune di queste problematiche nascevano proprio nell'ambito della fisica moderna. *Nella sistemazione formale della meccanica quantistica Dirac introdusse una strana "funzione" chiamata δ (delta di Dirac).* Moralmente, questa funzione serviva a *localizzare* quanto più possibile le particelle. *Sebbene i calcoli con la δ fornissero risultati corretti, il loro fondamento era incerto e persino dubbio. Racconta il matematico francese L. Schartz di aver sentito parlare per la prima volta della funzione di Dirac nel 1935, in un corso universitario, e di esserne rimasto "disgustato": " Quelle formule erano talmente folli dal punto di vista matematico che era impossibile accettarle"* (citato da [1, p. 175-176]).

Il problema è che era necessario manipolare questi strani oggetti facendone derivate ed integrali. Ma come fare se le usuali nozioni di derivata non possono funzionare? Per ironia della sorte, fu proprio Schwartz a redimere la situazione introducendo la *teoria delle Distribuzioni* per la quale fu insignito della *medaglia Fields* (riconoscimento considerato alla stregua di un premio Nobel) nel 1950. Per farcene un'idea approssimativa, cominciamo col considerare una funzione continua f, non necessariamente derivabile come la $y = |x|$. Le funzioni continue sono integrabili e la formula (1) potrebbe comunque essere scritta coinvolgendo la funzione f. Se consideriamo delle funzioni *test* regolari φ e nulle al bordo (così nell'integrazione per parti sopravvivono soltanto gli integrali), per un'ulteriore funzione integrabile g ha senso scrivere

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_a^b g(x)\varphi(x)\,dx \tag{2}$$

Se la funzione f è derivabile possiamo mettere proprio f' al posto della g e la formula appena scritta non è altro che la vecchia formula di integrazione per parti (1). Ha senso allora riguardare la funzione g come alla *derivata debole* della f. La richiesta è che la (2) sia valida per

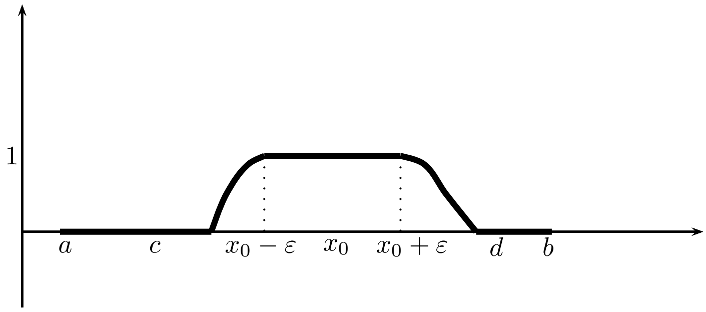

FIGURA 1. Una funzione cut-off

tutte le possibili e immaginabili funzioni test φ. Questo, tra le altre cose, garantisce l'unicità della derivata debole e il fatto che quest'ultima restituisca proprio la derivata classica nel caso di funzioni derivabili. Restringendoci per semplicità a funzioni continue, questo fatto costituisce un utile esercizio. Supponiamo infatti che la funzione f abbia due derivate deboli (continue) g, h. Scrivendo la (2) per entrambe le funzioni e sottraendo si ottiene

$$\int_a^b (g(x) - h(x))\, \varphi(x)\; dx = 0 \tag{3}$$

Ma quest'ultima relazione deve valere per ogni scelta di φ. E questo è il punto cruciale. Supponiamo per assurdo che non sia $h = g$. Ci sarà allora almeno un x_0 in cui $h(x_0) \neq g(x_0)$. Supponiamo che sia ad esempio $g(x_0) - h(x_0) > \alpha > 0$. trattandosi di una funzione continua, per la permanenza del segno dovrà essere $g(x)-h(x) > \alpha$ in un intorno di x_0, diciamo un intervallo $[c, d]$. Possiamo immaginare una funzione test φ come in figura 1 che valga uno in un intorno più piccolo, diciamo di raggio ε, e poi decresca subito a zero, in modo che sia nulla fuori dall'intorno $[c, d]$. Esistono tecniche standard per costruire tali funzioni che i matematici chiamano anche *funzioni cut-off*. Scegliendo una funzione test siffatta, dalla (3) si otterrebbe la contraddizione

$$0 = \int_a^b (g(x) - h(x))\, \varphi(x)\; dx = \int_c^d (g(x) - h(x))\, \varphi(x)\; dx \geq$$

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} (g(x) - h(x))\; dx > 2\varepsilon\alpha > 0.$$

Lasciamo quale utile esercizio al lettore di verificare ad esempio che la derivata in senso debole della $f(x) = |x|$, ad esempio nell'intervallo $[-1, 1]$ è la funzione $g(x)$ che vale 1 per $x \geq 0$ e -1 altrove. In effetti, questo esempio mostra che il valore che g assume per $x = 0$ non ha alcuna importanza e può essere scelto arbitrariamente. Il fatto è che la derivata debole in questo caso non è una funzione continua. Bisogna pertanto generalizzare un pochino il concetto di funzione passando a funzioni definite *quasi ovunque*, cioè trascurando insiemi piccoli (di misura nulla) che non influiscono sul valore dell'integrale, come il valore assunto in singoli punti.

Basandosi sull'integrazione per parti è possibile calcolare la derivata di praticamente qualsiasi cosa, generalizzando in maniera piuttosto spinta il concetto di funzione, pervenendo alla nozione di *distribuzione*, parte fondamentale in larga parte della matematica moderna. A grandi linee, una distribuzione è una *funzione di funzioni*. Praticamente, una distribuzione è una funzione a valori reali (o complessi) il cui dominio è a sua volta un insieme di funzioni, quello delle funzioni test. Se x rappresenta la posizione di una particella sulla retta reale, la Delta di Dirac è la distribuzione δ_x così definita

$$\delta_x(\varphi) = \varphi(x).$$

La sua derivata (che è a sua volta una distribuzione) si ottiene come nell'integrazione per parti *scaricando la derivata*

$$D\delta_x(\varphi) = -\delta_x(\varphi') = -\varphi'(x).$$

L'utilizzo dell'integrazione fatto nel ricavare la derivata debole è un caso particolare di distribuzione. Ogni funzione integrabile f può essere infatti riguardata come una distribuzione T_f tramite

$$T_f(\varphi) := \int_a^b f(x) \cdot \varphi(x)\ dx$$

. La derivata debole g che abbiamo introdotto precedentemente conduce a

$$DT_f(\varphi) = -T_f(\varphi') = -\int_a^b f(x) \cdot \varphi'(x)\ dx = \int_a^b g(x) \cdot \varphi(x)\ dx = T_g(\varphi)$$

In altre parole, la derivata debole, vista come distribuzione, si può identificare con la derivata nel senso delle distribuzioni. Un esercizio istruttivo al proposito potrebbe essere quello di verificare che ad esempio la δ_0 non è altro che la derivata debole (ovvero nel senso delle distribuzioni) della funzione $H(x)$, ad esempio in un intervallo $[-r, r]$, che vale zero per $x < 0$ ed uno per $x > 0$. Le distribuzioni sono un notevole esempio di una branca fondamentale della matematica moderna, la cosiddetta *Analisi Funzionale.*

Tutte le distribuzioni sono così derivabili, ne segue che tutte le funzioni - continue o no che siano - risultano derivabili (nel senso delle distribuzioni)! È un risultato quasi incredibile se non l'avessimo in qualche modo costruito. È bastata una semplice integrazione per parti per poter affermare - sono parole di H. Cartan, un illustre collega di Schwartz - che " da questo momento in poi, mai più funzioni senza derivate!" ([5, p.125]).

2. Integrazione per sostituzione

La formula di integrazione per sostituzione sfrutta invece la proprietà della derivata della funzione composta $D(f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$. Integrando si ottiene la formula

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt. \tag{4}$$

Quello che si fa normalmente negli esercizi è scegliere un opportuno cambio di variabili $x = g(t)$ in modo che il secondo integrale nella (4) sia più facilmente calcolabile rispetto a quello di partenza. Questo *trucchetto* del cambiare coordinate attraverso una trasformazione ha però una portata vastissima. Nella meccanica Lagrangiana-Hamiltoniana, basata sull'energia piuttosto che sulla forza come accade nella meccanica Newtoniana, questo aspetto è fondamentale. Spesso è complicatissimo descrivere il comportamento di un sistema dinamico. Ma talvolta tutto può cambiare scegliendo un sistema di coordinate *furbo*. I cosiddetti *sistemi integrabili* sono proprio quelli per i quali è possibile trovare un cambiamento di variabili per il quale il sistema diventa il più banale possibile: le sue traiettorie sono rettilinee. Aspetti ancora più importanti emergono dalla ricerca di *invarianze* rispetto a questi cambiamenti di coordinate. Ad esempio, le principali leggi della fisica sono invarianti rispetto all'inversione temporale $t \mapsto -t$. Ciò accade per l'equazione del moto di Newton $F = ma$ in quanto l'accelerazione a, che è la derivata seconda dello spostamento, resta invariata scambiando il tempo t con $-t$. Infatti, se $s(t)$ è la funzione spostamento passando alla $s_-(t) := s(-t)$, calcolando le derivate si ottiene

$$s''_-(t) = \big(s'_-(t)\big)' = (-s'(-t))' = s''(t)$$

ottenendo ancora una soluzione dell'equazione di Newton, visto che le derivate seconde sono uguali (se la forza F è a sua volta di un tipo speciale, come accade ad esempio per le forze che dipendono dalla sola posizione). Dunque, da questo punto di vista passato e futuro sembrano perfettamente intercambiabili tra loro. Ma per noi poveri mortali il passato e il futuro sono intrinsecamente differenti, e il tempo sembra scorrere inesorabilmente dal passato verso il futuro. Da dove nasce questa asimmetria tra passato e futuro? Tale questione è strettamente correlata al cosiddetto problema della *freccia del tempo* che tenta di conciliare tale asimmetria, codificata in modo paradigmatico nel *secondo principio della termodinamica*, con la fisica fondamentale.

Del resto, la richiesta di invarianza rispetto a qualche tipo di trasformazione si è rivelata sempre più fondamentale nella fisica moderna. Il principio di relatività galileiana della fisica classica in fondo richiedeva l'invarianza delle leggi della dinamica rispetto ai moti rettilinei uniformi, ovvero rispetto a trasformazioni del tipo $x' = x - vt$ (trasformazioni galileiane). Ma le equazioni dell'elettromagnetismo non sono in generale invarianti rispetto a questo tipo di trasformazioni, sembrando così dipendenti dal sistema di riferimento inerziale adottato. Nel famoso articolo del 1905 sull'*elettrodinamica dei corpi in movimento*, Einstein porrà a fondamento della *relatività speciale* proprio un principio di invarianza secondo cui le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Le trasformazioni *invarianti* diventano le cosiddette *trasformazioni di Lorentz*. Questa ricerca di *invarianze* ha uno sbocco decisivo in un famoso e fondamentale Teorema di E. Noether. La meccanica Lagrangiana, nella cui cornice è possibile anche inquadrare la meccanica quantistica, ha come oggetto fondamentale la cosiddetta *azione* che è l'integrale di una certa funzione, detta per l'appunto Lagrangiana. Nell'applicazione dei cosiddetti *principi variazionali* (si veda [3] per un'introduzione) si cerca di minimizzare (o massimizzare) l'azione e le leggi della fisica emergono come punti *critici* o *stazionari* (si tratta delle cosiddette equazioni di Eulero-Lagrange) per i corrispondenti problemi di ottimizzazione. In questo contesto, l'invarianza dell'azione rispetto a delle trasformazioni è particolarmente significativa. Ad esempio, l'invarianza rispetto alle traslazioni produce il principio di conservazione della quantità di moto. L'invarianza rispetto alle rotazioni produce invece la conservazione del momento angolare. Mentre l'invarianza rispetto al tempo produce la conservazione dell'energia. Il Teorema di Noether permette di ricondurre questi casi particolari in un contesto del tutto generale e valido non soltanto nella meccanica classica. Ogni invarianza dell'azione rispetto ad un gruppo di trasformazioni produce una legge di conservazione. Fantastico! I cambiamenti di variabili ci conducono nelle pieghe più intime dell'universo!

Riferimenti bibliografici

[1] V. Barone, G. Giorelli, La Matematica della Natura, Il Mulino, 2016.
[2] J. D. Bekenstein, L'informazione in un universo olografico, Le Scienze, Settembre 2003.
[3] L. Granieri, Ottimo in Matematica, LaDotta editore, 2016.
[4] A. Guerraggio, 15 Grandi idee Matematiche, Mondadori, 2013.