3^2 IS A MAGIC NUMBER

LUCA GRANIERI
GRANIERILUCA@LIBERO.IT

In realtà l'astrologia era più antica, esprimeva una magia "laica e naturale"[...] Fu estromessa dai confini della scienza solo all'approssimarsi della Rivoluzione Scientifica, in modo particolare grazie alla caratterizzazione matematica delle leggi scientifiche. Nell'alchimia cominciava a delinearsi l'idea di "esperimento" di laboratorio. Lynn Thorndike [6] *ha mostrato come nel DNA della scienza sperimentale ci sia un legame stretto con la magia, in quanto nella sua analisi tanto l'esperimento e la tecnica quanto la magia ponevano il problema di come la prassi umana potesse agire sulla realtà contingente.*

L. Borzacchini [2, p.24]

Lo spunto per questo articolo proviene da uno spettacolo-conferenza dal titolo *Magia Matematica* tenuto dal sottoscritto in collaborazione col *Mago Vago* presso il Liceo Leonardo Da Vinci di Cassano delle Murge (Ba), parallelamente ad un laboratorio di *magia matematica* per gli studenti promosso dalla docente Luciana Loconsole, in concomitanza con i preparativi per la manifestazione *CassanoScienza*, in programma dal 30 Marzo al 5 Aprile 2020 a Cassano (Ba).

In effetti, magia e scienza si presentano normalmente come paradigmi diametralmente opposti. Ovviamente in molti casi lo sono. Ma in realtà il pensiero *magico* è strettamente correlato con l'instaurarsi della scienza moderna. Uno degli scopi della conferenza citata era proprio quello di mostrare come, in un certo senso, la scienza moderna sia in qualche modo una sorta di *magia matematizzata* (si veda [4] per una esposizione introduttiva). Ad ogni modo, al di là degli aspetti storici, filosofici ed epistemologici (un'accurata ed esaustiva discussione del tema si trova in [6]), sfruttare principi matematici per la realizzazione di *trucchi di magia* può essere un valido strumento per porre conoscenze matematiche di base sotto una luce diversa e magari anche per introdurre problematiche nuove. Ovviamente questi temi hanno una lunga storia. Una ricca fonte di materiale utile a questi fini si trova ad esempio nel recente [1]. In questo articolo ci limitiamo a presentare un gioco basato sul numero 9 utile per valorizzare l'aritmetica e anche per spingersi su temi più avanzati.

1. La magia del numero 9

Chiedete ad un vostro amico, alunno ecc. di digitare un numero qualsiasi (tranne zero) sulla calcolatrice. Quindi lo invitate a modificarlo moltiplicandolo per un numero ad una cifra (tranne zero) a sua scelta ripetendo l'operazione quante (meglio tante) volte vuole in modo da ottenere un numero con molte cifre. Diciamo ad esempio di dieci cifre. Questo numero segreto è stato ottenuto nella *massima libertà* ed ora proponete la vostra scommessa basata sui vostri *poteri magici*. Affermate di essere in grado di stabilire con *assoluta certezza* una cifra scelta a piacere dal vostro amico se questo vi comunica le altre nove. Se ad esempio il numero segreto fosse 1119744000 e la cifra segreta scelta dal vostro amico fosse 4, allora egli vi comunicherà le altre nove cifre (in un ordine qualsiasi), ovvero 111970004. A questo punto potreste fare un po' di scena millantando chissà quali proprietà divinatorie, magari dando prova di saper leggere nella mente, e dopo la dovuta suspense annunciare la cifra segreta, cioè 4. Come si realizza tutto ciò? Intanto non sarà male effettuare molte prove e invitare i vostri amici, specialmente se sono degli studenti, a carpire il vostro trucco che ovviamente deve esserci, anche se non si vede, almeno non subito. In genere si tratta di un compito molto istruttivo e gli studenti si divertono un sacco.

2. Trucco svelato

La magia non nasce dal nulla ma dall'utilizzazione di conoscenze e informazioni che gli altri non hanno o, pur avendole, di cui non sospettano la pertinenza. Nella fattispecie, oltre che tentare la sorte, si può determinare la cifra misteriosa sfruttando le informazioni su come il numero di dieci cifre è stato generato e sulla conoscenza dell'aritmetica. Ma il numero non è stato creato in maniera arbitraria dal concorrente? Sì, ma fino ad un certo punto. Pigiando ripetutamente sulla tastiera della calcolatrice, il concorrente medio prima o poi utilizza il fattore 3, magari due volte, o il fattore 9. Già, e questo è proprio quello che fa per noi. Se infatti sapessimo che il nostro misterioso numero di dieci cifre è multiplo di 9 allora, come è ben noto dall'aritmetica, la somma delle sue cifre deve anch'essa essere un multiplo di 9. Basterà allora effettuare un piccolo calcolo mentale valutando $S = 1+1+1+9+7+4 = 23$ e ancora $S = 2+3 = 5$. Dunque, per raggiungere un multiplo di nove occorre sommare un 4 che deve allora essere la cifra misteriosa da individuare. Eventualmente potreste favorire la situazione cercando di *forzare la scelta* del concorrente invitandolo a moltiplicare molte volte per tre, per cinque, per **nove**, magari ripetendo, in modo quasi subliminale, più volte la parola **" nove"** così da suggerire questa scelta al concorrente qualora non l'abbia già fatta (pare che molte persone dicano "7" alla richiesta di scegliere un numero fra 1 e 10). Ovviamente c'è sempre la possibilità di incappare in un concorrente smaliziato che si mantenga accuratamente alla larga dal fattore nove. Ci sono molti modi di ovviare a questo inconveniente scegliendo delle operazioni aritmetiche il cui risultato sia automaticamente un multiplo di nove. In [1] ad esempio si suggerisce di effettuare la differenza tra un numero scelto a piacimento dal concorrente ed il suo *simmetrico*, ottenuto ribaltando le sue cifre come attraverso uno specchio, leggendole cioè da destra verso sinistra. Ad esempio, se viene scelto il numero 321 dovremo calcolare $321 - 123 = 198$. Per poter effettuare il calcolo dovremo avere un numero costante di cifre e chiedere nella fattispecie sempre un numero di tre cifre. In tal caso dovremo scrivere 3 come 003 o 45 come 045 in modo da maneggiare sempre lo stesso numero di cifre. Così, ad esempio , il simmetrico di 540 è 045. Inoltre, per mantenerci nell'ambito dei numeri interi, potremo chiedere che la prima cifra sia maggiore o uguale dell'ultima. Ma siamo sicuri che i conti tornano?

3. Ottenere multipli di nove

Iniziamo con il ben noto

Lemma 1. *Per qualsiasi numero intero $n \geq 1$, $10^n - 1$ è multiplo di nove.*

Dimostrazione. Procediamo per induzione completa su n. Per $n = 1$ abbiamo $10 - 1 = 9$. Supponiamo che l'enunciato sia vero per il generico n e verifichiamo che lo sia anche per il successivo $n+1$. Valutiamo

$$10^{n+1}-1=10\cdot 10^n-1=10\cdot 10^n-10+10-1=10\cdot(10^n-1)+9$$

che è multiplo di nove essendo per ipotesi induttiva 10^n-1 un multiplo di nove. □

Indichiamo con x un generico numero di n cifre e con x^* il suo simmetrico. Verifichiamo il seguente

Teorema 1. *$x-x^*$ è multiplo di nove.*

Dimostrazione. Sia $x=a_n 10^n+\ldots+a_1 10+a_0$ e $x^*=a_0 10^n+\ldots+a_{n-1}10+a_n$ il suo simmetrico. Abbiamo

$$x-x^*=a_n(10^n-1)+10a_{n-1}(10^{n-2}-1)+\ldots-10a_1(10^{n-2}-1)-a_0(10^n-1).$$

Evidentemente, si tratta di un multiplo di nove, essendo, a causa del lemma, somma di multipli di nove.

□

4. Difendersi dal fallimento

Abbiamo introdotto la variante dei numeri simmetrici per essere sicuri di avere a che fare con multipli di nove. Tuttavia, ci sono casi sfortunati in cui anche questa precauzione non è sufficiente a garantire la buona riuscita del gioco. Se ad esempio viene prodotto il numero di quattro cifre 9900 e ci vengono comunicate le cifre 909, trattandosi già di un multiplo di nove, saremmo nell'imbarazzo di scegliere la quarta cifra misteriosa tra 0 e 9. Certo ci sarebbe sempre un 50% di probabilità di indovinare ma ci esporremmo comunque ad una cattiva figura. Ma quanto è probabile un evento così sfortunato? Occorre senz'altro quantificare i multipli di nove. Se indichiamo con φ_n il numero di multipli di nove di n cifre (con la convenzione di scrivere 0015 per 15 ad esempio) la probabilità richiesta è $p_n=\frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_n}$ (casi sfavorevoli su casi totali). Utilizzando la tabellina, con la forza bruta potremmo valutare che ad esempio $\varphi_1=2$, $\varphi_2=12$, $\varphi_3=112$ e così via. Non è tuttavia difficile ricavare una formula ricorsiva. Indichiamo con S la somma delle cifre di un numero di n cifre. Possiamo scegliere $n-1$ cifre in modo arbitrario e poi completarle con una cifra che renda S un multiplo di nove. Come osservato in precedenza, ci sono i casi ambigui in cui le $n-1$ cifre scelte costituiscono già un multiplo di nove, nel qual caso il completamento può essere effettuato in due modi diversi (zero oppure nove). Le prime $n-1$ scelte danno luogo a 10^{n-1} numeri distinti e da questi occorre togliere quelli ambigui φ_{n-1} che vanno poi raddoppiati. In definitiva

$$\varphi_n=10^{n-1}-\varphi_{n-1}+2\varphi_{n-1}=10^{n-1}+\varphi_{n-1}.$$

Equivalentemente, dispiegando la formula di ricorrenza possiamo scrivere

$$\varphi_n=10^{n-1}+10^{n-2}+\ldots+10+\varphi_1=\sum_{i=1}^{n-1}10^i+2.$$

Tenuto conto di queste formule valutiamo che $p_n=\frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_n}\to 0$ per $n\to+\infty$ giacché il denominatore è di grado maggiore di quello del numeratore. Anche se questa convergenza è un pochino lenta. Certamente, per assicurarsi di correre un rischio calcolato (è proprio il caso di dirlo) occorre considerare numeri molto grandi. Ad esempio potreste valutare

$$p_2 = \frac{2}{12} \approx 16\%; \quad p_3 = \frac{12}{112} \approx 10,7\%; \quad p_4 = \frac{112}{1114} \approx 10\% \ldots$$

La variante dei numeri simmetrici pone però dei quesiti ulteriori. Infatti, mentre pigiando i tasti della calcolatrice è possibile generare tutti i multipli di nove, questo non è così evidente per l'operazione $x - x^*$. Ad esempio, per numeri di tre cifre, se $x = abc$ allora $x - x^* = 99a - 99c = 99(a - c)$. In questo caso non si generano tutti i multipli di nove di tre cifre, ma soltanto quelli che sono anche multipli di 11. In questo caso specifico possiamo elencare tutti i multipli

$$099, 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792, 891, 990$$

e potremo anche pensare di ricordarli a memoria. Per i casi dubbi, indicando con s la somma delle due cifre comunicate e con x la terza cifra misteriosa, risulta: $s = 9 \Rightarrow x = 9$, mentre $s = 18 \Rightarrow x = 0$.

Tuttavia, per numeri di quattro cifre, se $x = abcd$ allora

$$x - x^* = 999(a - d) + 90(b - c) = 999x + 90y.$$

Dato allora il generico multiplo z di nove con quattro cifre, si tratta di vedere se l'equazione

$$999x + 90y = z$$

nelle due incognite intere x, y ammette soluzione. Equazioni di tal genere si dicono *equazioni diofantee*. Un'equazione del tipo $ax + by = z$ ammette soluzione se e soltanto se z è un multiplo del $MCD(a, b)$. Tale caratteristica dipende dalla cosiddetta Identità di Bezout per cui $MCD(a, b) = ha + kb$ per qualche h, k intero. In altre parole il MCD tra due numeri è combinazione lineare dei due numeri (si veda ad esempio [3] per una breve panoramica). Risolvere la generica equazione diofantea richiede una dimostrazione costruttiva dell'identità di Bezout a partire da una soluzione particolare (x_0, y_0). La soluzione generale dell'equazione diofantea si scrive ([3])

$$x = x_0 + \frac{b}{MCD(a, b)} \cdot n; \quad y = y_0 - \frac{a}{MCD(a, b)} \cdot n$$

al variare del parametro intero n. Una soluzione particolare (x_0, y_0) si può determinare con varie tecniche (algoritmo euclideo, metodo di Eulero, frazioni continue ecc.). Tuttavia, nel nostro caso specifico non è difficile venirne a capo. Dividendo per nove occorre risolvere l'equazione diofantea $111x + 10y = 1$. Scrivendo $111 = 10 \cdot 11 + 1$ otteniamo $1 = 111 - 10 \cdot 11$ da cui la soluzione particolare $(x_0, y_0) = (1, -11)$. La soluzione generale dell'equazione è allora $(1 + 10n, -11 - 111n)$ al variare del parametro intero n. Dunque in tal caso l'operazione aritmetica $x - x^*$ produce tutti i multipli di nove allo stesso modo della versione iniziale del gioco con la calcolatrice. Ma questo è un fatto del tutto generale. In effetti, denotando con $[k]$ la parte intera del numero k, la differenza $x - x^*$ si riscrive nella forma

$$x - x^* = \sum_{i=0}^{[\frac{n+1}{2}]} (a_{n-i} - a_i)(10^{n-i} - 10^i), \tag{1}$$

dove $n + 1$ è il numero di cifre dei numeri considerati. Verificare in quali casi l'espressione $x - x^*$ produce o meno tutti i multipli di nove conduce a considerare delle equazioni diofantee, eventualmente in più di due incognite. Si tratta comunque di determinare il MCD tra numeri della forma $10^i(10^{n-2i}-1)$ (si veda ad esempio [5] per un'introduzione alle equazioni in più incognite). Osservato che 10^N-1 è un numero formato da N cifre tutte uguali a 9 (volendo lo si può facilmente verificare per induzione), raccogliendo il fattore 9 si ottiene alla fine un numero di N cifre tutte pari ad 1. Consideriamo i primi due termini della sommatoria (gli altri hanno un comportamento analogo)

$$10^n-1 = 9\cdot(11\dots1) = 9\cdot\alpha_n^1; \quad 10(10^{n-2}-1) = 10\cdot 9(11\dots1) = 10\cdot 9\cdot\alpha_{n-2}^1$$

dove abbiamo indicato con α_i^1 il numero composto da una sequenza di i cifre consecutive pari ad 1. Non resta che valutare il MCD di queste due stringhe di cifre. Ricordando l'algoritmo euclideo tramite differenze successive ([3]), denotando con α_i^0 la stringa di i zeri consecutivi, otteniamo

$$MCD(\alpha_n^1,\alpha_{n-2}^1) = MCD(\alpha_n^1-\alpha_{n-2}^1,\alpha_{n-2}) = MCD(11\alpha_{n-2}^0,\alpha_{n-2}^1).$$

Osservando che $11\alpha_{n-2}^0 = 11\cdot 10^{n-2}$ e che α_{n-2}^1 è divisibile per 11 se e soltanto se $n-2$ è pari (la differenza tra la somma delle cifre di posto dispari e quelle di posto pari dev'essere un multiplo di 11), abbiamo che per n dispari il MCD tra i termini della (1) è nove. Pertanto, l'operazione aritmetica $x-x^*$ produce tutti i multipli di nove. Per n pari si ottengono invece solo quelli che sono anche multipli di 11.

Bene, ridendo e scherzando ci siamo imbattuti in un bel po' di matematica (criteri di divisibilità, probabilità, equazioni diofantee ecc). E tutto grazie alla magia del **nove**.

Riferimenti bibliografici

[1] E. Behrends, The Math behind the Magic, AMS, 2019.
[2] L. Borzacchini, La Solitudine di Leonardo, Dedalo, 2019.
[3] L. Granieri, Elementi di Matematica, La Dotta, 2015.
[4] L. Granieri, Magia matematica, Sapere, Dedalo, in preparazione.
[5] M Salvi, L'algoritmo di Euclide generalizzato e la soluzione di equazioni diofantee lineari, Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics) Università di Palermo, n. 27, 2017.
[6] Lynn Thorndike, A History of magic and experimental science, Colombia University Press, 1958.