Matematica, Scienza e ... Musica Maestro!*

Luca Granieri

Esisteva quindi un periodo storico, di cui Keplero era un eccellente esponente, in cui i modelli della musica, della matematica e della filosofia naturale parlavano un linguaggio condiviso ed erano in grado di interagire tra loro, nel comune tentativo di descrivere un Cosmo coerente ([7, p.70]).

La musica è il piacere che la mente umana prova quando conta senza essere cosciente di contare sosteneva G. Leibniz. Se esaminiamo, anche sommariamente, un qualsiasi spartito musicale ci accorgiamo subito dell'importanza della matematica, a cominciare dalle frazioni che determinano la *durata* delle singole battute.

Vincenzo Galilei (1520-1590), padre del più famoso Galileo Galilei, era un musicista e valente teorico musicale. L'educazione musicale dello stesso Galileo fu importante per lui. Si ritiene che in diverse esperienze, Galileo facesse proprio uso della sua abilità nel tenere il tempo musicale per misurare il tempo nei suoi esperimenti sul moto, assieme ad altri accorgimenti (battito cardiaco, orologio ad acqua ecc.). Ma la dimestichezza con la musica non era un fatto isolato o un semplice vezzo di famiglia. Basti pensare al solo fatto che la musica era compresa tra le quattro scienze del celebre quadrivio: Aritmetica, Geometria, Astronomia e Musica. La persona colta doveva conoscere la musica, compresa la teoria musicale, in modo serio. Oggi può apparire strana l'inclusione della musica in questo elenco, essendo perlopiù percepita unicamente come arte. Ma le connessioni della musica con la scienza sono più profonde di quanto si pensi, condividendo un'origine comune (si veda anche [3]).

Oggi le cose sono molto diverse e la musica è quasi sparita dall'insegnamento scolastico e sopravvive soltanto una generica educazione musicale nelle scuole di primo grado.

1 Matematica (Musica) linguaggio della natura?!

Uno spartito è scritto in una lingua diversa da quella naturale (italiano, inglese ecc), una lingua appositamente ideata con uno scopo preciso. Padroneggiare questa lingua richiede un faticoso apprendistato (solfeggio). Poiché tutto è codificato e va eseguito esattamente, anche il silenzio (pause).

*Lo spunto per questo articolo proviene da uno spettacolo-conferenza dal titolo *Matematica, Scienza e...Musica Maestro!* tenuto dal sottoscritto durante il convegno *La Cultura Matematica a Scuola*, Università della Basilicata, 15 Febbraio 2019, Potenza ($http://www2.unibas.it/saliani/?page\_id = 224$) e il convegno *Mathematical Pride*, Politecnico di Bari, presso Convitto Cirillo, 22 Febbraio 2019, Bari (@mathematicalpride).

Ma perché è necessario lo spartito? Certo si può suonare anche *a sentimento, così come viene.* Ma come ripetere uno stesso brano musicale, magari a distanza di molto tempo da quando è stato pensato e/o eseguito la prima volta? Ecco, la codifica musicale con tutte le sue complicazioni matematiche garantisce la *ripetibilità*, elemento imprescindibile del *metodo scientifico.* Già, è proprio la *rappresentazione* nel linguaggio musicale *formalizzato* che consente ancor oggi di riprodurre un brano di Vincenzo Galilei come lo avrebbe ragionevolmente potuto ascoltare suo figlio Galileo nel seicento. *La musica, come anche l'astronomia, possedeva come innato il carattere della ripetibilità che, in seguito, la Rivoluzione Scientifica avrebbe imposto a ogni disciplina che volesse definirsi scienza. Per consentire che una determinata composizione fosse ripetibile anche in tempi e luoghi differenti, era stata compresa l'utilità di elaborare un linguaggio preciso, univoco e universalmente accettato* ([7, p.70]). In un certo senso, come uno spartito musicale è una *matematizzazione* di una composizione musicale, così la scienza moderna si costruisce attorno ad una *matematizzazione della realtà.* A ben vedere uno spartito è una sorta di *piano cartesiano*, sull'asse orizzontale è codificato il tempo della *linea melodica* mentre su quello verticale è codificata l'altezza dei suoni e la loro interazione (*linea armonica*). Eh già, un aspetto cruciale è proprio quello dell'*armonia musicale.* Come far interagire strumenti che suonano simultaneamente? Senza una precisa codifica qualunque orchestra finirebbe in un caos pazzesco. Del resto, l'interesse principale della musica moderna è proprio nella *polifonia* che permette di raggiungere vaste forme espressive. Grazie alla matematica, anche la scienza ha potuto fare il suo *salto polifonico* verso la modernità.

Inoltre, la nostra scienza tratta di eventi singoli ed è quantitativa, la scienza antica era di universali e qualitativa, la causalità antica era una catena causa/effetto diacronica, descrittiva e qualitativa, la nostra è polifonica, sincronica e quantitativa. ([1, p.28-29]).

Einstein sosteneva che la scienza moderna nasce da due grandi eventi: *l'invenzione del sistema logico formale nella Grecia antica e il controllo sperimentale emerso nel Rinascimento. Il fatto stupefacente è che questi passi siano stati fatti.* E il linguaggio logico-formale è alla base dei *Teoremi.* La musica della matematica è proprio la dimostrazione che serve a determinare il carattere di ripetibilità e validità dei suoi risultati. Chiunque sia in grado di farlo può ripercorrere i passi di una dimostrazione e convincersi, anche a distanza di millenni, della validità del Teorema di Pitagora, ad esempio. Altro che diamanti: *Un Teorema è (veramente) per sempre!* Perché la matematica è la materia più odiata dagli studenti? Forse perché quella che si propone loro, paradossalmente (ma non tanto), non è *(vera) matematica.* Non è inconsueto sfogliare libri di testo che per centinaia e centinaia di pagine non riportano neanche la parola *Teorema* (per non parlare della relativa dimostrazione). Ma che matematica è questa? Assomiglia ad uno studiare musica sollo sulla carta senza poterla mai eseguire. Una noia mortale ovviamente!

Ma c'è un motivo più profondo per tutto questo. Il fatto è che c'è un *Diavolo cattivo* che come un leone ruggente va in giro cercando di distruggere e divorare in un sol boccone il lavoro dei matematici. Questo diavolo malvagio è la *contraddizione.* Una delle leggi basilari della logica, la cosiddetta Legge di Duns Scoto (Doctor Subtilis), stabilisce che se in una teoria c'è una contraddizione, anche una soltanto, allora in quella teoria si può dimostrare qualunque cosa. Insomma, si tratterebbe di una teoria da buttare via. Giusto per illustrare la situazione: Credete in Babbo Natale? No? Non avete mai visto quell'uomo barbuto, vestito di rosso, e che guida una slitta trainata da renne volanti per distribuire regali la notte di Natale? Bene, allora dobbiamo proprio fermarci un attimo per dimostrare che Babbo Natale esiste davvero! Consideriamo le due frasi nel riquadro qui sotto:

1) Babbo Natale esiste davvero;
2) entrambe le frasi della tabella sono false.

Ragioniamo sulla seconda frase della tabella qui sopra. La frase 2) è vera oppure è falsa. Giusto? Questo è il contenuto del cosiddetto **principio del terzo escluso: Una qualunque proposizione può essere soltanto vera oppure falsa, e nessuna terza possibilità è consentita**. Questa è una versione diciamo forte del principio del terzo escluso. Si tratta del cosiddetto principio di bivalenza ossia che esistano esattamente due soli valori di verità: Vero o Falso. Ora, se la frase 2) è vera, allora deve essere anche falsa perché è lei stessa ad affermarlo. Ma questo non può essere. Altrimenti si violerebbe un altro caposaldo della logica, il cosiddetto **principio di non contraddizione: una qualunque proposizione non può essere contemporaneamente sia vera che falsa**. Allora, non potendo essere vera, la frase 2) deve pertanto essere per forza falsa. Ma questo vuol dire che è vero il contrario di quanto afferma la frase 2), ovvero che almeno una delle due frasi nel riquadro deve essere vera, e poiché abbiamo trovato che la frase 2) è falsa, allora deve essere vera la frase 1). Dunque, Babbo Natale esiste davvero!

Che dire? Vi siete convinti? No? In effetti, si potrebbe perlomeno avere la sensazione che quello appena visto sia soltanto un gioco di parole, o al più un gioco di prestigio, del tipo: il trucco c'è ma non si vede. Se di trucco si può parlare, il sospetto è che riguardi la frase 2). Infatti, è anche evidente la notevole somiglianza con il cosiddetto *paradosso del mentitore*: *Io sto mentendo.* Dico il vero o il falso? Allora, se mento dico la verità. Ma se dico la verità allora sto mentendo. In entrambi i casi abbiamo una contraddizione. In ciascuno di queste formulazioni, ono coinvolte frasi che praticamente affermano in qualche modo la falsità di sé stesse. Una volta Bertrand Russell espresse tali evenienze autoreferenziali con un celebre esempio avente per protagonista il barbiere di una caserma. Un giorno il comandante lo convoca ordinandogli: *fai la barba a tutti coloro che non se la fanno da soli! Sì, Signore!* Allora il barbiere comincia il suo giro per la caserma chiedendo a tutti: *Che fai oggi, ti fai la barba? Sì, non ti preoccupare, oggi me la faccio da solo. OK, allora andiamo avanti. E tu che fai? No, oggi non ho voglia di farmi la barba da solo. Va bene, allora te la faccio io.* Stanco della giornata di lavoro, il barbiere si ritira finalmente nella sua stanza. Ma un tremendo quesito irrompe nella sua mente: *Ma io me la devo fare la barba o no? Perché il comandante ha detto di farla a chi non se la fa da solo. Allora, se mi rado, mi sto facendo la barba da solo e così disubbidisco agli ordini. Ma se non mi rado, allora non mi faccio la barba da solo e allora il comandante ha ordinato di radermi. Cavoli e contro cavoli! E adesso che faccio?* Come si conclude la storia? Forse il povero barbiere soccombe alla punizione del comandante per aver disatteso i suoi ordini (magari il suo intento era proprio quello di dargli una bella lezione) oppure passerà il resto della vita a cercare risposta al dilemma, mentre la barba, incurante della logica degli uomini, continua a crescere indisturbata.

La morale della storia comunque è che, essendoci la possibilità di occorrenze paradossali, il linguaggio naturale è per sua natura contraddittorio, e quindi si può dimostrare tutto e il contrario di tutto (legge di Duns Scoto). Ma questo è proprio quanto una scienza degna di questo nome non può permettere. Pertanto, anche a causa della formazione di paradossi, il linguaggio naturale, da solo, non è adatto a dare un fondamento sicuro alla conoscenza. Dunque, se, come talvolta si dice, la matematica è il linguaggio della natura, allora essa deve necessariamente essere un *linguaggio non naturale*. Il *matematichese* costituisce l'estremizzazione di questa necessità limitando accuratamente gli oggetti di cui si può parlare (attraverso la definizione) e di come se ne possa parlare (attraverso i teoremi). Magari in questo modo non potremo parlare di tutto, per esempio di quel povero barbiere di prima, ma almeno su quel poco che potremo dire saremo in grado di costruire conoscenze ragionevolmente affidabili e certe. Come la musica, anche la matematica si è dovuta dotare di un linguaggio specifico col quale esprimersi. Gli strani simboli della matematica e delle sue dimostrazioni sono gli *spartiti della musica matematica*. L'allontanamento dal linguaggio naturale rende ostica la comprensione, come sa chiunque abbia studiato il *solfeggio*, ma si tratta di un necessario prezzo da pagare per poter eseguire e apprezzare le musiche più belle.

2 Universo matematico-musicale

Come molti filosofi, Pitagora amava passeggiare immerso nei suoi pensieri. Si narra che, durante una di queste passeggiate, egli fosse richiamato dai suoni provenienti da una bottega. Entrato, trova un fabbro intento a battere il martello sull'incudine. A quello spettacolo Pitagora non può fare a meno di chiedere: *cosa succede se si*

Figura 1: I pitagorici indagano i rapporti musica-matematica-realtà

usa questo martello più piccolo? E quell'altro? Vede come il suono dipende dalla *grandezza del martello?* Fu un'illuminazione. Tornato a casa Pitagora si costruì uno strumento col quale continuare le sue indagini.

Il primo strumento scientifico della storia fu proprio uno strumento musicale: *il monocordo*. Con tale strumento Pitagora poteva indagare le relazioni tra musica, natura e matematica. Questo dovette fare una profonda impressione sui pitagorici, il cui motto divenne: **Tutto è numero!**

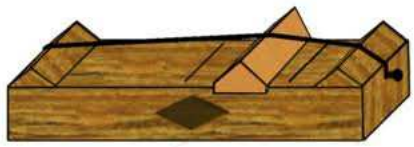

Figura 2: Il monocordo

I problemi fondamentali sono due: 1) Il problema della consonanza (armonia musicale) e 2) Il problema della divisione dell'*ottava*. Utilizzando ad esempio un monocordo, se una parte della corda è lunga il doppio dell'altra, si avvertono due suoni che si percepisce uno come la copia dell'altro, anche se ad altezza diversa. Gli attribuiamo cioè la stessa nota musicale do-do, re-re ecc. (oggi diremmo che sono a distanza di un'ottava una dall'altra). Ma quali altri intervalli tra questi due estremi andrebbero utilizzati per la composizione musicale? La cosiddetta *scala diatonica* ne prevede 6 intermedi (re-mi-fa-sol-la-si) per ottenere un'ottava appunto (tasti bianchi del pianoforte). Attenzione: Si tratta di un *temperamento* non-equabile. Nella musica moderna utilizziamo il temperamento equabile: 12 note in tutto equispaziate (rapporto tra le frequenze uguale) corrispondenti ai tasti bianchi e neri del pianoforte. Questa divisione dell'ottava però necessita dei numeri reali, in particolare della $\sqrt[12]{2}$. Con questa scelta (visto che le note musicali sono date dal rapporto tra lunghezze) possiamo passare dalla lunghezza unitaria a quella doppia moltiplicando 12 volte la $\sqrt[12]{2}$ (semitono) per sé stessa.

$$1 \to \sqrt[12]{2} \to \sqrt[12]{2^2} \to \ldots \to \sqrt[12]{2^{11}} \to \sqrt[12]{2^{12}} = 2.$$

Così, dal do di partenza, associato alla lunghezza unitaria, dopo 12 iterazioni, si riottiene il do un'ottava sopra.

La scala Pitagorica (e sue varianti), in uso fino a tutto il medio evo, utilizzava invece i soli numeri razionali. La divisione dell'ottava è relativa alla linea melodica, quello della consonanza è invece relativo all'armonia. Geometricamente, sullo spartito la linea melodica è quella orizzontale, la linea armonica è quella verticale in cui i suoni si sovrappongono. Quali sono i rapporti consonanti? Pitagora, accettava i rapporti:

$$1/2 \text{ (ottava) },\ 2/3 \text{ (quinta)},\ 3/4 \text{ (quarta)}.$$

Tale scala è fondata sul rapporto di quinta e di ottava. Dunque, si moltiplica ripetutamente 3/2 dividendo eventualmente per 2 per ritornare nell'ottava. Con questo procedimento si ottengono le note

Do	*Re*	*Mi*	*Fa*	*Sol*	*La*	*Si*
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$

Ma non si riottiene mai il DO successivo corrispondente alla lunghezza 2. Proseguendo, moltiplicando per $\frac{3}{2}$ otteniamo $\frac{729}{256}$. Trattandosi di una quantità maggiore di due, per ritornare nell'ottava dimezziamo ancora ottenendo il valore $\frac{729}{512} \approx 1,42$. Possiamo allora ripetere la procedura sperando di ottenere prima o poi esattamente il valore 2 corrispondente al Do, un'ottava sopra il Do di partenza. Comparirà mai il valore 2 come risultato di questi calcoli? No, si tratta in realtà di un compito impossibile. Il metodo divisivo è infatti impossibile perché

$$\left(\frac{3}{2}\right)^h \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2 \Rightarrow 3^h = 2^{h+k+1}.$$

Qualunque iterazione si consideri al variare di h e k l'ultima uguaglianza non può mai essere vera giacché il primo membro contiene unicamente il fattore 3, mentre il secondo membro unicamente il fattore 2.

Occorre pertanto accontentarsi di qualche approssimazione e compromesso. Questo equivale a dire che il *Si*♯ non è uguale al *Do*. La differenza tra le due note dipende dal fatto che nella scala naturale (pitagorica) il semitono non è esattamente la metà di un tono, conducendo a quello che si dice comma pitagorico (rapporto tra due note *quasi* uguali). In effetti proseguendo la costruzione *ascendente* si ottengono

Si♯	*Do*♯	*Re*♯	*Mi*♯	*Fa*♯	*Sol*♯	*La*♯
$\frac{531441}{524288}$	$\frac{2187}{2048}$	$\frac{19683}{16384}$	$\frac{177147}{131072}$	$\frac{729}{512}$	$\frac{6561}{4096}$	$\frac{59049}{32768}$

e come si vede il $Si\sharp \approx 1,013 \neq 1 = Do$. Risulta anche $Mi\sharp \neq Fa$. Problematica del tutto analoga si ripropone per la costruzione delle note in senso *discendente*. Partendo infatti dal $Do = 2$ possiamo dividere per $\frac{2}{3}$ e se il risultato dovesse scendere sotto il $Do = 1$ ne raddoppiamo il valore per rientrare nell'ottava considerata. Si ottengono

Re♭	*Mi*♭	*Fa*	*Sol*♭	*La*♭	*Si*♭	*Do*
$\frac{256}{243}$	$\frac{32}{27}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1024}{729}$	$\frac{128}{81}$	$\frac{16}{9}$	2

In effetti, come sappiamo, per evitare questi problemi e ad esempio assicurarsi che sia $Sol\sharp = La\flat$ occorre una divisione equabile dell'ottava, cosa che invece richiede come detto i numeri irrazionali.

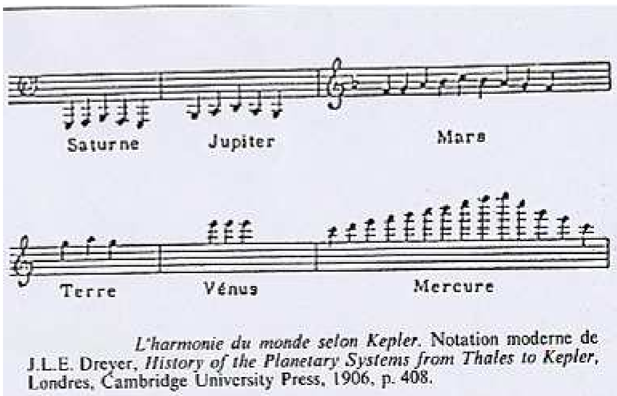

Figura 3: L'armonia delle sfere secondo Keplero

Man mano si sono introdotti altri rapporti armonici nella pratica musicale 5/4 (terza maggiore); 6/5 (terza minore); 5/3 (sesta maggiore); 5/8 (sesta minore). Ai tempi di Keplero andava in voga la teoria del *senario* basata sulla superiorità del numero 6, mentre la teoria pitagorica era basata sul 4. I nuovi rapporti armonici utilizzavano infatti tutti i numeri fino a 6 (tranne la sesta minore). In effetti: 6 è un numero *perfetto* (è la somma dei suoi divisori). Inoltre, sei sono i giorni della creazione. Sei sono i pianeti: Luna (Terra), Mercurio, Venere, Marte, Giove e Saturno. Nella *Armonia del cosmo* ogni pianeta produce la sua propria nota, o melodia (Fig. 3).

Keplero propone una teoria geometrica a supporto tramite poligoni inscritti in una circonferenza (corda richiusa su sé stessa) costruibili con riga e compasso ([7]) per un numero di lati N = 3; 4; 5 e tutti i doppi compreso quindi 6 ed 8. Da 10 in poi si riottengono intervalli già incontrati prima. Ma nel 1796 il giovane Gauss scopre che sono costruibili con riga e compasso tutti e soli i poligoni con N numero primo di Fermat $N = 2^{2^n} + 1$, e risultano pertanto costruibili i poligoni per $n = 5; 17; 257; 65537$ e forse tanti altri, giacché non si conosce a tutt'oggi se l'elenco dei primi di Fermat sia finito o infinito.

Perché poi i pianeti sono proprio sei e disposti nel modo che osserviamo? Perché il mondo è così composto piuttosto che altrimenti? Nel 1617 Robert Fludd immaginava un gigantesco monocordo accordato da Dio in modo da disporre i pianeti del sistema solare secondo le proporzioni necessarie a produrre determinate note (fig. 4). Dio è un musicista e l'universo è il suo strumento musicale!

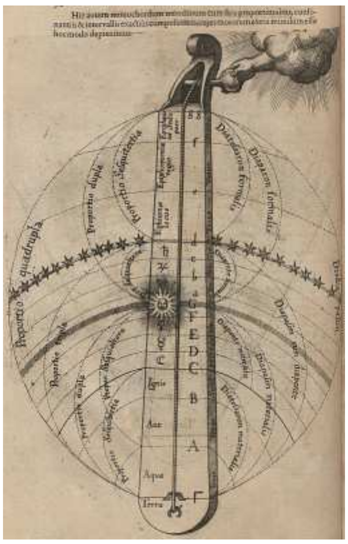

Figura 4: Il monocordo del Cosmo

Anche in questo caso Keplero ha un'intuizione geometrica da proporre. Nel suo *Mysterium cosmographicum* suggerisce che le orbite sferiche dei pianeti si incastrino sui cinque solidi platonici. Ma Keplero era conscio si trattasse di approssimazioni. Uno dei contributi più importanti di Keplero è stato proprio l'accorgersi che la granitica convinzione tradizionale di orbite circolari (alla quale anche Galileo e Copernico si attenevano) doveva essere sostituita da orbite ellittiche. Con questa variazione (Prima legge di Keplero) egli arriva anche a stabilire una relazione precisa tra queste orbite ellittiche e il periodo di rotazione, racchiusa nella famosa Terza legge:

$$T = kr^{\frac{3}{2}}$$

dove T è il periodo di rivoluzione, r la lunghezza del semiasse maggiore dell'orbita e k una costante.

Un esponente piuttosto strano che emerge proprio da una riflessione musicale. Per Keplero l'universo in armonia segue l'intervallo pitagorico di quinta! Keplero stesso scrive l'*Harmonice Mundi* per mostrare come le leggi dell'armonia si possano scorgere ovunque nel cosmo. Un Dio che era armonia doveva aver creato con un ben preciso ordine, non soltanto il sistema musicale ma bensì un gran numero di altre entità, tutte governate dalla stessa regolarità matematico-musicale. *Keplero si propone di rintracciare, in qualche opportuno parametro del moto dei pianeti, le stesse proporzionalità da lui rivelate negli intervalli musicali consonanti* ([7, p. 82]).

Oggi potrebbe forse apparire bizzarra questa commistione tra armonia e cosmologia. Così come cambiano le domande che gli scienziati pongono: oggi non ci chiediamo più perché mai i pianeti del sistema solare siano proprio sei. E di fatto oggi sappiamo che ci sono altri corpi celesti ad abitare il sistema solare. Chiedere il motivo del numero di corpi celesti che orbitano attorno al numero non è più una questione cruciale. È così e basta. Si tratta di un fatto accidentale e poteva benissimo essere altrimenti. In parte la scienza si muove in questo modo. Alcune cose avvengono senza un particolare e/o importante motivo. Indipendentemente dalle suggestioni, religiose o musicali che siano, la grande modernità di Keplero consiste nell'arrendersi al fatto che sia sempre la natura ad avere l'ultima parola. È il controllo sperimentale che deve dirci chi ha ragione. In Galileo (Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo, 1632), si legge che Keplero, nel cercare una spiegazione per il fenomeno delle maree, avrebbe *dato orecchio ed assenso a predominii della Luna sopra l'acqua, ed a proprietà occulte, e simili fanciullezze*, in relazione ad un' invocata e non meglio specificata *virtus magnetica*. Una specie di effluvio proveniente dal Sole che secondo Keplero era anche la causa del moto orbitale dei pianeti attorno al Sole. Eppure Keplero aveva ragione. C'è una specie di fune immaginaria che lega i pianeti al Sole. Uno dei grandi successi della gravitazione di Newton consiste proprio nella deduzione delle leggi di Keplero dall'unico principio della gravitazione universale. In quest'ottica, l'esponente 3/2 di Keplero è meno misterioso e discende dal fatto che la forza centrale prodotta dal Sole dipende dall'inverso del quadrato della distanza dal pianeta, mentre l'accelerazione prodotta è proporzionale alla distanza. Non è difficile mostrarlo nel caso semplificato di moto circolare (uniforme)

$$F = ma \Rightarrow \frac{K}{r^2} = m\frac{v^2}{r} = m\omega^2 r = m\frac{4\pi^2 r}{T^2} \Rightarrow T^2 = Kr^3 \Rightarrow T = Kr^{\frac{3}{2}}$$

utilizzando la formula di Huyghens $a = \frac{v^2}{r}$ per l'accelerazione centripeta con $v = \omega r$ e $\omega = \frac{2\pi}{T}$. *È interessante che Keplero abbia proposto una tavola di confronto tra le previsioni ottenute con il metodo dei poliedri, quelle ricavate con le proporzioni armoniche e quelle misurate sperimentalmente (dati di Ticho Brahe) per suggerire che la rappresentazione armonica fosse da preferire sulla base dei dati sperimentali. Per quell'epoca rappresenta infatti un fatto straordinario che Keplero sia stato disposto* *a mettere in gioco il proprio modello, per quanto metafisico esso fosse, attraverso il confronto con il dato sperimentale: egli aveva assegnato alle discrepanze tra teorie e misure l'autorità di esigere la modifica della teoria stessa. In questo atteggiamento è possibile scorgere in Keplero un aspetto di autentica modernità* ([7, p.87]).

Passando dalla musica pitagorica essenzialmente matematico-speculativa ad un approccio che coniugasse le esigenze sperimentali (matematico-empirico). Aspetto quest'ultimo caratteristico del metodo scientifico moderno.

3 Le leggi del mondo!?

Abbiamo parlato di armonia e fede in un cosmo ordinato e regolato da leggi che è possibile scoprire (o inventare?). Ma esistono veramente delle leggi? Non potrebbe essere l'universo qualcosa di intrinsecamente *casuale*? Proviamo a farci qualche idea generale. In molte scuole, durante il cambio dell'ora, nelle classi, e spesso anche nei corridoi, si crea una situazione caotica. Tutti si muovono disordinatamente e un eventuale osservatore esterno non saprebbe dire chi andrà dove. Un movimento del tutto sregolato. Quando invece arriva il professore la situazione muta drasticamente, o almeno si spera. Gli alunni dovrebbero essere tutti seduti al loro posto e l'osservatore esterno ora può tirare un sospiro di sollievo osservando un preciso ordine. Potremo dire che qualcosa è *casuale* (o caotico) se avviene in *assenza di regole*. Ma l'assenza di regole non significa mancanza di regolarità! Ora, mentre leggete queste righe, le particelle che compongono l'aria, anche se non ce ne accorgiamo, si stanno muovendo un po' di qua e un po' di la in maniera del tutto casuale. E questo è un bene per noi. Attorno a ciascuno di noi un po' d'aria si allontana e un po' si avvicina e abbiamo sempre qualcosa da respirare. Ma cosa succederebbe se tutte queste particelle decidessero di concentrarsi in un angolino della nostra stanza? Passeremmo certamente un brutto quarto d'ora. Perché non lo fanno? Cosa glielo impedisce? Il fatto è che nessuno lo impedisce e di fatto, prima o poi, questo funesto e bizzarro evento accadrà! Perché mai? Ricordate che abbiamo detto casuale una situazione senza regole. Se non lo facesse allora ci sarebbe una regola: *le particelle d'aria non possono mai concentrasi tutte in un angolo della stanza.*

Prendiamo ancora ad esempio le estrazioni del lotto. Se su una ruota esce per cento volte consecutive il numero uno sarebbe una situazione bizzarra, vero? Tanto quanto l'aria impazzita di prima. Certamente conviene controllare che il sistema di estrazione non sia truccato, ma, se così non è, può o non può accadere una cosa tanto strana? Sì, può accadere, anzi, deve farlo! Il fatto è che, se il fenomeno è veramente casuale, allora non deve valere nessuna regola, ma proprio nessuna nessuna. Se l'uscita dei cento uno consecutivi non fosse possibile, allora la *Non escono cento uno consecutivi* sarebbe una regola. Ma noi non vogliamo regole! Si tratta di un fatto di pura logica. Dobbiamo rassegnarci, prima o poi usciranno cento uno consecutivi, e prima o poi ci mancherà purtroppo l'aria da respirare. Quanto ci dobbiamo preoccupare? A questo punto subentra la probabilità. Il suo compito è proprio quello di quantificare, diciamo così, la possibilità che un evento accada oppure no. La probabilità restituirà un numero reale compreso tra zero ed uno. Il valore zero è riservato agli eventi *impossibili*, come l'estrazione del numero 91 ad un giro di tombola, mentre uno è riservato agli eventi certi, come l'estrazione di un numero tra uno e novanta nella tombolata di prima. Tutti gli altri eventi avranno una probabilità intermedia: più il valore è vicino ad uno e più facile sarà il verificarsi dell'evento. E si possono fare dei calcoli anche piuttosto precisi. La probabilità di uscita di cento valori uguali consecutivi, come si può intuire, è estremamente bassa. Gli scienziati sono in grado di stimare anche eventi come quello riguardante l'aria impazzita. Si tratta di probabilità molto ma molto piccole, ma non zero. Si tratta di eventi che prima o poi accadranno, anche se si stima che il tempo necessario affinché un evento particolare come quello accada è superiore all'età stimata del nostro universo. Quindi possiamo stare tranquilli per un po'. Anche se una probabilità diversa da zero significa che l'evento può verificarsi e in un certo senso deve (prima o poi) verificarsi. Anche se la probabilità è molto piccola.

Nell'estate del 1992 si svolsero gli europei di calcio. La Danimarca non si era qualificata e giocatori e allenatore stavano chi al mare e chi in montagna a godersi le vacanze. Quale sarebbe la probabilità che la Danimarca vinca il torneo? Zero o quasi. Eppure, a seguito della guerra nei Balcani, l'allora squadra della Jugoslavia fu esclusa. Al suo posto fu ripescata la Danimarca che in maniera del tutto inaspettata vinse il torneo. Incredibile! Il fatto che un evento molto poco probabile accada non è un miracolo, anche se ci si avvicina parecchio. Ma buona parte della scienza moderna si basa anche sul fatto che eventi con probabilità molto piccola di fatto non accadono (*legge di Borel*). Ma questa è un'altra storia ([6]).

Ancora, lanciando una moneta potremo scommettere sull'uscita di testa o di croce. Se fossimo in grado di misurare con la dovuta precisione tutte le forze agenti sulla moneta al momento del lancio, perlomeno in linea di principio, potremmo seguirne tutte le fasi e *indovinare* come questa cadrà. In tal caso potremo vincere con certezza la scommessa. Ma gli strumenti sia teorici che applicativi che abbiamo a disposizione non sono lontanamente in grado di portare a termine un'analisi del genere. Ci dobbiamo allora accontentare di un approccio probabilistico e dire che la probabilità che esca testa (o croce) è pari ad 1/2, visto che alla lunga ci aspettiamo l'uscita della stessa quantità tra teste e croci. Questo non significa che non possano uscire cento teste consecutive. Si tratta di un evento con bassissima probabilità, ma deve prima o poi accadere. Ricordate l'assenza di regole per il caso? E questo dovrebbero saperlo tutti coloro che scommettono sui cosiddetti numeri ritardatari del lotto. Se un certo numero (ritardatario) non esce diciamo da 100 o anche 10000 giorni pensate che la sua uscita sia per questo imminente? Molti lo ritengono e scommettono ripetutamente sull'uscita del numero ritardatario. Quanto detto fino ad ora vi dovrebbe sconsigliare altamente dall'imbarcarvi in strategie come queste. Ribadiamo: caso vuol dire assenza di regole. Se potessimo essere sicuri che il numero ritardatario uscirà anche entro anche 500 estrazioni, questa sarebbe una regola! Allora il numero ritardatario potrà benissimo beffarsi di noi e non uscire per decenni, poi, proprio quando abbiamo esaurito i nostri soldi o ci siamo stancati di inseguirlo, magari viene estratto per dieci volte consecutive. Il caso è fatto così, non guarda in faccia a nessuno! Anche nei ostri devices preferiti (Ipod, tablet, smartphne ecc.) c'e una gran quantità di files musicali. Se non vogliamo sentire un disco completo dello stesso artista, questi aggeggi danno la possibilità di ascoltare i pezzi in un ordine casuale. Questo significa a, ormai sappiamo bene, che capiterà anche di ascoltare lo stesso artista o addirittura la stessa canzone più volte consecutive. Ma come questa canzone l'ho appena ascoltata! Ma che caso è questo? Già, casuali non vuol dire tutti diversi, altrimenti questa stessa sarebbe una regola! Molte aziende produttrici sono dovute infatti intervenire al proposito per rendere i loro sistemi meno casuali e andare incontro alle esigenze dei consumatori. State pensando che il caso sia un diavoletto dispettoso? Sì, ma la probabilità dipende dalla conoscenza e la conoscenza è potere, anche nei confronti del caso. Ma esiste veramente il caso? La probabilità è solo una quantificazione della nostra ignoranza? Einstein direbbe che Dio non gioca a dadi. Ma a quanto pare, come testimonia la meccanica quantistica, a volte anche a lui piace, diciamo così, giocare d'azzardo! Comunque sia, il calcolo delle probabilità è diventato oggi un sapere indispensabile in fisica, medicina, economia, biologia, sociologia e in tutte le scienze. Più che soltanto un ramo della matematica, la probabilità è un modo di vedere il mondo ed è importante il suo studio perché può aiutarci ad assumere, di fronte a fenomeni legati al caso, un atteggiamento razionale e coerente. Ma pensare in questo modo non è sempre facile.

Nello storico articolo sull'*irragionevole efficacia della matematica nelle scienze naturali*, il premio Nobel per la fisica E. Wigner ritiene la matematica *un dono che non abbiamo meritato*. L'articolo si apre narrando di uno studioso che mostra una sua raccolta di dati su una popolazione a un suo vecchio amico matematico. Quest'ultimo gli comunica che i suoi dati sono regolati dalla distribuzione di Gauss, come in figura 5.

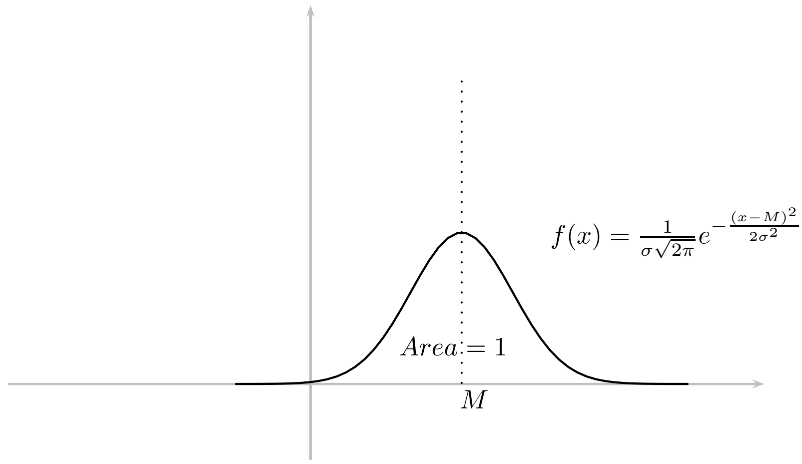

Figura 5: Distribuzione Gaussiana di dati statistici

No, non ci posso credere! replica l'amico. *Cosa diavolo può avere mai a che fare il cerchio con la mia popolazione?* Già, perché il celebrato numero π presente nella formula è l'area del cerchio di raggio unitario. Che spunta fuori inaspettato in tante altre situazioni. A titolo illustrativo, riportiamo l'equazione per una particella quantistica libera di massa m (h è la cosiddetta costante di Planck)

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h}{4\pi m}\Delta\psi$$

che se non altro farebbe comunque la sua figura stampata su di una maglietta, o se non sapete che cosa tatuarvi sulla schiena. Visto che siamo in tema, un'altra relazione fondamentale della meccanica quantistica è il cosiddetto *principio di indeterminazione di Heisenberg*. Si tratta della disuguaglianza

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$$

in cui Δx rappresenta la variazione (e quindi la relativa incertezza) sulla posizione x di una particella quantistica, mentre Δp rappresenta la variazione della quantità di moto p (data dal prodotto della massa della particella per la sua velocità).

Perché mai il cerchio ([4]) sembra essere così fondamentale? Il mondo è veramente soggetto a leggi matematiche? Dio è un matematico? Man mano che i nostri studi proseguono alcune cose possono apparire meno sorprendenti, mentre altre lo diventano sempre di più. L'importanza della media e della distribuzione gaussiana nell'esempio di Wigner è ad esempio legata al Teorema Limite Centrale. Ma altre diventano ancora più misteriose di prima. Come l'incompatibilità tra meccanica quantistica e Relatività generale. Dal punto di vista matematico, il contrasto nasce dal fatto che la meccanica quantistica si poggia su una struttura *discreta*, mentre quella della relatività è *continua*. Torniamo allo spartito musicale da cui abbiamo preso le mosse. Esso presente una struttura discreta, una nota dopo l'altra. Ma ad un livello più fondamentale, quello ad esempio delle vibrazioni di una corda di violino che esegua quanto riportato nello spartito, la struttura diventa continua. Se vogliamo, uno spartito costituisce una *discretizzazione* del tessuto *continuo* musicale. Ebbene, i tentativi per armonizzare tra loro meccanica quantistica e relatività seguono un po' queste linee guida. La cosiddetta *Gravità quantistica* cerca di discretizzare il continuo, anche il tessuto dello spazio-tempo. La cosiddetta *Teoria delle stringhe* invece cerca di rendere continuo il discreto. Le particelle (discrete) corrisponderebbero alle vibrazioni di oggetti continui più fondamentali (stringhe, o brane ecc.). In qualche modo le particelle elementari della fisica sarebbero le *note musicali* eseguite da queste cordicelle. Siamo alla fine tornati alla metafora di Dio come musicista!

Riferimenti bibliografici

[1] L. Borzacchini, La Scienza di Francesco, Dedalo, 2018.

[2] L. Borzacchini, Il continuo, in Mathematical Pride I, La Dotta editore, 2020.

[3] L. Granieri, Dio c'è e la scienza..., La Dotta editore, 2015.

[4] L.Granieri,Pi-Greco & Company, Periodico di matematiche 3/2016, Mathesis.

[5] L. Granieri, Mathematics is a science! Science & Phillosophy, Vol. 7 No.2 (2019).

[6] D. J. Hand, Il Caso non Esiste, Rizzoli, 2014.

[7] A.M. Lombardi, Keplero, Le Scienze, collana I grandi della Scienza n.13, 2000.

[8] P. Odifreddi, Penna, pennello e bacchetta, Laterza, 2006.

[9] E. Wigner,L'irragionevole efficacia della matematica nelle scienze naturali Adelphi, 2017