Teoremi di metrizzazione

Luca Granieri*

Settembre 2002

1 Introduzione

Assegnato uno spazio topologico(X, τ) è naturale chiedersi se si può definire una metrica su X di modo che la topologia τ_d da essa indotta coincida con la topologia preassegnata. In caso affermativo lo spazio si dice metrizzabile.
I teoremi che vengono presentati danno condizioni necessarie e sufficienti affinchè uno spazio topologico sia rispettivamente metrizzabile e separabile, merizzabile. Il primo è il classico teorema di metrizzazione di Uryshon. Nel secondo teorema, invece, una variante della procedura di Uryshon prova la sufficienza delle condizioni, mentre la necessità richiede una nuova sorta di costruzione.

2 Il teorema di metrizzazione di Uryshon

Il modello costruttivo per una dimostrazione della metrizzabilità si basa sulle seguenti considerazioni.
Sia $(X_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una famiglia numerabile di spazi metrici. E' noto che lo spazio topologico prodotto (X, τ) è metrizzabile. In effetti si può considerare ad esempio la distanza: $d(x, y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n}$ [1, pag. 78].
Sia ora A un insieme qualsiasi. Preso $I = [0, 1]$ consideriamo il cubo
$I^A = \prod_{\alpha\in A} I_\alpha$ con $\forall\alpha \in A : I_\alpha = I$. A causa del teorema di Tychonoff, i cubi sono spazi di Hausdorff compatti. Quindi i cubi sono spazi normali(T_4)[1, pag. 140] (nella definizione è compresa la proprietà di essere T_1).
Ricordiamo che ogni spazio metrico è normale[1, pag. 108] e inoltre soddisfa il primo assioma di numerabilità, ovvero ogni suo punto è dotato di un sistema fondamentale di intorni numerabile.
Pertanto la classe degli spazi metrizzabili non può essere più ampia della classe degli spazi normali soddisfacenti il primo assioma di numerabilità. Inoltre queste due proprietà non sono sufficienti neanche considerate assieme. In effetti occorre qualcosa di più.
In particolare tra questi spazi si possono selezionare gli spazi regolari (T_3)(anche qui è compresa la proprietà T_1) a base numerabile [1, pag. 113] . Sussiste il seguente

*Dipartimento di Matematica L. Tonelli
Università di Pisa, via Buonarroti 2, 56127 Pisa, Italy. granieri@mail.dm.unipi.it

Teorema 1 (di metrizzazione di Uryshon) *Ogni spazio regolare a base numerabile è metrizzabile*

dim. Sia dunque (X, τ) regolare, e sia $\mathcal{B}$ una base numerabile di X . Facciamo vedere che X è omeomorfo ad un sottospazio del cubo $I^{\mathbb{N}}$, che, per quanto osservato, è metrizzabile. Quindi X stesso sarà metrizzabile.
Consideriamo l'insieme $\mathcal{S}$ delle coppie (U, V) di elementi di $\mathcal{B}$ tali che $\overline{U} \subset V$. Poichè $\mathcal{B}$ è numerabile, anche $\mathcal{S}$ lo è. Quindi $\mathcal{S} = (U_n, V_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\overline{U}_n \subset V_n \Rightarrow V_n^c \cap \overline{U}_n = \emptyset$$

Per il lemma di Uryshon [1] esistono $f_n : X \to I$ continue e tali che

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in \overline{U}_n \\ 1 & x \notin V_n \end{cases}$$

Sia ora F un chiuso di X e sia $x \in F^c$. Quindi esiste $B \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B \subset F^c$. Essendo poi X normale, esiste $B' \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B' \subset \overline{B'} \subset B$. Pertanto $(B', B) \in \mathcal{S}$. Dunque esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $x \in U_n \subset \overline{U_n} \subset V$ e inoltre $V_n \cap F = \emptyset$. Allora $f_n(x) = 0$, mentre $\overline{f_n(F)} = \{1\}$, donde $f_n(x) \notin \overline{f_n(F)}$. Resta così definita la famiglia $\mathcal{F} = \{f_n : X \to I, continua\}_{n \in \mathbb{N}}$ verificante la proprietà:

$$\forall F \subset X \text{ , chiuso, } \forall x \in F^c : \exists n \in \mathbb{N} \text{ tale che } f_n(x) \notin \overline{f_n(F)} \tag{1}$$

Si consideri ora la funzione $f : X \to I^{\mathbb{N}}$ così definita: $f(x) = (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$.
Evidentemente f è continua. Se $x, y \in X$ e $x \neq y$ poichè X è T_1 , a causa della (1), esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $f_n(x) \notin \overline{f_n(y)}$, donde $f_n(x) \neq f_n(y)$ e quindi $f(x) \neq f(y)$. Ovvero f è ingettiva. Dunque la funzione $f : X \to f(X) \subset I^{\mathbb{N}}$ è invertibile. Resta da verificare che f è un omeomorfismo. A tal fine è suficiente verificare che $\forall F \subset X$, chiuso, : $f(F)$ è chiuso di $f(X)$. Sia dunque F chiuso di X e sia $z \in f(X) \backslash f(F)$. Dunque esiste $x \in X$ tale che $z = f(x)$ e $x \notin F$. Per la (1) esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $f_n(x) \notin \overline{f_n(F)}$. Allora esiste un aperto U di I tale che $f_n(x) \in U \subset I \backslash \overline{f_n(F)}$. Pertanto $U \cap f_n(F) = \emptyset$. Considerata ora $p_n : I^{\mathbb{N}} \to I$ la proiezione n-esima, prendiamo $V = p_n^{-1}(U)$ aperto di $I^{\mathbb{N}}$. V è un intorno di z e inoltre $V \cap p_n^{-1}(f_n(F)) = \emptyset$. Ma poichè $f(F) \subset p_n^{-1}(f_n(F))$ allora $f(F) \cap V = \emptyset$. Preso dunque $V' = V \cap f(X)$, abbiamo che $z \in V' \subset f(X) \backslash f(F)$, donde $f(F)$ è chiuso. □ E' facile ora descrivere la classe degli spazi topologici a cui si può applicae il teorema precedente.

Teorema 2 *Se (X, τ) è uno spazio topologico, le seguenti proprietà sono equivalenti:*
a) X è regolare a base numerabile
b) X è omeomorfo ad un sottospazio del cubo $I^{\mathbb{N}}$
c) X è metrizzabile e separabile

dim. a)$\Rightarrow$ b) . E' il teorema 1.
b) $\Rightarrow$ c) . X è ovviamente metrizzabile. Inoltre, il prodotto numerabile di spazi a base numerabile è ancora a base numerabile [1, pag. 110], quindi $I^{\mathbb{N}}$ è a base numerabile, quindi è separabile [1, pag. 111] . Essendo poi metrico, anche il sottospazio del cubo è separabile[1, pag.112] .
c)$\Rightarrow$a) . X è sicuramente regolare. Inoltre, X metrico e separabile $\Rightarrow$ X a base numerabile. [1, pag. 111] □

3 Metrizzazione per spazi non separabili

Anche se tratta di un caso particolare, il teoema di Uryshon è stato a lungo uno dei più soddisfacenti teoremi di classificazione topologica degli spazi metrizzabili. E' lecito chiedersi se la procedura usata può in qualche modo essere migliorata, in modo da contemplare spazi che non siano necessariamente metrizzabili. Ovvero, nella fattispecie, si tratta di indebolire la condizione di avere una base numerabile. La chiave di questo problema è costituita dalla nozione di locale finitezza.

Definizione 1 *Una famiglia $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$ di sottoinsiemi di (X, τ) si dice localmente finita se si verifica*

$$\forall x \in X : \exists U \text{ intorno di } x, \exists J \subset I, \text{ finito, non vuoto, tale che } \forall i \in I \backslash J : A \cap U = \emptyset$$

Ovvero se U interseca al più un numero finito di elementi di $\mathcal{A}$.

E' immediato constatare che $\bigcup_{i \in I} \overline{U_i} \subset \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$ mentre in generale il vicevera non sussiste, a meno che la famiglia considerata non sia localmente finita. Infatti

Lemma 1 *Sia $(A_i)_{i \in I}$ localmente finita. Allora $\bigcup_{i \in I} \overline{U_i} = \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$*

dim. Sia $x \in \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$. Per la locale finitezza esiste un intorno U di x ed esiste $J \subset I$, finito e non vuoto, tale che $\forall i \in I \backslash J : U \cap A_i = \emptyset$. D'altronde, appartenendo alla chiusura, dev'essere $\forall\, V$, intorno di x, : $V \cap \bigcup_{i \in I} A_i \neq \emptyset$. Pertanto gli elementi di tale intersezione devono stare in qualche A_i con $i \in J$. Ovvero $x \in \overline{\bigcup_{i \in J} A_i} = \bigcup_{i \in J} \overline{A_i} \subset \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$. $\square$

Oss. 1 *Si vede facilmente che anche la famiglia $(\overline{A_i})_{i \in I}$ è localmente finita.*

Definizione 2 *La famiglia $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$ si dice discreta se l'insieme $J \subset I$ della definizione 1 è ridotto ad un solo elemento. Ovvero se U interseca al più un solo elemento di $\mathcal{A}$.*

Oss. 2

$$\mathcal{A} \text{ discreta } \Rightarrow \mathcal{A} \text{ localmente finita}$$

$$\mathcal{A} \text{ discreta } \Rightarrow (\overline{A_i})_{i \in I} \text{ discreta}$$

Definizione 3 *$\mathcal{A}$ si dice σ-localmente finita (risp. σ-discreta) se esiste una successione $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di famiglie localmente finite (risp. discrete) tale che $\mathcal{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n$.*

Vedremo tra breve come la condizione di base numerabile può essere sostituita da quella di base σ-localmente finita. Intanto verifichiamo la condizione necessaria di normalità.

Lemma 2 *Ogni spazio regolare dotato di una base σ-localmente finita è normale*

dim. Intanto, direttamente dalla definizione, si verifica immediatamente che se $x \in U$,aperto, allora esiste un aperto V tale che $x \in V \subset \overline{V} \subset U$. Sia ora $\mathcal{B}$ la base σ-localmente finita di X, e siano F, G due chiusi disgiunti. Poniamo:

$$\mathcal{U} = \{U \in \mathcal{B} |\, \overline{U} \cap G = \emptyset\} \quad ; \quad \mathcal{V} = \{V \in \mathcal{B} |\, \overline{V} \cap F = \emptyset\}$$

Osserviamo che si verificano:

$$x \in F \Rightarrow \exists U \in \mathcal{U} \text{ tale che } x \in U \quad ; \quad y \in G \Rightarrow \exists V \in \mathcal{V} \text{ tale che } y \in V \qquad (2)$$

Infatti, se $x \in F$, allora $x \in G^c$. Quindi esiste $B \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B \subset \overline{B} \subset G^c$, donde $\overline{B} \cap G = \emptyset$. Analogamente si verifica la seconda asserzione. Chiaramente, $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ sono sottofamiglie σ-localmente finite di $\mathcal{B}$. Pertanto possiamo prendere $\mathcal{U} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_n$ e $\mathcal{V} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_n$, dove $\mathcal{U}_n$ e $\mathcal{V}_n$ sono famiglie localmente finite di elemente di $\mathcal{B}$. Si prendano ora

$$U_n = \bigcup_{W\in\mathcal{U}_n} W \quad ; \quad V_n = \bigcup_{W\in\mathcal{V}_n} W$$

A causa del lemma 1 abbiamo che $\overline{U_n} = \bigcup_{W\in\mathcal{U}_n} \overline{W}$.
Pertanto $\forall n \in \mathbb{N} : \overline{U_n} \cap G = \emptyset$. Allo stesso modo si ottiene che $\forall n \in \mathbb{N} : \overline{V_n} \cap F = \emptyset$. Quindi poniamo:

$$U'_n = U_n \setminus \bigcup_{k\leq n} \overline{V_k} \quad ; \quad V'_n = V_n \setminus \bigcup_{k\leq n} \overline{U_k}$$

Poichè $\forall k \leq n : U'_n \cap V_k = \emptyset$, allora $\forall k \leq n : U'_n \cap V'_k = \emptyset$. Allo stesso modo abbiamo anche che $\forall k \leq n : V'_n \cap U'_k = \emptyset$. Posti allora

$$U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U'_n \quad ; \quad V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V'_n$$

abbiamo subito che $U \cap V = \emptyset$. Se poi $x \in F$, per la(2) esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $x \in U_n$. Ma $U'_n \cap F = (U_n \setminus \bigcup_{k\leq n} \overline{V_k}) \cap F = U_n \cap F$, donde $x \in U'_n$, e quindi $F \subset U$. Allo stesso modo si ottiene $G \subset V$, e quindi X è normale. $\Box$

Oss. 3 *Assegnata una famiglia* $\{f_\alpha : X \to I, continua\}_{\alpha\in A}$ *che verifichi la proprietà:*

$$\forall F \subset X,\ chiuso\ , \forall x \in X \setminus F : \exists \alpha \in A \ tale\ che\ f_\alpha(x) \notin \overline{f_\alpha(F)}$$

si prova che X *è omeomorfo ad un sottospazio del cubo* I^A *. Il teorema di Uryshon è consistito per l'appunto nel trovare una tale famiglia che fosse numerabile. Si tratta allora di generalizzare questa costruzione.*

Lemma 3 *Ogni spazio regolare dotato di una base* σ*-localmente finita è metrizzabile.*

dim. Sia $\mathcal{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ con $\mathcal{B}_n$ localmente finita. Fissati due interi n, m e considerato un $U \in \mathcal{B}_m$, sia U' la riunione di tutti i membri di $\mathcal{B}_n$ la cui chiusura è contenuta in U. Quindi

$$U' = \bigcup_{U_n\in\mathcal{B}_n} U_n \,, \quad \text{con } \overline{U_n} \subset U$$

Per la locale finitezza e il lemma 1, risulta che $\overline{U'} \subset U$. Pertanto $(X\setminus U) \cap \overline{U'} = \emptyset$. Essendo X normale (lemma 2), per il lemma di Uryshon esiste una

$$f_U : X \to I, \text{ continua, tale che } \forall x \in X : f_U(x) = \begin{cases} 1 & x \in U' \\ 0 & x \in X\setminus U \end{cases}$$

Allora poniamo:

$$\forall x, y \in X : d_{n,m}(x, y) = \sum_{U \in \mathcal{B}_m} |f_U(x) - f_U(y)|$$

Essendo $\mathcal{B}_m$ localmente finita, allora la somma considerata è finita e qindi $d_{n,m}$ definisce una pseudo-metrica su X (ovvero non è detto che $d_{n,m}(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$).
Sia ora $F \subset X$ un chiuso e $x \in X \backslash F$. Allora si verificano:

$$\exists m \in \mathbb{N}, \exists U \in \mathcal{B}_m \text{ tali che } x \in U \subset X \backslash F$$

$$\exists n \in \mathbb{N}, \exists V \in \mathcal{B}_n \text{ tali che } x \in V \subset \overline{V} \subset U$$

Pertanto $d_{n,m}(x, F)$ è almeno 1, quindi senz'altro $d_{n,m}(x, F) > 0$. Consideriamo allora le funzioni identiche $i_{n,m} : X \to (X, d_{n,m})$, che sono continue e in quantità numerabile. Per $n = m$ la famiglia di funzioni continue $i_n : X \to (X, d_n)$ verifica la proprietà:

$$\forall F \subset X, \text{ chiuso}, \forall x \in X \backslash F : \exists n \in \mathbb{N} \text{ tale che } i_n(x) \notin \overline{i_n(F)} \; (\Leftrightarrow x \notin \overline{F})$$

Allora, come nel teorema 1 , X è omeomorfo ad un sottospazio dello spazio prodotto degli spazi (X, d_n) . Ovvero X è pseudo-metrizzabile. Ma essendo anche T_1 , necessariamente X è metrizzabile. □

Definizione 4 *Sia* $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ *un ricovrimento di* (X, τ). *Si dice che un ricovrimento* $\mathcal{V} = (V_j)_{j \in J}$ *è un raffinamento di* $\mathcal{U}$ *se*

$$\forall j \in J : \exists i \in I \text{ tale che } V_j \subset U_i$$

Lemma 4 *Ogni ricovrimento aperto di uno spazio metrico è dotato di un raffinamento* σ*-discreto.*

dim. Sia $\mathcal{U} = (U_s)_{s \in S}$ un ricovrimento aperto di (X, d). Utilizzando l'assioma della scelta, muniamo S di una relazione $\subset$ di buon ordine. per $n \in \mathbb{N}$ si definiscano le famiglie $\mathcal{V}_n = (V_{s,n})_{s \in S}$ nella seguente maniera:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall s \in S : V_{s,n} = \bigcup_{c \in X} B(c, 1/2^n)$$

dove la riunione è fatta rispetto agli indici $c \in X$ che verificano le proprietà:
1) s è il più piccolo elemento di S tale che $c \in U_s$.
2) $c \notin V_{t,m}$ per $m < n$ e per $t \in S$.
3) $B(c, 3/2^n) \subset U_s$.
Evidentemente ogni $V_{s,n}$ è aperto. Inoltre per la 3) risulta $V_{s,n} \subset U_s$. Sia ora $x \in x$ e prendiamo il più piccolo $s \in S$ tale che $x \in U_s$. Prendiamo poi un $n \in \mathbb{N}$ tale che $B(x, 3/2^n) \subset U_s$.
A seconda che si verifichi la 2) o meno, abbiamo due possibilità:

$$(x \in V_{s,n}) \vee (x \in V_{t,m} \text{ per almeno un } m < n \text{ e un } t \in S)$$

In ogni caso abbiamo che $\mathcal{V} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n$ è un raffinamento aperto di $\mathcal{U}$. Resta da verificare che $\forall n \in \mathbb{N} : \mathcal{V}_n$ è discreto. Se $n \in \mathbb{N}$ e $s_1 \neq s_2$, verifichiamo che:

$$\begin{matrix} x_1 \in V_{s_1,n} \\ x_2 \in V_{s_2,n} \end{matrix} \Rightarrow d(x_1, x_2) > 1/2^n \tag{3}$$

Infatti, assumiamo per esempio $s_1 < s_2$. Per definizione esistono $c_1, c_2 \in X$ tali che $x_1 \in B(c_1, 1/2^n) \subset U_{s_1}$, mentre $x_2 \in B(c_2, 1/2^n) \subset U_{s_2}$.
Dalla 3) abbiamo $B(c_1, 3/2^n) \subset U_{s_1}$, mentre dalla 1) deduciamo che $c_2 \notin U_{s_1}$. Allora $d(c_1, c_2) \geq 3/2^n$. Dunque

$$3/2^n \leq d(c_1, c_2) \leq d(c_1, x_1) + d(x_1, x_2) + d(x_2, c_2) < 1/2^n + d(x_1, x_2) + 1/2^n$$

da cui $d(x_1, x_2) < 3/2^n - 2/2^n = 1/2^n$. Si fissi ora un $x \in X$ e un $n \in \mathbb{N}$. Verifichiamo che la sfera $B(x, 1/2^{n+1})$ incontra al più un elemento di $\mathcal{V}_n$ .In effetti se per assurdo così non fosse, esisterebbero due distinti $s_1, s_2 \in S$ per i quali

$$x_1 \in V_{s_1,n} \cap B(x, 1/2^{n+1}) \neq \emptyset$$
$$x_2 \in V_{s_2,n} \cap B(x, 1/2^{n+1}) \neq \emptyset$$

D'altronde $d(x_1, x_2) \leq d(x_1, x) + d(x, x_2) < 1/2^{n+1} + 1/2^{n+1} = 1/2^n$. Ma questo contraddice la (3) . $\Box$ Possiamo riassumere quanto detto nel seguente

Teorema 3 (di caratterizzazione degli spazi metrizzabili) *Per uno spazio topologico $X, \tau)$ le seguenti proprietà sono equivalenti:*
a) X è metrizzabile
b) X è regolare e dotato di una base σ-localmente finita
c) X è regolare e dotato di una base σ-discreta

dim. $c) \Rightarrow b)$ è ovvio.
$b) \Rightarrow a)$ è il lemma 3 .
$a) \Rightarrow c)$ per $n \geq 1$ sia $\mathcal{B}_n = (B(x, 1/n))_{x \in X}$ ricovrimento aperto di X. Per il lemma 4 possiamo prendere $\mathcal{B}'_n$ un raffinamento σ-discreto. Facciamo vedere che $\mathcal{B}' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}'_n$ è una base σ-discreta. In effetti se $x \in X$ ed U è intorno di x, si può trovare $n \geq 1$ tale che $x \in B(x, 1/n) \subset U$. Se prendiamo $\bar{n} > 2n$, allora $\exists B'_{\bar{n}} \in \mathcal{B}'_{\bar{n}}$ tale che $x \in B'_{\bar{n}}$.
Essendo un rafinamento, $\exists B_{\bar{n}} \in \mathcal{B}_{\bar{n}}$ tale che $x \in B'_{\bar{n}} \subset B_{\bar{n}}$. Facciamo vedere che $B_{\bar{n}} \subset U$. Infatti se ad esempio $B_{\bar{n}} = B(y, 1/\bar{n})$, e $z \in B_{\bar{n}}$ abbiamo:

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < 1/\bar{n} + 1/\bar{n} = 2/\bar{n} < 1/\bar{n} \Rightarrow z \in B(x, 1/n) \subset U$$

Quindi $B_{\bar{n}} \subset B(x, 1/n) \subset U$. Pertanto $x \in B'_{\bar{n}} \subset U$, e quindi $\mathcal{B}$ è una base di X. $\Box$
La caratterizzazione b) è dovuta indipendentemente a Nagata e Smirnov (1950), mentre la c) è dovuta a Bing (1951) .

Riferimenti bibliografici

[1] V. Checcucci, A. Tognoli, E. Vesentini. *Lezioni di topologia generale* Feltrinelli, 1976

[2] Kelley .*General Topology* , Springer

[3] A.Kolmogorov, S.Fomine. *Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale*. Mir, 1980