SULLA MATEMATICA ELEMENTARE

LUCA GRANIERI

Summary

We present some “elementary mathematics” to show as the distance between basic and advanced mathematics is not so far. In particular we discuss some aspect from algebra (product, quotient, etc.) and from geometry (area and perimeter).

SULLA MATEMATICA ELEMENTARE

LUCA GRANIERI

Dipartimento di Matematica Politecnico di Bari e
Dipartimento di Matematica e Applicazioni
Università Federico II di Napoli
luca.granieri@unina.it, granieriluca@libero.it

Tutti abbiamo incontrato nella vita degli oggetti matematici. Perlomeno a scuola (elementare e media), parlando di numeri e figure geometriche.
E in genere si aveva l'impressione di capire di cosa si trattava.
Poi, in chi prosegue gli studi spesso affiora una certa disaffezione per la matematica. E questo proprio quando si incontrano matematiche ritenute superiori come il calcolo letterale, le funzioni ecc. temendo di cominciare a non capire più di cosa ci si stia

occupando. Chi non ha pensato almeno una volta: ma perché dobbiamo parlare di x e y?
E quando la nostalgia prende il sopravvento la domanda è d'obbligo: professore, può fare un esempio con i numeri?
Una volta, mi pare il matematico e filosofo, nonché premio nobel per la letteratura, Bertrand Russell, più o meno così si espresse:

Ero convinto che il professore sapesse chi erano x e y. Ma anche che non ce lo avrebbe mai detto.

Il fatto è che spesso si ritiene la matematica elementare troppo banale e quella superiore troppo difficile e astrusa. E in ogni caso entrambe poco interessanti.
In questo articolo vogliamo presentare alcune riflessioni che partono proprio da ciò che tutti pensiamo di sapere al fine di mostrare che la distanza tra l'elementare e il superiore è breve, talvolta brevissima.

1. Moltiplicazione e divisione

Tutti sanno che 8 diviso 2 fa 4. Ma perché? Siete sorpresi da una domanda del genere? Il fatto `e che anche studenti al primo anno di università restano spesso sorpresi da questo quesito. Un po' perché non si aspettano interrogazioni su questioni tanto elementari e arcinote a tutti. Forse anche perché la risposta è talmente automatica e si è così abituati a calcolare che raramente si è avuta occasione di una riflessione in merito. L'operazione di divisione è un classico esempio di qualcosa che tutti sanno ma che spesso poggia su basi molto fragili.
Comunque, la risposta alla domanda iniziale è ovviamente perché 4 per 2 fa 8. E quanto fa 9 diviso 2? Passata la sorpresa iniziale ora molti risponderanno: 4 con resto 1, per la ragione che $9 = 4 \cdot 2 + 1$.
Dunque, dividere un numero intero *a* (dividendo) per un numero *b*

(divisore) significa trovare due altri numeri, un quoziente q e un resto r, che soddisfino la relazione

$$a = b \cdot q + r. \qquad (1)$$

Certamente le prime risposte che abbiamo dato soddisfano la (1).
C’è però qualcosa che non quadra. Avete trovato di cosa si tratta?
Il fatto è che la (1) da sola non è in grado di determinare univocamente il quoziente e il resto. 8 diviso 2 potrebbe anche fare 3 con resto di 2. O ancora 9 diviso 2 potrebbe anche fare 3 con resto di 3. In tal caso l’operazione di divisione non sarebbe univocamente determinata.
C’è allora qualche richiesta da aggiungere alla (1) per far quadrare i conti. L’importante richiesta è che il resto r soddisfi la relazione

$$0 \leq r < b. \qquad (2)$$

Dunque il resto può anche essere nullo, come nel caso di 8 diviso 2, ma comunque deve essere inferiore al divisore. Così, nel dividere 8 per 2, i possibili resti sono soltanto 0 e 1. Se prendessimo 1 come resto, il quoziente dovrebbe verificare $8 = q \cdot 2 + 1$. Ma per $q = 0$, 1, 2, 3, 4 si ottengono i valori 1, 3, 5, 7, 9, e in tal modo il valore 8 per il dividendo è presto superato e la (1) non è mai soddisfatta.
Così, 8 diviso 2 non può che fare 4 (con resto 0).
Ma chi ci dice che è sempre possibile trovare un quoziente e un resto?
Molti risponderanno: perché li possiamo calcolare come ci hanno insegnato alla scuola elementare. Certamente, per tutti i valori di dividendo e divisore che ci verranno in mente l’algoritmo di calcolo ci fornirà un quoziente ed un resto. Ma perché sono unici? Non potrebbero esistere degli altri valori per il quoziente ed il resto, magari ottenibili con qualche altra strana procedura? Non potrebbero poi esistere dei numeri strani, magari estremamente grandi, per cui utilizzare un qualsiasi algoritmo richiederebbe un

tempo lunghissimo e per cui non esistono valori ammissibili di quoziente e resto? O l'unica nostra possibilità è quella di far partire un calcolatore e aspettare pazientemente la risposta?
Se per voi fosse molto importante conoscere il risultato di una divisione e, fatto partire il calcolatore, dopo molti mesi di attesa, il calcolatore vi rispondesse che non li ha trovati, non avreste la tentazione di spaccare il computer dalla rabbia?
Forse vale la pena sapere a priori che quoziente e resto ci sono sempre e sono unici. Magari non sapete chi sono, ma sapete che ci sono. Se allora il vostro computer non li trova, magari lo distruggete lo stesso dalla rabbia, ma in tal caso sapete anche con chi prendervela. Probabilmente il programmatore ha sbagliato qualcosa da qualche parte. O se due programmi restituiscono valori diversi sapete che uno dei due ha fatto cilecca.
Enunciamo allora il seguente

Teorema (di divisione). Dati due numeri interi a, b tali che $0 < b \leq a$, esistono e sono unici un quoziente q e un resto $0 \leq r < b$ per cui vale la relazione

$$a = b \cdot q + r.$$

Il lettore che volesse cimentarsi con la dimostrazione potrebbe ad esempio consultare [8].
Cosa succede quando il dividendo è 0? Notate che non siamo più nelle ipotesi del Teorema di Divisione. Comunque, possiamo cercare di estendere l'operazione di divisione a questo caso ulteriore. Allora, quanto deve fare 0 diviso un numero b? Dobbiamo cercare un numero che moltiplicato per b deve dare zero. Ma sì, è zero, perché, come tutti sanno, $b \cdot 0 = 0$. Già, ma perché? Anche questa questione richiede un minimo di riflessione. In genere pensiamo giustamente al prodotto come ad una somma ripetuta. Moltiplicare 3 per 5 significa sommare 5 volte 3, o sommare 3 volte 5.

Da questo punto di vista bisognerebbe anche giustificare in qualche modo che $b \cdot 1 = b$ che a rigore non sarebbe una somma ripetuta. Basiamoci allora sulle fondamentali proprietà algebriche (proprietà commutativa, associativa ecc.). In particolare la proprietà distributiva

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad (3)$$

valida quali che siano i numeri *a, b, c*.
A titolo esemplificativo, utilizzando più volta la (3) valutiamo ad esempio

$5+5+5 = 5 \cdot 3 = 5 \cdot ((1+ 1)+1)= 5 \cdot (1+1) + 5 \cdot 1 = 5 \cdot 1+ 5 \cdot 1+5 \cdot 1$

Allora, è proprio l'assunzione $b \cdot 1 = b$ assieme alla (3) a consentire se vogliamo di pensare il prodotto come una somma ripetuta. Pertanto, è del tutto ragionevole porre, se vogliamo per definizione, $b \cdot 1 = b$.
Passando al caso dello zero, volendo mantenere inalterate le proprietà algebriche, dovremo anche porre $0 \cdot 1 = 0$ (il prodotto di un qualsiasi numero per uno è lo stesso numero). Ma allora, mantenendo la proprietà commutativa, potremo considerare anche il prodotto per 0 come una somma ripetuta.
Così, moltiplicare *b* per 0 significherà sommare *b* volte 0. Ma la somma di un qualsivoglia numero di zeri é sempre zero.
Pertanto $b \cdot 0 = 0$ (cosa succederebbe se $b \cdot 0$ desse un risultato diverso da zero?) .
E se invece volessimo fare *a* diviso 0? No, non si può mica dividere per zero! Già, è così, ma per diversi motivi. Bene, dobbiamo cercare un numero che moltiplicato per zero deve darmi *a*. Ma moltiplicando per zero si ottiene sempre zero. Tenuto conto che l'unico resto disponibile è proprio zero, questa operazione non è

allora possibile. Non ci può essere nessun numero che possa essere chiamato risultato di *a* diviso 0.
E se invece volessimo fare 0 diviso 0? Allora, poiché la relazione $0 \cdot q = 0$ è sempre vera, quale che sia *q*, ogni numero andrebbe bene
come quoziente. Dunque, in questo caso l'operazione di divisione non avrebbe un risultato univoco. 0/0 sarebbe uguale a qualsiasi numero giacché qualsiasi numero per zero restituisce proprio zero. Si dice allora anche che 0/0 é un'operazione indeterminata.
Le poche considerazioni fatte, sebbene elementari, non sono certo superflue, almeno a giudicare dalla quantità di scritture del tipo $a/0 = \infty$ che si ritrovano negli elaborati degli studenti, anche universitari. La sistematicità di tali scritture lascerebbe molto da pensare. Se non altro che vale la pena porre qualche enfasi in più proprio in quanto riteniamo elementare.
Il lettore avrà notato che non abbiamo potuto fare a meno di utilizzare lettere (*a, b, q, r*) per riferirci a numeri generici. Ma non si potrebbe fare a meno di questa complicazione? Le motivazioni sono tante. Limitiamoci ad un semplice esempio.
Consideriamo l'affermazione: la somma di due numeri pari è un numero pari. La tipica risposta è del tipo: OK, 2+2 = 4, 2+4 = 6, 4+4 = 8, 4+6 = 10 ecc. va bene, allora è vero. Ma chi ci dice che non esistano dei numeri pari molto grandi per cui non sia vero? Magari perdiamo tutto il giorno a scriverli e sommarli per poi accorgerci che la somma non è un numero pari. Che delusione sarebbe! Se invece di numeri si trattasse di un farmaco che ha guarito diciamo 100 persone e poi manda al cimitero la successiva? Certo, in medicina magari ci accontentiamo di sapere che una persona su mille presenta effetti collaterali più o meno seri. E questo è anche uno dei motivi per cui la medicina, per così dire, è una scienza meno esatta della matematica. Dunque, se possibile, vorremmo qualcosa di più: una dimostrazione.
Siano allora *m*, *n* due qualsiasi numeri pari. Allora, per il teorema di divisione, o se vogliamo per definizione di numero pari, esistono

due numeri (quozienti) a e b tali che $m = 2 \cdot a$ e $n = 2 \cdot b$. Allora $m + n = 2 \cdot a + 2 \cdot b$. Leggendo la (3) da destra verso sinistra si ottiene $m + n = 2 \cdot a + 2 \cdot b = 2 \cdot (a + b)$. Pertanto anche $m + n$ è divisibile per due.

Visto che ci siamo, i ragionamenti che abbiamo appena illustrato possono svelare un altro piccolo mistero. Quando si introducono i numeri relativi, ovvero quelli dotati di segno, si impara ad esempio che meno per meno fa più. Ma come si giustifica questa regola che può apparire del tutto arbitraria? Beh, l'idea è che dovendo ampliare i numeri, considerando anche quelli negativi, non sarebbe male conservare tutte le vecchie regole algebriche che valevano prima. Così, possiamo ad esempio valutare che

$$0 = (-1) \cdot (1 + (-1)) = -1 + (-1) \cdot (-1),$$

dove la prima uguaglianza per il fatto che il prodotto di un qualsiasi numero per zero deve ancora fare zero mentre la seconda segue dalla proprietà distributiva e il fatto che il prodotto dell'unità per qualsiasi numero deve dare ancora lo stesso numero.
Pertanto, il prodotto $(-1) \cdot (-1)$ deve essere un numero che sommato a -1 deve fare zero.
Allora non c'è scampo, se vogliamo mantenere le vecchie regole algebriche non può essere altro che $(-1) \cdot (-1) = 1$.

1.1. Numeri primi.

Esistono dei numeri refrattari alla divisione. Si tratta dei cosiddetti numeri primi, ovvero di quei numeri (maggiori di uno) che non sono divisibili per nessun altro numero, tranne ovviamente per se stessi e per l'unità. I numeri primi sono un po' come gli atomi dell'aritmetica.

Come la materia è composta da atomi, così i numeri sono composti da numeri primi. Questo è il contenuto del Teorema Fondamentale dell'Aritmetica:

Ogni numero intero è primo, oppure è prodotto di numeri primi.

Il Teorema Fondamentale dell'Aritmetica è importante perché ci dice che i numeri primi sono un po' come dei mattoni con cui costruire l'Aritmetica. La materia è composta di atomi, mentre i numeri sono composti da numeri primi. Ogni numero intero si può generare moltiplicando tra loro numeri primi. Come è noto l'acqua è composta di idrogeno ed ossigeno. Dunque, mettendo insieme nelle dovute proporzioni idrogeno e ossigeno si ottiene dell'acqua. Viceversa, se dall'acqua si estrae, per esempio tramite elettrolisi, l'ossigeno, ciò che resta è invariabilmente idrogeno. Questo significa in altre parole che la composizione dell'acqua in costituenti elementari è unica. Non esiste nessun altro modo per combinare atomi elementari per ottenere quella sostanza che comunemente chiamiamo acqua. Questo è vero anche per l'Aritmetica. La decomposizione di un numero in fattori primi è unica.
Ora, ci si aspetta che questi numeri primi, dovendo generare tutti gli altri numeri, non siano troppo pochi. Infatti, sin dai tempi di Euclide è noto che i numeri primi sono infiniti (si veda ad esempio [8, 1]).
Nonostante siano studiati da millenni, restano molti quesiti aperti sui numeri primi. Come il fatto se esistano o no infiniti numeri primi gemelli, come ad esempio (3, 5), (5, 7), (11, 13). Questi numeri primi realizzano la distanza minima tra due numeri, poiché i numeri pari (più grandi di due) non sono ovviamente primi. Tuttavia, la distanza tra un numero primo e il successivo può essere invece arbitrariamente grande.
Per convincersi di questo, introdotto il simbolo

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n,$$

basta considerare la sequenza di numeri

$$n! + 2, n! + 3, \ldots, n! + n$$

che sono tutti composti, essendo il primo divisibile per due, il secondo per tre ecc. (si tenga conto della proprietà distributiva (3).
Un’altro famoso quesito sui numeri primi è la congettura di Goldbach, che chiede se sia vero o no che ogni numero pari maggiore di due si possa scrivere come somma di due numeri primi. Più in generale restano aperte diverse questioni sulla regolarità nella distribuzione di questi numeri.
La cosiddetta ipotesi di Riemann, uno dei problemi più importanti e difficili della matematica contemporanea, è anche legato a queste problematiche che concernono i numeri primi. L’ipotesi di Riemann è stata verificata per un numero elevatissimo di casi, ma ancora una dimostrazione completa non c’è. Chi la dovesse trovare, oltre che alla fama eterna, guadagnerebbe anche un bel premio in denaro. Si tratta infatti di uno dei problemi da un milione di dollari ([5]). Anche la scoperta di nuovi numeri primi, molto grandi naturalmente, se pur rappresenti un traguardo più modesto, sarebbe comunque in grado di farvi guadagnare qualche articolo sui notiziari e un premio in denaro.
Inoltre, questo obiettivo è perseguibile anche comodamente da casa utilizzando un computer e partecipando a dei veri e propri programmi di ricerca collettivi tramite internet. La conoscenza di numeri primi molto grandi è infatti importante ad esempio per i codici e la crittografia. Solo per darne un’idea, se moltiplicate numeri primi tra loro, anche molto grandi, si ottiene il risultato piuttosto agevolmente. Al contrario, dato lo stesso numero, è invece molto ma molto più difficile risalire ai fattori primi che lo hanno generato. Su questa asimmetria si basa la sicurezza di alcuni codici impiegati ad esempio per proteggere i dati di una carta di credito durante le transazioni finanziarie. Per approfondire

questi temi il lettore interessato può consultare ad esempio [3, 6, 14, 13, 2].

2. Aree e perimetri

Un'altra classe di oggetti elementari noti sin dall'infanzia sono le figure geometriche. Tra queste, la più elegante e versatile è senz'altro il cerchio. Chi non si è divertito a giocare con riga e compasso? E tutti sanno che l'area del cerchio di raggio r vale πr^2 mentre il suo perimetro vale $2\pi r$. Queste ben note formule che ci accompagnano sin dai primi anni di scuola nascondono però molte questioni profonde. In effetti, cosa dobbiamo intendere per area e perimetro di una figura curva, come il cerchio appunto? Che cos'è quel misterioso simbolo π? Per i poligoni è abbastanza chiaro cosa siano area e perimetro. Ma misurare l'area e il perimetro di una figura generica può richiedere l'utilizzo di strumenti matematici anche piuttosto avanzati (analisi matematica, teoria geometrica della misura, ecc.). Nel caso del cerchio c'è voluto tutto il genio di Archimede per stabilire che un cerchio è equivalente (in termini di area) ad un triangolo avente per base la circonferenza e altezza il raggio. Archimede utilizzò l'ingegnoso metodo di *esaustione* approssimando il cerchio mediante poligoni e anticipando in qualche modo la teoria dei limiti e dell'integrazione. Per la misura del cerchio rimandiamo il lettore per esempio a [8, 9, 12].
Se indichiamo con π l'area del cerchio di raggio uno allora il suo perimetro vale esattamente 2π. Ma il fascino del numero π non si esaurisce qui e questo numero spunta fuori quasi miracolosamente in una vastissima serie di questioni, sia teoriche che applicative, e che a priori non avrebbero nulla a che fare con il cerchio.
Dunque, seguendo Archimede, è possibile misurare l'area del cerchio a patto di saperne misurare il perimetro. Questo discorso potrebbe anche essere ribaltato. In effetti, è anche possibile

misurare il perimetro, ovvero la circonferenza, sapendo misurare l'area. In particolare, è possibile riguardare la circonferenza come la velocità con cui varia l'area del cerchio al variare del raggio. Su questa questione ed altre connesse si veda [11]. Questo discorso ci dice comunque che c'è un legame profondo tra area e perimetro. In parte, ciò è vero per una figura geometrica qualsiasi. Vale infatti la seguente disuguaglianza isoperimetrica

$$A(E) \leq \frac{1}{4\pi} P(E)^2 \qquad (4)$$

valida per qualunque insieme piano *E*. Beh, non proprio per insiemi qualsiasi, ma oggi sappiamo che la (4) è valida per una vastissima classe di insiemi, quelli di perimetro finito nel senso di Caccioppoli, De Giorgi, ecc. Moralmente, anche se un insieme è piuttosto bruttino la sua area e il suo perimetro non possono fare quello che vogliono ma comunque devono obbedire alla (4). Si noti che nella (4) compare ancora il celebrato numero π.
Il cerchio è una figura speciale anche da questo punto di vista. Esso è l'unica figura piana che realizza l'uguaglianza nella (4). In effetti, per un cerchio *C* di raggio *r* abbiamo

$$A(C) = \pi r^2 = \frac{4\pi^2}{4\pi} r^2 = \frac{1}{4\pi} P(C)^2$$

Ora, consideriamo le figure piane *E* che abbiano tutte lo stesso perimetro, e sia *C* il cerchio con lo stesso perimetro. Dalla disuguaglianza isoperimetrica (4) segue che

$$A(E) \leq \frac{1}{4\pi} P(E)^2 = \frac{1}{4\pi} P(C)^2 = A(C)$$

Dunque, l'area del cerchio è sempre più grande di quella di un qualsiasi altro insieme che abbia lo stesso perimetro. Pertanto, il

cerchio possiede l’importante proprietà di racchiudere l’area massima possibile a parità di perimetro. Ovvero il cerchio risolve il cosiddetto problema isoperimetrico (stesso perimetro). Similmente, dalla (4) segue per il cerchio anche la proprietà di avere il perimetro minimo possibile a parità di area.
Per giustificazioni, approfondimenti e alcune applicazioni rimandiamo il lettore per esempio a [3, 4, 7, 10]. Qui ci limitiamo ad osservare che la (4) e le sue generalizzazioni sono a tutt’oggi, anzi oggi forse più di ieri, oggetto di intensi e importanti studi scientifici, sia dal punto di vista teorico che da quello delle applicazioni.

Riferimenti bibliografici

[1] M. Aigner, G. Ziegler, Proofs from THE BOOK, Springer, 2006.
[2] R. Aragona, C. Giberti, M. Sala, Algebra moderna e segreti antichi, Sapere, agosto 2014.
[3] R. Courant and H. Robbins, Che cos’è la Matematica? Boringhieri, 1983.
[4] P. D’Ancona, E. Montefusco, Il Dubbio di Didone, Pubbl. centro Ric. Mat. de Giorgi, Scuola Norm. Sup., Pisa (2004), 59-79.
[5] K. Devlin, i problemi del millennio, Longaensi, 2004.
[6] M. Du Satoy, L’Enigma dei Numeri Primi, Rizzoli, 2005.
[7] E. Giusti, La Matematica in Cucina, Boringhieri, 2004.
[8] L. Granieri, Elementi di Matematica, Matematica Elementare pre-Universitaria, Edizioni La Dotta, 2013.
[9] L. Granieri, Sulla misura del cerchio, Alice e Bob, Pristem, Aprile 2013.
[10] L. Granieri, Ottimo in Matematica, in preparazione.
[11] S. Lang, La Bellezza della Matematica, Boringhieri, 2002.
[12] P. Odifreddi, Divertimento Geometrico, Boringhieri, 2003.

[13] G. M. Phillips, Mathematics is not a Spectator Sport, Springer, 2005.
[14] La teoria dei numeri primi per una parola d'ordine, Le Scienze, Gennaio 2003