# MATEMATICA, SCIENZA E DIO

**Luca Granieri**

**Riassunto.** Si discutono alcune tesi contenute nel libro *T.J. Tipler, La fisica del cristianesimo* sostenute da argomenti matematici.

**Abstract.** We discuss some arguments contained in *T.J. Tipler, La fisica del cristianesimo* based on some mathematical arguments.

**Luca Granieri** è dottore di ricerca in matematica. Ha svolto attività di ricerca in diverse Università e centri di ricerca.

granieriluca@libero.it

In questo articolo prendiamo spunto dal testo: *T.J. Tipler, La fisica del cristianesimo* ([16]) per proporre alcune considerazioni sul rapporto tra scienza, matematica e filosofia.

*Tradizionalmente si considerano tre distinte prove dell'esistenza di Dio:*
*1) l'argomento fisico-teologico (a volte detto argomento del progetto),*
*2) l'argomento cosmologico (deve esserci una Causa prima), e*
*3) l'argomento ontologico (l'esistenza di Dio è parte della Sua natura essenziale). Il filosofo tedesco I. Kant (1724-1804) sostenne che tutti questi argomenti erano irrimediabilmente viziati da difetti decisivi, ma la sua opinione era condizionata dal fatto che non conosceva la matematica moderna* ([16, p102]).

Dunque la questione è se davvero la matematica moderna possa cambiare le carte in tavola rispetto agli argomenti filosofici sopra delineati. In particolare rispetto all'argomento cosmologico. In effetti, Tipler così prosegue:

*Delineerò una versione dell'argomento cosmologico. Alla fine dimostrerò che Dio è la Singolarità cosmologica e che è una Trinità. La forma dell'argomentazione di cui mi servirò per dimostrare queste proprietà sarà basata sulle idee matematiche usate nell'argomento cosmologico qui sviluppato.*

Vediamo allora quali siano queste *idee matematiche*.

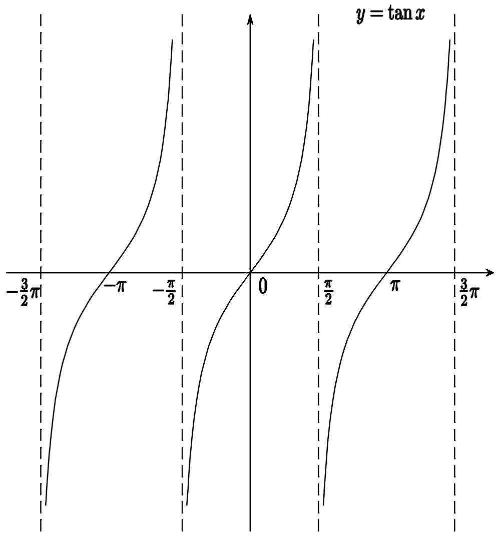
Intanto, Tipler fa notare che la parola *causa* può essere intesa in due modi diversi, in senso *temporale* oppure come *spiegazione*. Dunque, la prima accezione di causa è *catena causale temporale*. La domanda è:

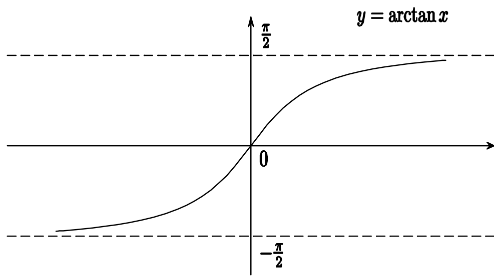
*C'è una Causa prima che sia origine di tutte le altre cause e sia essa stessa incausata? La risposta è sì. Contrassegniamo le cause di un dato evento con gli istanti in cui si sono manifestate. Il tradizionale argomento cosmologico affermava che la sequenza temporale doveva avere un inizio e che l'inizio era la Causa prima. Gli atei ribattevano che non doveva necessariamente esserci stato un inizio: perché l'universo non potrebbe avere un'età infinita? Dimostrerò che anche nel caso di un numero illimitato di cause risalenti indefinitamente all'indietro nel passato infinito di un universo eterno, deve pur sempre esserci una Causa prima. La dimostrazione si servirà di un artificio sviluppato dai matematici per ricondurre l'infinito entro una distanza finita* ([16, pp. 103-104]).

L'idea è dunque quella di associare ad ogni causa un tempo $t$. Ovvero, diciamo, un numero. Dunque l'insieme delle cause corrisponde ad un insieme di numeri, per Tipler essenzialmente di numeri reali. Naturalmente, stiamo per prima cosa tacitamente presupponendo che una tale corrispondenza sia possibile.

Non potrebbero le cause essere in una quantità non riconducibile a un sistema numerico come quello dei numeri reali? In secondo luogo, l'argomento di Tipler prosegue presupponendo che le *cause* siano in qualche modo ordinate (e forse ci sarebbe anche da discutere su questo) e che la corrispondenza considerata preservi *l'ordinamento* in modo da rispecchiare l'ordinamento temporale. In soldoni, che le cause siano temporalmente ordinate tramite una corrispondenza biunivoca con un intervallo di numeri reali.
Allora, se l'insieme dei tempi ha un tempo iniziale, non dovrà essere lo stesso per quello delle cause? L'obiezione presa in esame da Tipler è ovviamente il fatto che l'insieme dei tempi potrebbe non essere limitato. Ad esempio potrebbe corrispondere alla retta reale per la quale non c'è evidentemente un istante iniziale. Ma niente paura, *l'infinito si può ricondurre entro una distanza finita*. L'argomento utilizzato si riconduce sostanzialmente al fatto che la retta reale può essere messa in corrispondenza con un intervallo aperto e limitato. Tipler considera ad esempio la funzione tangente, ma più propriamente anche la sua funzione inversa arctan $x$ che manda la retta reale in un intervallo limitato, preservando l'ordinamento (ciò dipende dal fatto che si tratta di una funzione strettamente crescente).

$$\tan x : ]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[ \rightarrow R, \quad \arctan x : R \rightarrow ]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$$




Allora, argomenta Tipler, anche se il tempo fosse illimitato, lo si potrebbe sempre rendere limitato utilizzando la funzione tan $x$ (e la sua inversa) ovvero effettuando un cambio di variabile che alla fine consiste soltanto in un modo

diverso di misurare il tempo. Pertanto, poiché ad esempio $-\frac{\pi}{2}$ si può *annettere* all'intervallo dei nuovi tempi, il tempo $-\frac{\pi}{2}$ corrisponderebbe al tempo iniziale, alla Causa prima, ovvero a Dio. Si tratta di Dio poiché siamo di fronte ad un punto *trascendente*, non corrispondendo a nessuna causa del nostro universo iniziale. Ma questo ragionamento suscita diverse perplessità. Intanto si sta ammettendo che i numeri reali $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ corrispondano a qualche cosa. In altre parole, i numeri annessi $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ sono dei tempi ed affermare che debba trattarsi di cause, come Tipler sostiene, ci sembra un trucchetto inaccettabile.
Ma, anche se così fosse, perché allora tutti i numeri reali al di fuori di $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ non corrispondono anch'essi a delle cause? Sarebbe invece in qualche modo *naturale* considerare la funzione tan $x$ definita per periodicità, così come è abituato ogni studente (si veda la Fig.).

Quindi, ogni intervallo $[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi]$, con $k$ intero relativo, corrisponderebbe al nostro universo che si ripete uguale a se stesso. Si tratterebbe allora di un punto a favore per la *teoria dell'eterno ritorno (dell'uguale)* ([6]).
Poi, il fatto è che l'argomento potrebbe essere anche utilizzato in direzione opposta. Se noi osserviamo un tempo limitato potremmo pensare che esista un tempo iniziale. Ma cambiando scala dei tempi possiamo mandare il nostro intervallo limitato nella retta reale che non è limitata. Quindi dovremmo concludere che non ci può essere un istante iniziale.

## 1. Compattificazione

Tipler allora precisa che questa *annessione* dei tempi $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ corrisponde a quello che i matematici chiamano *compattificazione a due punti della retta reale*. Poiché anche la retta reale, che non é limitata, può essere compattificata, tale compattificazione comprenderebbe due ulteriori punti che farebbero le veci di istante iniziale e di istante finale. Quindi ci sarebbe una Causa prima.
Sarebbe forse meglio a questo proposito considerare la cosiddetta *Compattificazione di Alexandroff* (si veda ad esempio [13]) che compattifica un qualunque spazio (topologico) in maniera minimale: per ottenere uno spazio compatto basta aggiungere un punto (e modificando ovviamente la topologia in modo da tener in debito conto l'aggiunta di questo nuovo punto). Allora, per il Teorema di Alexandroff, anche la retta reale si può compattificare aggiungendo un sol punto invece che due. In tal caso la retta diventa (topologicamente) equivalente

alla circonferenza. L'universo si chiuderebbe su se stesso e la Causa prima sarebbe anche la Causa ultima e Dio potrebbe giustamente dire: *Io sono l'Alfa e l'Omega, il Primo e l'Ultimo, il Principio e la Fine* (Apocalisse 22:13).
Allora *Dio è la compattificazione di Alexandroff dell'universo*? Prima di entusiasmarci troppo dobbiamo riflettere su una cosa: Il teorema di Alexandroff non è un risultato di *esistenza*. In altre parole ci dice che se aggiungiamo un punto ad uno spazio dato lo si può rendere compatto. Ma non ci dice nulla *sull'esistenza* del punto da aggiungere, che tra le altre cose può essere di natura qualsiasi, con l'unico requisito di non appartenere allo spazio di partenza. Pertanto, i due punti (o il punto) da aggiungere bisogna già averceli prima, o in qualche modo postularne a priori l'esistenza. Convenzionalmente, questi punti vengono indicati con i simboli $-\infty$, $+\infty$, ma potrebbero anche essere chiamati *Pippo e Pluto*, o *Batman e Robin*. Magari non sarebbero delle notazioni efficaci ma potrebbero strappare qualche sorriso in più agli studenti.
Tuttavia, se la retta reale è (o rappresenta) tutto il nostro universo, allora essa non può essere compattificata. Per farlo serve almeno un oggetto, che Tipler chiamerebbe *trascendente*, che non appartenga al nostro universo. Dunque bisogna accettare già in partenza che ci sia il trascendente, ovvero, nel caso del nostro modello, qualcosa che non sia un numero reale.
In definitiva, questo argomento per la Causa prima mi sembra indistinguibile dal seguente:

*Se l'universo non ha una Causa prima, aggiungendone una si ottiene un universo dotato di una Causa prima*.

Magari sarà anche vero, ma non è poi così sensazionale! La matematica è un'avventura meravigliosa e in genere essa si rivela assai generosa, restituendoci alla fine più di quanto ci si possa aspettare, ma è sempre meglio non farsi troppe illusioni: anche la scienza ha i suoi limiti!

## 2. Ordinamenti

Ritorniamo ancora sulla questione: perché $-\frac{\pi}{2}$ rappresenta una causa?
*Si noti che il punto* $-\frac{\pi}{2}$ *è effettivamente una causa, perché tutte le cause possono essere fatte risalire ad esso* ([16, p. 106]). Qui le cose non sono chiarissime. Probabilmente, si intende il fatto che le cause siano ordinabili, nella fattispecie

temporalmente, e un loro modello sia costituito dai numeri reali. Se le cause formano quello che un matematico chiamerebbe un *insieme ordinato*, allora una Causa prima non sarebbe niente altro che il più piccolo elemento, o minimo, di tale insieme.
Allora, poiché i tempi $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ hanno minimo, allora anche le cause hanno un minimo, e quindi c'è una Causa prima. Semplice, no?
Già, fin troppo. L'obiezione immediata è simile a quella della sezione precedente. L'ordinamento temporale vale soltanto in $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Si tratta allora di estenderlo in modo da contemplare anche il valore $-\frac{\pi}{2}$. Ma l'unico modo per farlo in modo coerente è quello di avere a disposizione un oggetto che non stia nell'insieme delle nostre cause. Anche in questo caso bisogna assumere implicitamente che il *trascendente* esista già a priori. In altre parole potremmo riformulare la questione dicendo: *se esiste un oggetto trascendente allora questo è la Causa prima*.
D'altra parte, l'esistenza di un minimo dipende ovviamente dall'insieme considerato ma anche dal suo ordinamento. Ad esempio gli interi relativi

$$Z \coloneqq \{\ldots -4 < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < 4 \ldots\}$$

con l'ordine usuale ovviamente non hanno un minimo. Ma se cambiamo l'ordinamento, ad esempio ponendo

$$0 < -1 < 1 < -2 < 2 < -3 < 3 < -4 < 4\ldots$$

allora il minimo esiste. Ma se l'insieme in considerazione non è altrettanto semplice da trattare, essendo ad esempio non-numerabile, sarà possibile determinare un minimo elemento? Sorprendentemente, la risposta, almeno in linea di principio, è affermativa per qualunque insieme. Questo è il contenuto del famoso Teorema di Zermelo (si veda ad esempio [13]) che stabilisce:

*Ogni insieme può essere "ben ordinato"*

dove un insieme si dice ben ordinato se ogni suo sottoinsieme non vuoto è dotato di minimo. Facciamo notare che il risultato di Zermelo non è *costruttivo*. Possiamo cioè dire che esiste un modo diverso di ordinare l'insieme, ad esempio i numeri reali, in modo che abbia un minimo, ma non sappiamo in generale come tale ordinamento possa essere fatto. Ad oggi nessuno è mai riuscito ad esibire ad esempio un tale buon ordine per i numeri reali in maniera esplicita.

Dunque, a patto di cambiare l'ordinamento considerato, anche l'insieme delle cause è ben ordinato.
Allora, esiste un recondito ordine causale, che Dio solo sa, è il caso di dirlo, secondo il quale è possibile determinare una causa prima. Ma in tal caso questa causa prima sarebbe *immanente*. Che la cosiddetta *Teoria del Tutto* possa avere a che fare con il buon ordinamento dei numeri reali?

## 3. Definizioni reali

Tipler non si scoraggia e per sostenere ulteriormente l'esistenza della Causa prima propone di approfondire ulteriormente il concetto di numero reale. Ci sono differenti modi per introdurre tali numeri. Intanto si può procedere per via *assiomatica* elencando le proprietà fondamentali che questi numeri devono soddisfare (si veda ad esempio [3]). In particolare, il cosiddetto *assioma di continuità* è alla fine quello che permette di distinguere i numeri reali dai razionali, e quindi di estendere quest'ultimi in modo da dar un senso preciso alla nozione di *retta reale* (si veda ad esempio [4, 3] per qualche dettaglio in merito). L'assioma di continuità richiede che *ogni insieme non vuoto e limitato inferiormente sia dotato di estremo inferiore*. Definire precisamente gli estremi richiederebbe qualche nozione tecnica in più (si veda ad esempio [4, 2]) ma possiamo accontentarci di dire che dato un insieme limitato, gli estremi inferiore e superiore rappresentano il *confine* che separa l'insieme dall'esterno. In pratica, ogni numero reale può essere pensato come estremo di qualche cosa. Allora, se l'insieme dei tempi è limitato, per l'assioma di continuità esso ammette un estremo inferiore, che sarebbe una Causa prima.
Ma non dimentichiamo che tutto questo riposa su un assioma. Alla fine siamo noi a richiedere che una tale Causa prima esista. Ma c'è dell'altro, chi ci dice che i numeri reali siano il *modello* giusto? Alcuni fisici ([14]) ritengono che lo spazio-tempo possa avere una struttura *discreta* piuttosto che *continua*.
In tal caso un modello più appropriato per i tempi potrebbero essere i numeri razionali. Ma i numeri razionali non soddisfano l'assioma di continuità! ([4, 3]). In tal caso potrebbe non esserci un istante iniziale. A meno che...
Tuttavia, i numeri reali possono anche essere costruiti a partire dai numeri razionali. Ci sono vari modi per farlo. Ad esempio le sezioni di Dedekind, le semirette di Russell, le successioni di Cauchy. Per qualche dettaglio in merito si veda ad esempio [3]. Il comune denominatore di queste costruzioni è la *teoria degli insiemi*. In parole povere, il numero reale viene introdotto come *rappresentante* di un certo insieme (di numeri razionali). Gli oggetti così

ottenuti soddisfano le stesse proprietà dell'approccio assiomatico e in particolare l'assioma di continuità. Certamente, si può avere l'impressione di aver *creato (o scoperto)* qualcosa di completamente nuovo. Ma non lasciamoci prendere la mano. Siamo sempre all'interno della teoria degli insiemi, e i numeri che abbiamo definito non sono altro che particolari oggetti di questa teoria. Quello che in realtà abbiamo fatto è scovare all'interno della teoria degli insiemi una struttura che soddisfa tutto quello che ci serve per parlare di *retta reale*. Allora, ammesso che queste costruzioni insiemistiche possano esser fatte per le cause, la Causa prima non sarebbe altro che un oggetto matematico, alla fine un oggetto della teoria degli insiemi.

Questo sarebbe Dio? Dio è un oggetto della teoria degli insiemi? E anche se fosse, resterebbe la millenaria questione di quale sia lo status degli enti matematici. In che senso un oggetto matematico esiste? La matematica è *scoperta* o *invenzione*? ([2, 8, 11]).

In ogni caso, è bene ricordare che la scienza, e in particolar modo la matematica, nasce da un accurata restrizione degli oggetti e delle procedure che si possono utilizzare per uno studio che possa dirsi scientifico. Ad esempio, per rendere non contraddittoria la teoria degli insiemi bisogna restringere accuratamente il tipo di insiemi che si possono considerare (per una introduzione alla teoria degli insiemi si veda ad esempio [12]). Prima di pensare tutto come un insieme dovremmo stare attenti alla cosiddetta *Teoria ingenua degli insiemi* e ai pericoli derivanti dal considerare insiemi troppo *grossi*, come *l'insieme di tutti gli insiemi* e cose del genere che conducono a paradossi (si veda ad esempio il Paradosso di Russell [4, 5]).

Tipler utilizza questo espediente degli insiemi per trattare la causa nell'accezione di *spiegazione*. Ora, bisogna assegnare un numero ad ogni spiegazione possibile. K. Godel ci ha insegnato ([1, 15]) come si può far corrispondere un numero ad ogni proposizione matematica. E qui potremmo anche chiederci se l'insieme delle proposizioni matematiche possa esaurire o meno l'universo. In che senso il mondo è matematico? La matematica non è la realtà e non sarebbe male riflettere un po' più approfonditamente sul concetto di *modello* e di *legge fisica* ([10, 9]). Comunque sia, ammettiamo di far corrispondere ad ogni spiegazione un numero.

Allora, anche se le spiegazioni fossero illimitate le si potrebbero sempre rendere limitate con il trucchetto della riparametrizzazione del tempo.

Allora, propone Tipler, potremmo scrivere su un foglio limitato tutte le spiegazioni e quindi considerare il foglio come un tutt'uno. Allora il foglio sarebbe la Causa prima, trascendente in quanto non compare nell'elenco di tutte quelle immanenti. Dunque, Tipler propone di pensare Dio come *l'insieme delle spiegazioni*.

Poiché Dio è la Causa prima, e in questa accezione Lui stesso una spiegazione, allora è implicito assumere che l'insieme delle spiegazioni sia esso stesso una spiegazione (chi ce lo assicura?). Ma ammesso questo, potremmo aggiungere sul nostro foglio la spiegazione *Dio* e considerare di nuovo il foglio come un tutt'uno, come un insieme. Allora questo nuovo insieme sarebbe spiegazione di tutte le spiegazioni immanenti nonché di Dio stesso. Quindi sarebbe un super-Dio. E similmente potremmo poi considerare un super-super-Dio e così via.
Ancora più interessante sarebbe se i numeri assegnati all'universo, diciamo così, fossero soltanto razionali. Allora, certamente utilizzando la teoria degli insiemi potremmo *completare* l'insieme aggiungendo una Causa prima. Ma con lo stesso sistema dovremmo anche aggiungere e completare i numeri razionali anche altrove. Anzi, in ogni dove, passando dal *discreto* dei numeri razionali al *continuo* dei numeri reali.
Allora il trascendente non sarebbe limitato soltanto all'inizio e alla fine del tempo ma sarebbe onnipresente, onnipervasivo. Nel nostro universo ci sarebbe anzi molto più trascendente che immanente e il nostro universo, come è giusto che sia, sarebbe un *nulla* (se vogliamo un insieme di *misura nulla*) in confronto ad esso. Alla fine, non sarebbe inappropriato esclamare: *Ci sono più cose in cielo e in terra, Orazio, di quante ne sogni la tua filosofia* (dall'Amleto di W. Shakespeare).

## BIBLIOGRAFIA

[1] Berto F., 2008, *Tutti pazzi per Godel*, Laterza.
[2] Giusti E., 1999, *Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici*, Boringhieri.
[3] Giusti E., 2002, *Analisi matematica 1*, Boringhieri.
[4] Granieri L., 2013, *Elementi di Matematica, matematica elementare pre-universitaria*, Edizioni La Dotta.
[5] Granieri L., 2015, *Dio c'è e la scienza...*, Edizioni La Dotta.
[6] Granieri L., 2015, Sull'eterno ritorno, *Archimede* **1**, pp. 20-21.
[7] Granieri L., 2016, Essere o non essere, *Scienze e Ricerche* N. 24.
[8] Hersch R., 2001, *Cos'è davvero la matematica*, Baldini & Castoldi.
[9] Israel G., 1996, *La visione matematica della realtà*, Laterza.

[10] Israel G., 2003, Scienza pura e applicata nell'ultimo trentennio: una trasformazione radicale, LLULL, *Revista de la Sociedad Espanola de Historia de las Ciencias y de las Tecnicas, v*ol. 26, pp. 859-888.
[11] Livio M., 2009, *Dio è un matematico*, RCS Libri.
[12] Lolli G., 2008, *Guida alla teoria degli insiemi*, Springer.
[13] Manetti M., 2008, *Topologia*, Springer.
[14] Musser G., Alle radici dello spazio e del tempo, *Le scienze*, Aprile 2012.
[15] Nagel E., Newman J. R., 1962, *La prova di Godel*, Boringhieri.
[16] Tipler F. J., 2008, *La fisica del cristianesimo*, Mondadori.