ISSN: 2037-6367

MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso –Redazione: Alberto Burato, Fabrizio Giugni, Michele Picotti, Sisto Baldo, Bruno Stecca – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – 338 6416432 – e-mail: info@mathesis.verona.it – lcorso@iol.it – Stampa in proprio – Numero 283 – Pubblicato il 06 - 04 - 2021

AL RITMO NATURALE DEL LOGARITMO

Luca Granieri [*]

[*Segue dal n.* 282]

Ovviamente, tutte le usuali proprietà potranno essere agevolmente ricavate come utile esercizio non appena ci si impadronirà dei rudimenti del calcolo differenziale ed integrale, cosa che in genere avviene entro la fine dei percorsi scolastici liceali.

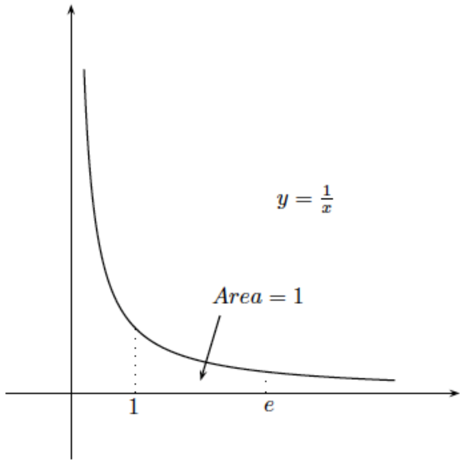

Figura 3. Numero di Nepero

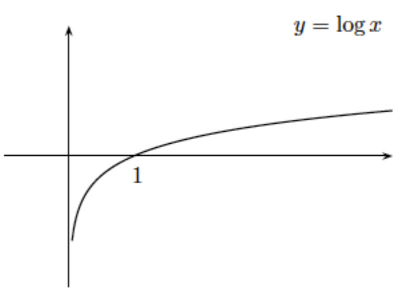

Figura 4. Funzione logaritmo

Tale approccio consente anche di introdurre in modo del tutto *naturale* il *numero di Nepero* o *base dei logaritmi naturali*. Precisamente, il numero di Nepero e è l'ascissa che produce un'area esattamente pari ad uno. Dunque, per definizione, $\log e = 1$.

Tra le proprietà che facilmente si ricavano dall'interpretazione geometrica c'è la continuità, che segue dalla mera possibilità di misurare le aree per funzioni limitate. Possiamo intuire facilmente che la funzione che corrisponde a tagliare un'area è continua. Come accade nel ripartire una torta tra i commensali. Se il taglio cambia di poco anche la conseguente fetta di torta cambia di poco. Per precisare la faccenda, in relazione alla figura 5 sia $f(x)$ la funzione che restituisce l'area $A(D_x)$ della torta che si trova a destra della retta verticale passante per x, all'interno di una prefissata scatola se la nostra torta non dovesse essere limitata. Resta soltanto da verificare la continuità della funzione f. Fissiamo dunque $x_0 \in \mathbb{R}$, e sia $\varepsilon > 0$. Dobbiamo dimostrare che si può scegliere $\delta > 0$ in maniera tale che

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\,.$$

Essendo la torta limitata, e qualunque sia la sua geometria, questa può essere racchiusa in una scatola rettangolare grande all'occorrenza. Diciamo di altezza h (vedi Figura 5). Se $|x - x_0| < \delta$, abbiamo

$$|f(x) - f(x_0| = \left|A(D_x) - A(D_{x_0})\right| = A(S) \leq |x - x_0|h\,,$$

essendo S la parte di torta contenuta nella striscia di base $|x - x_0|$ e altezza h. Allora, la definizione di continuità nel generico

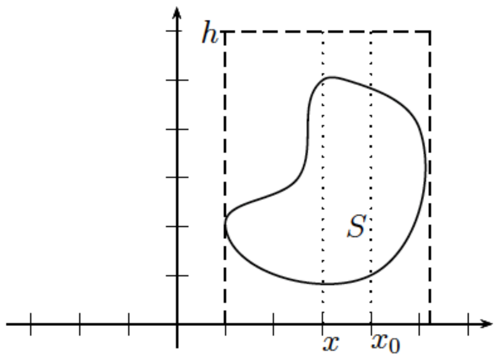

Figura 5. Continuità del taglio

punto x_0 è soddisfatta scegliendo $\delta = \varepsilon/h$. Dunque la funzione f è continua, anzi, uniformemente continua. Pertanto la funzione logaritmica è continua, come tutte le funzioni definite tramite integrazione.

In definitiva, probabilmente la scelta più *naturale* per introdurre il logaritmo è come area del sottografico dell'iperbole equilatera. Ovviamente presupponendo che tale area possa essere misurata. Dopotutto accettiamo fin dall'infanzia che l'area del cerchio di raggio 1 è π. Chi ha mai visto nei dettagli il Teorema di Archimede sull'area del cerchio? Forse l'unica occasione utile per farlo è costituita proprio dalle tecniche del calcolo integrale che comunque, almeno nelle linee essenziali, vengono affrontate già al livello di scuola secondaria superiore. Nel quadro qui delineato, potrebbe essere pertanto opportuno ribaltare l'approccio solito e introdurre primariamente il logaritmo e quindi la funzione esponenziale come sua inversa.

Riferimenti bibliografici: [1] A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov, M. A. Lavrentev, *Le Matematiche*, Bollati Boringhieri, 1977. [2] S. Cliff, *Quando il regolo dettava le regole*, Le Scienze, Luglio 2006. [3] L. Granieri, *Ottimo in Matematica. Studi progressivi per (quasi) tutti*, LaDotta Edizioni, 2016. [4] L. Granieri, *Elementi di Matematica, Matematica Elementare pre-Universitaria*, La Dotta, 2013. [5] L. Granieri, *Elementare Watson*!, LaDotta editore, 2018. [6] L. Granieri, Matematica, per la scuola secondaria superiore, in preparazione.

[*] Liceo scientifico "E. Fermi" Bari. Email: granieriluca@libero.it

Sull'inerzia dei docenti di Matematica

di Alfio Grasso [**]

Ho letto con interesse l'articolo del prof. Granieri pubblicato nel numero 281 di MatematicaMente e desidero esporre alcune mie considerazioni.

Nel suo lavoro non concorda con l'affermazione del Prof. Corso che la maggiore difficoltà per l'introduzione dell'Analisi non standard «forse è dovuta prevalentemente a una sorta d'inerzia dei docenti di Matematica ad aprirsi al nuovo». E sostiene che tale problematicità deriva dal fatto che l'argomento è poco trattato anche a livello universitario e dalla sua difficoltà intrinseca e da un approccio affatto che elementare, che richiede un grosso sforzo di astrazione e di generalità e che necessita di nozioni avanzate di logica, di teoria degli insiemi e di algebra connesse. E chiede: «È ragionevolmente possibile confezionare una trasposizione didattica efficace per gli studenti?» Riguardo a questa domanda, la risposta è **sì**: basta prendere le mosse da *Elementary Calculus: An Infinitesimal Approach*, di Keisler, il quale presenta un'introduzione assiomatica del campo dei numeri iperreali, come estensione non archimedea del campo dei numeri reali, formalizzando in 3-4 assiomi le straordinarie intuizioni di Leibniz. Poiché nella storia della matematica si è sempre proceduto con successivi ampliamenti da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Q}$ e da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$, un tale procedimento è del tutto naturale per gli studenti. Faccio notare che Kurt Gödel, che certo di queste cose s'intendeva, afferma: "Ci sono buoni motivi per credere che l'analisi non standard in una versione o in un'altra sarà l'analisi del futuro" [B.1 e B.2].

È poi importante notare che, con l'impostazione di Keisler il concetto di continuità è molto più semplice di quello tradizionale e più vicino all'idea intuitiva che se ne ha. Inoltre, nel suo libro di testo *Elementi di Analisi Matematica*, pur focalizzandosi interamente sull'approccio infinitesimale, non tralascia il concetto tradizionale di limite, che alla luce dei numeri infinitesimi ha gli stessi vantaggi del concetto di continuità. Questo approccio insegnerebbe dunque anche il metodo standard, rendendo ancora più vantaggiosa tale proposta didattica.

Che noi insegnanti di matematica, in genere, siamo "conservatori" e poco critici sia nei confronti di ciò che abbiamo appreso all'università sia nei riguardi dei libri di testo emerge da alcune difficoltà segnalate da vari autori a proposito dell'introduzione standard del concetto di limite e dalle mie osservazioni seguenti sull'insegnamento della geometria.

Per esempio in: Cornu, B. (1980), *Interference des modeles spontanes dans l'apprentissage de la notion de limite*. D'Amore, B. (1996), *L'infinito: storia di conflitti, di sorprese, di dubbi.* Dimarakis, I. & Gagatsis, A. (1997), *Alcune difficoltà nella comprensione del concetto di limite*. Duval, R. (1994), *Les représentations graphiques: fonctionnement et conditions de leur apprentissage.* Fischbein, E. (1989), *Tacit models and mathematical reasoning*.

Sintetizzando le perplessità esposte, anche se in modo incompleto, emerge che per quanto riguarda il concetto di limite, la presenza di modelli intuitivi (evocati anche dal linguaggio impiegato e da alcune forme di visualizzazione) non può essere trascurata: anche dopo che lo studente ha esaminato il limite mediante la definizione (formale), l'effetto di tali modelli continua a manifestarsi tacitamente e può causare misconcezioni. Inoltre, come osserva il Prof. Invernizzi: «La definizione di limite è controvariante, nel senso che, mentre dal "comportamento" della variabile x si risale a quello di $f(x)$, in essa si parte da $f(x)$ per arrivare a x. È poi un *pons asinorum* in cui cadono molti allievi».

Nella quasi totalità dei testi in adozione la geometria viene trattata con un'impostazione assiomatica che è tratta da quella dei *Fondamenti della geometria* di Hilbert, la quale contiene **ventuno assiomi**, che neppure noi insegnanti ricordiamo tutti: figuriamoci gli studenti di primo anno di superiore! Si utilizza tacitamente l'assioma di continuità. E non si tiene conto del fatto che i *Fondamenti* non sono stati scritti come testo scolastico, ma per colmare le lacune degli *Elementi* di Euclide. Infatti: Leibniz aveva scoperto che neanche la prima proposizione del I Libro si può dedurre dagli assiomi; Schopenhauer aveva dimostrato che neppure quello che chiamiamo I criterio di congruenza deriva da essi.

A sostegno dell'inopportunità d'introdurre subito gli assiomi, la relazione finale del Congresso internazionale di Cagliari sull'insegnamento della matematica del 1982 recita in sostanza:

- Poiché l'assiomatica di Hilbert è molto complessa, l'insegnante deve possederne una, *all'inizio sottointesa*, dagli assiomi semplici intuitivi ma **forti** (A esempio quella di Choquet *de L'insegnamento della geometria* del 1964, che si fonda sull'uso delle trasformazioni).
- L'assetto assiomatico deve essere la fase conclusiva di un percorso, ma <u>non ne può costituire in alcun modo la premessa</u>.

Parole al vento.

Riferimenti bibliografici: [B.1] Benci V., Freguglia P., La matematica e l'infinito, pag. 142, Carocci editore, Roma, 2019. [B.2] Robinson A. (1996), Non-standard Analysis Revised, Princeton University Press, Princeton (NJ)

[**] Mathesis di Catania – email: grassoalfio@yahoo.it.

Nella geometria di Riemann …

… non c'è uno spazio che contiene le forme geometriche oggetto di studio; ogni insieme di punti deve giustificare sé stesso (condizione di Riemann) attraverso le proprietà che ha e che non sono derivabili da altri ipotetici spazi in cui gli insiemi di punti sono immersi.

Figura 1. Il direttore di questa rivista impegnato a superare una 2-varietà verticale immersa in un 3-spazio alpino.

Versicoli quasi ecologici

di Giorgio Caproni

Non uccidete il mare, // la libellula, il vento. // Non soffocate il lamento // (il canto!) del lamantino. // Il galagone, il pino: // anche di questo è fatto // l'uomo. E chi per profitto vile // fulmina un pesce, un fiume, // non fatelo cavaliere // del lavoro. L'amore // finisce dove finisce l'erba // e l'acqua muore. Dove // sparendo la foresta // e l'aria verde, chi resta // sospira nel sempre più vasto // paese guasto: «Come // potrebbe tornare a essere bella, // scomparso l'uomo, la terra».

Questa poesia, pubblicata postuma, è tratta dalla raccolta "Res amissa" a cura di Giorgio Agamben, Garzanti editore, Milano, 1991